На правах рукописи

Дубашинский Михаил Борисович

Аппроксимационные свойства некоторых классов векторных полей

01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена на кафедре математического анализа
Математико-механического факультета ФГБОУ ВПО
Санкт-Петербургского государственного университета

Научный руководитель:

Хавин Виктор Петрович
доктор физико-математических наук, профессор кафедры
математического анализа Математико-механического факультета
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургского государственного университета

Официальные оппоненты:

Дубцов Евгений Сергеевич,
доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный
сотрудник лаборатории математического анализа ФГБУН
Санкт-Петербургского отделения Математического института
им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Васин Андрей Васильевич,
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры
прикладной математики ФГБОУ ВПО Государственного университета
морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова

Ведущая организация:

ФГБОУ ВПО Российский государственный педагогический университет
им. А.И. Герцена

Защита диссертации состоится «___» _________ 2013 года в ___ часов на
заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ФГБУН
Санкт-Петербургском отделении Математического института
им. В.А. Стеклова Российской академии наук по адресу:
191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д.27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГБУН
Санкт-Петербургского отделения Математического института
им. В.А. Стеклова Российской академии наук.

Автореферат разослан «___» _________ 2013 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук А.Ю. Зайцев

1. Общая характеристика работы

Актуальность проблемы. В диссертации изучаются задачи аппроксимации векторными полями на компактных подмножествах евклидова пространства. Исследование нацелено, в основном, на задачи приближения в пространстве $\vec{C}(K)$ непрерывных векторных полей, заданных на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$.

Пусть $\vec{\mathcal{V}}$ – некоторый класс непрерывных векторных полей, каждое из которых задано вблизи множества K. Нас интересует следующий вопрос: какие векторные поля из $\vec{C}(K)$ могут быть равномерно на K приближены следами (сужениями) на K полей класса $\vec{\mathcal{V}}$? В роли $\vec{\mathcal{V}}$ у нас чаще всего выступают: во-первых, класс всех полей, гармонических вблизи K, а во-вторых – класс всех полей, безвихревых вблизи K (см. определение 2; при $N = 3$ гармоничность поля $\vec{f}$ означает, что $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$ и $\operatorname{div} \vec{f} = 0$). Следующее определение играет центральную роль в диссертации.

Определение 1. *Будем говорить, что поле* $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ допускает равномерную гармоническую аппроксимацию *на множестве* K, *если найдётся такая последовательность векторных полей* $\{\vec{f}_m\}_{m=1}^{\infty}$, *что* $\|\vec{f} - \vec{f}_m\|_{\vec{C}(K)} \xrightarrow{m\to\infty} 0$, *и для каждого* $m = 1, 2, \ldots$ *поле* $\vec{f}_m$ *– гармоническое в окрестности множества* K *(зависящей, вообще говоря, от* m*). Если поля* $\vec{f}_m$ *лишь безвихревые, то мы говорим, что* $\vec{f}$ допускает равномерную безвихревую аппроксимацию *на* K. *В случае, если любое поле* $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ *допускает равномерную гармоническую (или равномерную безвихревую) аппроксимацию на* K, *будем говорить, что множество* K *обладает* свойством равномерной гармонической (или безвихревой) аппроксимации.

При $N = 2$ вопрос о равномерной гармонической аппроксимации равносилен классическому вопросу об аналитической аппроксимации: какие функции, непрерывные на компактном множестве $K \subset \mathbb{C}$, могут быть равномерно на K приближены функциями, аналитическими вблизи множества K? (Согласно известной теореме Рунге, вопрос о таком приближении равносилен вопросу о равномерном приближении рациональными функциями с полюсами вне K.) Если любая функция f, непрерывная на K, допускает такую аппроксимацию, то мы говорим, что множество K обладает *свойством равномерной аналитической аппроксимации*. Классическая теорема Гартогса–Розенталя утверждает, что любое компактное множество нулевой площади обладает этим свойством. Далее, по известной теореме Бишопа (см. [2], [3]), возможность равномерной аналитической аппроксимации функции f, непрерывной на компактном множестве $K \subset \mathbb{C}$, есть *локальное* свойство функции f и множества K, а свойство равномерной аналитической аппроксимации есть *локальное* свойство множества $K \subset \mathbb{C}$.

