

Воспоминания об Ольге Александровне Ладыженской

С.И. Ретин

Впервые я увидел Ольгу Александровну в конце 70-х, когда стал посещать городской семинар по математической физике. Хорошо помню сильное впечатление, которое производил семинар и вся атмосфера Ленинградского отделения Математического института (ЛОМИ). В те годы ЛОМИ безусловно являлся одним из главных мировых математических центров. Все семинары ЛОМИ имели высокий статус в математическом сообществе (причем не только городском), и получить приглашение выступить с докладом уже само по себе считалось достижением.

Ольга Александровна была признанной главой семинара, который был основан её учителем Владимиром Ивановичем Смирновым (этот семинар носит его имя и существует до сих пор). Кроме членов лаборатории математической физики ЛОМИ, на доклады приходили преподаватели и студенты Ленинградского Университета и других вузов. В то «застойное» время интерес к науке вообще и к математике в частности был намного выше, чем сейчас, так что обычно семинар собирал много участников. Доклады продолжались два часа с небольшим перерывом и часто проходили весьма оживленно.

Меня всегда поражала способность Ольги Александровны моментально вникнуть в суть обсуждаемой проблемы (которая на самом деле могла её не очень волновать) и найти неясное место или слабое звено. При этом она могла выйти к доске и вступить в дискуссию с докладчиком (в чем ей часто помогали другие руководители семинара, в первую очередь Н.Н. Уральцева и М.Ш. Бирман). Я пишу об этих деталях потому, что семинар играл важную роль в развитии ленинградской школы уравнений в частных производных. Особое значение Ольги Александровны в этом процессе органически связано с одной из главных черт её личности: она была ученым в истинном смысле этого слова, её привлекала математика (и наука вообще) просто потому, что это интересно.

Такое отношение к математике доминировало среди участников семинара и создавало особую атмосферу, которая казалась совершенно естественной. Позднее, проработав много лет в университетах разных стран, я обнаружил, что возможна и даже весьма распространена другая трактовка понятия «ученый» – специалист, зарабатывающий деньги исследованиями в определенной (часто весьма узкой) области. Да и научные доклады могут быть организованы гораздо более формально и гладко завершаться парой коротких вопросов и вежливыми аплодисментами. Молодые участники нашего семинара формировались как ученые по другим принципам и, думаю, должны быть глубоко благодарны

за это Ольге Александровне и другим руководителям ленинградской (санкт-петербургской) школы математической физики.

Ольга Александровна никогда не была узким специалистом. Помимо математики её интересовали и теоретическая физика, история, литература и многое другое. При этом она была верующим человеком и имела четкую морально-нравственную позицию, которая по многим вопросам не совпадала с официально принятой. Более того, она была известна как бесстрашная защитница многих из тех, кто подавлялся советской бюрократической системой.

Надо сказать, что многие представители математического сообщества высоко ценили не только вклад Ольги Александровны в осмысление глубоких математических проблем, но и её особые человеческие качества. В этой связи вспоминается диалог, который состоялся в 2004 году (вскоре после кончины О.А.) на конгрессе ECCOMAS. Тема моего доклада была тесно связана с задачами гидродинамики, и я посвятил его памяти Ольги Александровны. После этого я беседовал с известным немецким математиком В. Егером (W. Jäger), который был хорошо знаком с Ладыженской и с многими другими советскими математиками. В своих воспоминаниях он отмечал не только выдающиеся математические работы О.А., но и её личные качества, заметив, что в их сообществе фамилию Ladyzhenskaya многие ассоциируют со словом Lady.

В тоже время в характере Ольги Александровны были черты, присущие многим людям того поколения, которое пережило войну и трудные послевоенные годы. Она была весьма экономным человеком, к примеру, не выбрасывала лист бумаги, если обратная сторона была чистой (многие её рукописные черновики написаны на такой бумаге). В этой связи мне запомнился один случай. В 2001 году в МГУ состоялась юбилейная конференция, посвященная столетию И.Г. Петровского, на которую мы поехали вместе с Ольгой Александровной. Петровский был её учителем и, конечно, она не могла пропустить такое событие. В то время «Сапсаны» между Петербургом и Москвой еще не ходили, и обычно ездили поездами, которые уходили поздно вечером и прибывали в Москву утром. Когда пришло время покупать билеты, я зашел к Ольге Александровне уточнить даты и упомянул, что собираюсь купить ей билет в СВ (вагон с местами повышенной комфортности). В это время она уже была академиком, и у меня не было сомнений, что это единственный вариант, соответствующий её статусу. К моему изумлению она сказала: «Сергей Игоревич, давайте не будем шиковать!» Замечу, что мы были отправлены в официальную командировку, и институт, без сомнения, оплатил бы эти расходы, так что речь шла об экономии денег института. В результате мы поехали в обычном купе вместе с двумя другими гражданами, один из которых всю ночь