Вопрос о характеризации множеств, обладающих свойством равномерной аналитической аппроксимации, был окончательно решён А.Г. Витушкиным (см. [2], [3], [15]). Его работам предшествовали результаты М.А. Лаврентьева, М.В. Келдыша и С.Н. Мергеляна о равномерной аппроксимации многочленами от z. Отметим, что справедливость теорем А.Г. Витушкина и С.Н. Мергеляна, как и теоремы Бишопа, связана, в частности, с тем, что система Коши–Римана, определяющая класс функций, аналитических на открытых подмножествах комплексной плоскости, относится к классу *эллиптических* систем дифференциальных уравнений и имеет фундаментальное решение $1/\pi z$.

Таким образом, множества в $\mathbb{R}^2$, обладающие свойством равномерной гармонической аппроксимации, описаны с исчерпывающей полнотой. Иначе обстоит дело с задачей равномерной гармонической аппроксимации в $\mathbb{R}^N$ при $N \geq 3$. Здесь известны многомерные аналоги теоремы Рунге и теоремы Гартогса–Розенталя, доказанные В.П. Хавиным, А. Преса Саге и Е.В. Малинниковой (см. [4], [6], [11]). Вопрос о гармонической аппроксимации в $\mathbb{R}^N$ при $N \geq 3$ всё ещё далёк от разрешения. Однако известно, что ответ на этот вопрос принципиально отличается от двумерного случая: В.П. Хавин и С.К. Смирнов показали, что класс полей, допускающих гармоническую аппроксимацию на множестве $K \subset \mathbb{R}^N$, вообще говоря, нельзя описать в *локальных* терминах – в отличие от двумерной ситуации (см. [5]). Наше исследование, в основном, нацелено на задачи аппроксимации в $\mathbb{R}^N$ при $N \geq 3$.

Отметим, что для компактных множеств в $\mathbb{R}^N$ нулевой N-мерной лебеговой меры задача гармонической аппроксимации *совпадает* с задачей безвихревой аппроксимации, которой в диссертации уделено значительное внимание. Далее, если компактное множество $K \subset \mathbb{R}^N$ может быть приближено сверху открытыми односвязными множествами, то на множестве K задача безвихревой аппроксимации равносильна задаче аппроксимации градиентами. Глава 3 диссертации посвящена прямым методам решения различных вариантов последней задачи.

Естественным обобщением классического комплексного анализа считается теория аналитических функций многих комплексных переменных. Однако, не менее естественным многомерным обобщением комплексного анализа в $\mathbb{C}$ служит и теория гармонических векторных полей в $\mathbb{R}^N$ (и теория гармонических дифференциальных форм на римановом многообразии). Здесь многие принципиальные вопросы (в том числе вопросы об аппроксимационных свойствах гармонических векторных полей) не решены и остаются весьма актуальными.

Цели работы.

1. Исследовать связь задач равномерной гармонической и почти гармонической аппроксимации (последнее при $N = 3$ означает, что вихри и дивергенции аппроксимирующих полей равномерно стремятся к нулю на K).

2. Исследовать в духе предыдущего пункта связь задач аппроксимации и почти аппроксимации решениями однородных эллиптических систем дифференциальных уравнений в частных производных, в частности, системы Коши–Римана.

3. Исследовать дискретный аналог задачи аппроксимации градиентами, точнее говоря, задачу аппроксимации точными векторными полями на графе, используя технику перехода к двойственной задаче.

4. В ситуации предыдущего пункта найти прямой метод построения дискретного градиента, приближающего заданное дискретное поле на графе, а в случае невозможности такого приближения – препятствия к его существованию.

5. Опираясь на результаты предыдущего пункта, установить связь задачи аппроксимации градиентами в $\mathbb{R}^N$ с теорией квазилинейных уравнений в частных производных (как и в случае дискретной задачи, мы получим прямой метод, приводящий либо к аппроксимирующему градиенту, либо к препятствию к его существованию).

6. Получить прямой метод решения задачи приближения дифференциалами форм произвольной степени на римановых многообразиях.

7. Описать возможность равномерной безвихревой аппроксимации в $\mathbb{R}^3$ в терминах потенциалов Био–Савара.

8. Изучить задачи гармонической, безвихревой, почти гармонической и почти безвихревой аппроксимации на компактных подмножествах гладких двумерных подмногообразий в $\mathbb{R}^3$.

Методы исследования. В работе используется техника теории приближений (интегральные представления, теоремы двойственности). Для исследования задачи приближения градиентами и дифференциалами используются методы дискретного анализа и теории графов, теория дифференциальных уравнений в частных производных и методы анализа на римановых многообразиях. Существенную роль в работе играют геометрическая теория меры, теория потенциала и теория потоков Де Рама.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть применены в задачах о гармонических векторных полях и в исследованиях, связанных с геометрической теорией меры.

Апробация работы. Результаты диссертации были доложены на семинаре по теории операторов и теории функций ПОМИ РАН в 2010 г. и на семинаре по комплексному и гармоническому анализу в Норвежском университете естественных и технических наук (Трондхейм) в 2010 г., а также в междисциплинарной исследовательской Лаборатории имени П.Л. Чебышева при СПбГУ в 2012 г.

Публикации. По теме диссертации опубликованы две работы [D1], [D2].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, разбитых на пункты и подпункты, приложения и списка литературы, включающего 36 названий. Общий объем диссертации – 123 страницы.

2. Содержание работы

Во введении к диссертации обсуждаются задачи гармонической аппроксимации на компактных множествах в $\mathbb{R}^N$ и даётся обзор истории вопроса.

В главе 1 даны основные определения, необходимые для понимания работы. Важную роль в работе играют потоки Де Рама в $\mathbb{R}^N$, а точнее – потоки размерности 0 (то есть обобщённые функции в $\mathbb{R}^N$, пространство таких функций мы обозначаем через $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$) и потоки размерности 1, которые можно понимать как обобщённые векторные поля в $\mathbb{R}^N$, то есть векторные поля, компоненты которых суть обобщённые функции; пространство таких потоков мы обозначаем через $\vec{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^N)$. Потоки размерности 0 и 1 суть непрерывные линейные функционалы на пространстве пробных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ и на пространстве пробных векторных полей $\vec{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^N)$ соответственно. Символ $\vec{T}[\vec{\varphi}]$ обозначает результат применения потока $\vec{T} \in \vec{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^N)$ размерности 1 к пробному векторному полю $\vec{\varphi} \in \vec{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^N)$; аналогичный смысл имеет символ $T[\varphi]$ для $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Естественным образом определяется оператор $\operatorname{div}\colon \vec{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, а при $N = 3$ – оператор $\operatorname{rot}\colon \vec{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^3) \to \vec{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^3)$. Поток $\vec{T} \in \vec{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^N)$ называется *соленоидальным*, если $\operatorname{div} \vec{T} = 0$.

Пространства $M(K)$ и $\vec{M}(K)$ суть пространства скалярных и векторных борелевских зарядов, сосредоточенных на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^N$; нормы $\|\cdot\|_{M(K)}$ и $\|\cdot\|_{\vec{M}(K)}$ суть полные вариации зарядов. Отметим, что пространства $M(K)$ и $\vec{M}(K)$ можно понимать как подпространства в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$ и $\vec{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^N)$ соответственно.

Символ $\mathcal{H}^N$ всюду обозначает N-мерную меру Хаусдорфа (или меру Лебега в $\mathbb{R}^N$); $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ есть скалярное произведение векторов $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^N$. Если $K \subset \mathbb{R}^N$ –

компактное множество, то $C(K)$ есть обычное пространство скалярных функций, заданных и непрерывных на K; это пространство оснащено равномерной нормой.