громко храпел, так что утро в Москве я встретил с сильной головной болью. При этом Ольга Александровна, кажется, ничего особенного не заметила, была бодра и, пока мы добирались до Московского университета, много рассказывала о тех годах, когда она училась в Москве.

Уравнения Навье–Стокса были одной из главных проблем, интересовавших О.А. долгие годы. Начиная с 50х годов, она много занималась доказательством глобальной разрешимости краевых задач (стационарных и нестационарных) для этих уравнений и их линеаризаций и доказала их разрешимость, включая нелинейный случай в размерности два. Проблема однозначной разрешимости уравнений Навье–Стокса в размерности три остается нерешенной и поныне. Она является одной из семи Millenium Prize Problems, сформулированных математическим институтом Клэя (Clay Mathematical Institute) в 2000 году. Ольга Александровна много думала над решением этой проблемы вместе с другими членами лаборатории. Эта тема осталась одной из главных в лаборатории и после её смерти. Я не был глубоко вовлечен в эту тематику и надеюсь, что она найдет свое отражение в воспоминаниях других коллег. Хочу вспомнить только один эпизод. Уже упомянутая конференция, посвященная столетию Петровского, проходила вскоре после объявления институтом Клэя списка «проблем тысячелетия», и, конечно, проблема однозначной разрешимости уравнений Навье–Стокса обсуждалась в ряде докладов (в частности, в докладе Р. Темама). В последовавшей дискуссии Ольга Александровна выступила с определенной критикой того, как эта проблема была сформулирована. Соглашаясь с тем, что проблема является фундаментальной и справедливо выделена среди многих других, она считала, что требования, предъявляемые к решению, завышены. По её мнению, условие бесконечной гладкости для давления и скорости можно было бы ослабить до некоторых Соболевских классов. После всех обсуждений я спросил её мнение о том, будет ли эта Millenium Problem решена в положительном смысле (т.е. доказано существование единственного решения). Её ответ был: «Я в это не верю». Многолетние безуспешные попытки представить соответствующие доказательства говорят о том, что, вероятно, она была права.

Общеизвестны достижения Ольги Александровны в создании современной теории уравнений в частных производных, включая такие принципиальные проблемы качественного анализа, как существование решений и их регулярность. При этом она понимала важность развития вычислительных методов для дифференциальных уравнений; более того, её работы оказали заметное влияние и на развитие методов количественного анализа. Дискретные (разностные) аналоги дифференциальных операторов использовались О.А. для изучения свойств уравнений и доказательства

корректности соответствующих краевых задач. В её известном учебнике «Краевые задачи математической физики» самая большая глава посвящена методу конечных разностей. Ольга Александровна обоснованно считала себя одним из основоположников этого метода, который в настоящее время служит основой целого класса численных методов. При этом она ссылалась на свою кандидатскую диссертацию «Решение задачи Коши для гиперболических систем методом конечных разностей» (1949) и на соответствующую публикацию в ДАН СССР (1952).

Надо сказать, что хотя сама идея разностной аппроксимации достаточно проста (фактически она использовалась еще Эйлером), вопрос о том, как правильно использовать эти схемы для решения различных уравнений в частных производных, в то время изучен не был. Для одного и того же уравнения можно придумать много разностных схем, и было неясно, какой критерий следует использовать для отделения «правильных» схем от «неправильных» и как гарантировать сходимость конечно-разностных аппроксимаций к точному решению. Довольно быстро было понято, что этим критерием является устойчивость разностной схемы. При этом, однако, возникал вопрос о том, как гарантировать эту устойчивость.