Ключевую роль в диссертации играет следующее

Определение 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – открытое множество, а $\vec{f}\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$ – C^1-гладкое векторное поле.*

1. *Поле $\vec{f}$ называется* гармоническим (*на множестве Ω*), *если его матрица Якоби симметрична, а её след равен нулю.*

2. *Поле $\vec{f}$ называется* безвихревым, *если его матрица Якоби симметрична.*

Гармоничность поля $\vec{f}$ означает, что $\vec{f}$ *локально* совпадает с градиентом гармонической функции. При $N = 3$ это значит, что

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{f} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{f} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

Далее, поле $\vec{f}$ безвихревое в том и только в том случае, если $\vec{f}$ *локально* совпадает с градиентом гладкой функции (а при $N = 3$ – что $\operatorname{rot} \vec{f} = 0$).

При $N = 2$ гармоничность поля $\vec{f} = (f_1, f_2)$ означает комплексную аналитичность комплекснозначной функции $f_1 - i f_2$ (мы отождествляем $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C}$). Именно поэтому задача равномерной аппроксимации гармоническими векторными полями (в смысле определения 1) при $N = 2$ равносильна задаче равномерной аналитической аппроксимации в комплексной плоскости. Точная формулировка упомянутой выше теоремы Бишопа о локальности этой аппроксимации такова (см. [2], [3]):

Теорема 3. *Предположим, что открытые множества $\Omega_1, \ldots, \Omega_l \subset \mathbb{C}$ $(l \in \mathbb{N})$ таковы, что $K \subset \bigcup\limits_{j=1}^{l} \Omega_j$. Если комплекснозначная функция $f \in C(K)$ допускает равномерную аналитическую аппроксимацию на каждом из множеств $K_j = \operatorname{clos}(K \cap \Omega_j)$, $j = 1, \ldots, l$, то f допускает равномерную аналитическую аппроксимацию и на всём множестве K. Кроме того, если каждое из множеств K_j $(j = 1, \ldots, l)$ обладает свойством равномерной аналитической аппроксимации, то и всё множество K обладает этим свойством.*

Глава 2 посвящена задачам *почти аппроксимации.* Эти задачи получаются ослаблением условий, налагаемых на аппроксимирующие векторные поля: если в задаче точной аппроксимации мы требуем, чтобы эти поля удовлетворяли некоторой системе дифференциальных уравнений, то в задаче *почти аппроксимации* мы требуем, чтобы эта система удовлетворялась приближённо. Задача равномерной аппроксимации почти гармоническими векторными полями в $\mathbb{R}^3$ ставится следующим образом.

Определение 4 (определение 2.0.3)**.** *Пусть K – компактное множество в $\mathbb{R}^3$, а $\vec{f} \in \vec{C}(K)$. Предположим, что найдётся такая последовательность векторных полей $\vec{f}_m$ класса $\vec{\mathcal{D}}(\mathbb{R}^3)$, $m = 1, 2, \dots$, что*

$$\|\vec{f} - \vec{f}_m\|_{\vec{C}(K)} \xrightarrow{m\to\infty} 0, \tag{2}$$

$$\|\operatorname{rot} \vec{f}_m\|_{\vec{C}(K)} \xrightarrow{m\to\infty} 0, \tag{3}$$

$$\|\operatorname{div} \vec{f}_m\|_{C(K)} \xrightarrow{m\to\infty} 0. \tag{4}$$

В этом случае мы будем говорить, что поле $\vec{f}$ допускает равномерную почти гармоническую аппроксимацию *на множестве K.*

Если любое векторное поле, заданное и непрерывное на K, допускает такую аппроксимацию на K, то мы будем говорить, что K обладает свойством равномерной почти гармонической аппроксимации*.*

Точно так же ставятся и задачи равномерного приближения почти безвихревыми векторными полями в $\mathbb{R}^3$ и равномерного приближения почти аналитическими функциями в $\mathbb{C}$. Вообще, если $N_1 = 2, 3, \dots$, $N_2, N_3 = 1, 2, \dots$ и $\mathcal{T}$ – произвольный линейный дифференциальный оператор любого порядка с гладкими коэффициентами, переводящий гладкую вектор-функцию $F\colon \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$ в гладкую вектор-функцию $\mathcal{T}F\colon \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_3}$, то по аналогии с поставленной выше задачей равномерной почти гармонической аппроксимации можно ставить задачу *равномерного приближения почти решениями оператора $\mathcal{T}$ на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^{N_1}$* и вопрос о том, обладает ли множество *K свойством равномерной аппроксимации почти решениями оператора $\mathcal{T}$*. (Задача равномерного приближения *точными* решениями оператора $\mathcal{T}$ также ставится аналогично задачам равномерной гармонической и равномерной аналитической аппроксимации.)

Норму $\|\cdot\|_{C(K)}$ в оценке (2) (или в оценках (3) и (4)) можно заменить на норму $\|\cdot\|_{L^p(K)}$ для некоторого $p \in [1, \infty)$ – так мы получим задачу L^p-аппроксимации равномерно почти гармоническими векторными полями (или, соответственно, задачу равномерного приближения L^p-почти гармоническими векторными полями). Точно так же можно обобщить и задачу равномерного приближения почти решениями произвольного дифференциального оператора $\mathcal{T}$.

Оказывается (теорема 2.1.4), что *для любого однородного дифференциального оператора $\mathcal{T}$ первого порядка, имеющего гладкие коэффициенты, задача равномерной аппроксимации почти решениями оператора $\mathcal{T}$ локальна*, то есть для этой задачи верна теорема, аналогичная теореме 3. Отсюда следует, что свойство равномерной аппроксимации почти решениями оператора $\mathcal{T}$ есть *локальное* свойство компактного множества в $\mathbb{R}^{N_1}$. В частности, это касается задач равномерной аппроксимации почти гармоническими и почти безвихревыми полями. С учётом того, что задача равномерной гармонической аппроксимации в $\mathbb{R}^3$ нелокальна (см. [5]), как и задача равномерной почти безвихревой аппроксимации, мы заключаем, что, вообще говоря, *задачи равномерного приближения почти гармоническими и почти безвихревыми полями неравносильны своим точным аналогам.*

Однако в некоторых случаях такая равносильность всё же имеет место. Именно, пусть $\mathcal{T}$ – однородный *эллиптический* дифференциальный оператор произвольного порядка с постоянными коэффициентами, переводящий гладкую вектор-функцию $F\colon \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$ в гладкую вектор-функцию $\mathcal{T}F\colon \mathbb{R}^{N_1} \to \mathbb{R}^{N_2}$ (см. [12]). Тогда задача равномерного приближения почти решениями оператора $\mathcal{T}$ равносильна задаче равномерного приближения точными решениями этого оператора (см. теорему 2.2.4).

Отметим следующие примеры эллиптических систем дифференциальных уравнений: это *система уравнений Коши–Римана* в комплексной плоскости, *система Моисила–Теодореску* в $\mathbb{R}^3$ (см., напр., [13]) и система, определяющая *кватернионные функции кватернионной переменной, аналитические слева* (см. [14]).

Равносильность задач аналитической и почти аналитической аппроксимации на плоском компактном множестве легко усмотреть из формулы Коши–Грина, восстанавливающей гладкую функцию f по её значениям на границе области и по значениям функции $\bar{\partial} f$, где $\bar{\partial}$ – оператор Коши–Римана. Трёхмерный аналог этой формулы (формула (2.8)) обладает, однако, некоторыми особенностями, препятствующими непосредственному обобщёнию такого рассуждения на трёхмерную ситуацию. Тем не менее, этот аналог позволяет установить равносильность некоторых задач аппроксимации в $\mathbb{R}^3$. Второе утверждение следующей теоремы было известно и раньше ([5], [7]).

Теорема 5 (теорема 2.2.6). *Пусть компактное множество $K \subset \mathbb{R}^3$ имеет нулевой объём, а $\vec{f} \in \vec{C}(K)$*

1. *Если поле $\vec{f}$ допускает равномерное почти безвихревое приближение на K, то оно допускает и равномерное почти гармоническое приближение на K.*

2. *Если поле $\vec{f}$ допускает равномерное приближение безвихревыми полями на множестве K, то оно допускает и равномерное приближение гармоническими полями на K.*

С помощью трёхмерного аналога формулы Коши–Грина можно исследовать и задачу аппроксимации полями с равномерно малой дивергенцией. Поле $\vec{f}$ называется *соленоидальным*, если $\operatorname{div} \vec{f} = 0$. Мы ограничиваемся результатом для задачи равномерной почти соленоидальной аппроксимации в $\mathbb{R}^3$, то есть, в нашей терминологии, равномерной аппроксимации почти решениями оператора div. Оператор div не относится к классу эллиптических операторов, однако оказывается, что эта задача равносильна задаче равномерной соленоидальной аппроксимации, поставленной по аналогии со сформулированными выше задачами равномерной гармонической и равномерной безвихревой аппроксимации (теорема 2.2.7). Геометрические условия, равносильные возможности равномерной соленоидальной аппроксимации, получены в работе [5].