В своем учебнике Ольга Александровна формулирует совершенно четкую концепцию: устойчивость разностной схемы для краевой задачи надо доказывать в нормах тех пространств, в которых устойчива сама краевая задача. Использование классической формулировки краевой задачи совершенно не обязательно генерирует устойчивую схему, а вот если решение определяется при помощи интегрального тождества, то устойчивость соответствующей дискретной схемы легко доказывается при помощи тех же самых рассуждений, что используются для доказательства ограниченности обобщенного решения в энергетической норме.

Этот принцип построения разностных схем приводит к вычислительным методам, близким к методу Галеркина, который был предложен в начале XX века Б.Г. Галеркиным и И.Г. Бубновым на эвристическом уровне и позднее подробно изучен в работах Г.И. Петрова и С.Г. Михлина. Широко известный метод конечных элементов является разновидностью этого метода. Первоначально он появился как инструмент инженерных расчетов. Ряд ленинградских математиков (Л.А. Оганесян, Л.А. Руховец, В.Я. Ривкинд и другие) активно занимались проблемой математического обоснования МКЭ и по некоторым направлениям опережали аналогичные зарубежные исследования. Ольга Александровна следила за их деятельностью и по возможности поддерживала эти работы. В 80-е годы я также подключился к этой тематике – моя докторская диссертация была посвящена вариационно-разностным методам для задач теории пластичности. Ольга Александровна заслушала на семинаре мои результаты и дала хороший отзыв на диссертацию. Её внимание и

поддержка были важны для меня и впоследствии, когда я перешел на работу в лабораторию математической физики ЛОМИ.

Проблема, которая меня интересовала, заключалась в получении явно вычисляемых оценок расстояния между точным решением краевой задачи и произвольной функцией из соответствующего (энергетического) класса. Она имела важное значение для вычислительных методов, поскольку наличие подобной оценки позволяет напрямую оценить точность полученного приближенного решения. Надо заметить, что в то время (70-80-е годы) доминировал другой подход к анализу погрешностей, который состоял в получении асимптотических оценок и был основан на проекционных оценках галеркинских аппроксимаций, для которых требовалась повышенная гладкость точного решения. Эти и другие ограничения, заложенные в нем, а также наличие в оценках неизвестных констант, сильно снижали его практическую ценность и стимулировали попытки нахождения других подходов.

В середине 90-х я занялся этим вопросом и вскоре получил первые результаты. Поначалу Ольга Александровна отнеслась к этой деятельности довольно скептически и даже выражала сомнение в том, что при сформулированных требованиях оценки вообще можно получить. Однако потом она изменила мнение, заинтересовалась, и у нас с ней были очень полезные обсуждения этой темы.

В первых работах я получал оценки расстояния до точного решения вариационных задач при помощи методов теории двойственности. Во время одного из разговоров О.А. сказала мне: если для этих эллиптических задач оценки получаются таким (вариационным) способом, то должен существовать и другой метод их получения, основанный на преобразовании интегрального тождества для минимайзера. Эта важная подсказка позволила посмотреть на проблему с новой стороны. Конечно, такой метод существовал и был быстро найден. Он изложен в трех моих работах, одна из которых была представлена Ольгой Александровной в Доклады Итальянской академии наук (иностранным членом которой она являлась).

Вопросы, связанные с аппроксимацией уравнений в частных производных, интересовали Ольгу Александровну и в дальнейшем. Последняя её работа, опубликованная в «Записках ПОМИ» в 2003 году, была посвящена построению системы базисных функций для метода Галеркина в задаче Стокса и других задачах гидродинамики. В ней она построила интегральное преобразование, позволяющее построить фундаментальную (базисную) систему в пространстве соленоидальных векторных полей в ограниченной звездной области, исходя из фундаментальной системы в пространстве Соболева W_2^1 . Мне кажется, что в значительной степени эта статья была мотивирована информацией о попытках обнаружить так называемый blow-up-эффект для уравнений

Навье–Стокса в численных экспериментах и нашими дискуссиями о том, насколько надежными и достоверными могут быть результаты таких экспериментов.

Уход Ольги Александровны был большой утратой для членов лаборатории и всех, кто её знал. Мы часто вспоминаем её и по традиции собираемся вместе 7 марта – в день её рождения. К сожалению, с каждым годом тех, кто помнит этого выдающегося ученого и замечательного человека, становится всё меньше.