Отметим, наконец, что все задачи почти аппроксимации легко переформулировать по двойственности. Мы выводим общий результат для систем первого порядка (теорема 2.1.5). Например, заряды, ортогональные всем полям, допускающим равномерное почти безвихревое приближение на компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^3$ – это заряды из $\vec{M}(K)$, имеющие вид $\operatorname{rot}\vec{\mu}$, где $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$ (см. следствие 2.1.6).

Глава 3 диссертации посвящена задаче равномерной аппроксимации градиентами. Пусть $N \geq 2$ – целое число, $K \subset \mathbb{R}^N$ – компактное множество, $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ – векторное поле, а $\varepsilon > 0$. Гладкую функцию $u\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ мы называем *ε-первообразной* поля $\vec{f}$ на K, если $\|\nabla u - \vec{f}\|_{\vec{C}(K)} < \varepsilon$. Нас интересуют следующие вопросы. Во-первых: *какие условия, налагаемые на компактное множество $K \subset \mathbb{R}^N$, векторное поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ и число $\varepsilon > 0$, обеспечивают существование ε-первообразной поля $\vec{f}$ на множестве K*? Во-вторых: *при каких условиях поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ имеет ε-первообразную на K при любом $\varepsilon > 0$*? В-третьих: *на каких множествах $K \subset \mathbb{R}^N$ любое поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ имеет ε-первообразную при любом $\varepsilon > 0$*? (В этом случае мы говорим, что множество K обладает *свойством равномерной аппроксимации градиентами.*)

Согласно теореме 5, задача равномерной гармонической аппроксимации на компактном множестве K нулевой меры Лебега равносильна задаче равномерной безвихревой аппроксимации на этом множестве, а если K есть пересечение убывающей последовательности односвязных открытых подмножеств пространства $\mathbb{R}^N$, то на K последняя задача равносильна задаче равномерной аппроксимации градиентами. Таким образом, задача приближения градиентами оказывается тесно связанной с задачей гармонической аппроксимации.

На поставленные выше вопросы об аппроксимации градиентами легко ответить, используя *двойственность*. Пусть $\operatorname{sol} K = \{\vec{\mu} \in \vec{M}(K)\colon \operatorname{div}\vec{\mu} = 0\}$ (оператор div на векторных зарядах понимается в смысле распределений). Применяя теорему Хана–Банаха, мы немедленно заключаем, что

$$\inf\{\|\vec{f} - \nabla u\|_{\vec{C}(K)}\colon u \in C^1(\mathbb{R}^N)\} = \sup\{\vec{\mu}[\vec{f}]\colon \vec{\mu} \in \operatorname{sol}(K), \|\vec{\mu}\|_{\vec{M}(K)} \leq 1\} \qquad (5)$$

(заряды $\vec{\mu}$ в правой части последнего равенства можно воспринимать как *препятствие* к аппроксимации). Далее, теорема С.К. Смирнова (см. [1]) устанавливает возможность выпуклого интегрального разложения векторных зарядов, фигурирующих в правой части (5), на так называемые *элементарные соленоиды.* Элементарные соленоиды – это векторные заряды в

$\mathbb{R}^N$, имеющие специальную геометрическую структуру, задаваемую липшицевыми кривыми; при этом каждый такой заряд сосредоточен на порождающей его кривой и имеет единичную полную вариацию. Обозначим через $\mathfrak{c}(K)$ множество элементарных соленоидов, сосредоточенных на K. Равенство (5) вместе с теоремой С.К. Смирнова позволяет заключить, что поле $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ имеет ε-первообразную на множестве K в том и только в том случае, если $\vec{T}[\vec{f}] < \varepsilon$ для любого $\vec{T} \in \mathfrak{c}(K)$. Кроме того, множество K обладает свойством равномерной аппроксимации градиентами в том и только в том случае, если $\mathfrak{c}(K) = \varnothing$ (последнее свойство, в частности, выполняется, если на K нет вообще ни одной непостоянной липшицевой кривой, отсутствие ненулевых соленоидальных зарядов на таких множествах непосредственно доказано в [5]).

Таким образом, возможность равномерной аппроксимации градиентами легко выразить в геометрических терминах с помощью двойственности и теоремы С.К. Смирнова. Применение двойственности, однако, не даёт ощутимого ответа на вопрос о том, *каким образом построить аппроксимирующее поле вида* ∇u *или же заряд* $\vec{\mu} \in \mathrm{sol}(K)$, *препятствующий аппроксимации.* Основная цель главы 3 – *получить заключение в духе равенства* (5) *без применения теоремы Хана–Банаха*, иначе говоря, мы намереваемся найти *прямой* метод решения задачи равномерной аппроксимации градиентами. Интерес к этому вопросу вызван, в том числе, и тем, что теоремы С.Н. Мергеляна и А.Г. Витушкина, об аналитической аппроксимации на комплексной плоскости имеют как доказательства по двойственности (см. [3]), так и доказательства, не опирающиеся на теорему Хана–Банаха (см. [2]). Аналог теоремы Рунге для гармонических дифференциальных форм также доказывается и через двойственность (см. [4]), и конструктивно (см. [6]).

Ставя вопрос о прямом методе равномерной аппроксимации градиентами, мы допускаем зазор между левой и правой частями равенства (5). Итак, пусть $N \geq 2, \quad K \subset \mathbb{R}^N$ – компактное множество, а $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ – векторное поле. Предположим также, что заданы два числа $\varepsilon_*, \varepsilon^*$ $(0 < \varepsilon_* < \varepsilon^*)$. Наша цель – *в явном виде, то есть без применения теоремы Хана–Банаха, построить либо такую функцию* $u \in C^1(\mathbb{R}^N)$, *что* $|\nabla u - \vec{f}| < \varepsilon^*$ *на* K, *либо такой заряд* $\vec{\mu} \in \mathrm{sol}(K)$, *что* $\vec{\mu}[\vec{f}] \geq \varepsilon_* \|\vec{\mu}\|_{\vec{M}(K)}$.

Чтобы найти какой-либо подход к поставленной задаче, мы рассматриваем её дискретный аналог – задачу аппроксимации градиентами на конечном ориентированном графе (задачу приближения градиентами в евклидовом пространстве мы далее называем непрерывной задачей, чтобы отличать её от её дискретного варианта). Мы ставим дискретную задачу не для того, чтобы непосредственно свести к ней непрерывную задачу путём её дискретизации: *наша цель состоит в том, чтобы получить в задаче на графе такой метод, который можно было бы перенести на непрерывную ситуацию.*

В подпункте 3.2.2 мы вводим формализм дифференциальных операторов на графе. Пусть G – конечный ориентированный граф, V – множество его вершин, E – множество его рёбер (допускаются кратные рёбра и петли). Для $e \in E$ обозначаем через $\operatorname{begin} e$ начало ребра e, а через $\operatorname{end} e$ – его конец; ребро e в этом случае мы будем записывать как $e = (\operatorname{begin} e, \operatorname{end} e)$. Обозначим через $U = \{u\colon V \to \mathbb{R}\}$ множество функций вершин графа, а через $F = \{f\colon E \to \mathbb{R}\}$ – множество функций его рёбер. Введём две нормы в пространстве F: для $f \in F$ положим $\|f\|_\infty = \max\limits_{e\in E} |f(e)|$, $\|f\|_1 = \sum\limits_{e\in E} |f(e)|$. Элементы пространства U суть аналоги скалярных функций в $\mathbb{R}^N$; далее, пространство F, оснащённое $\|\cdot\|_\infty$-нормой, есть аналог пространства векторных полей в $\mathbb{R}^N$ (и мы называем его элементы *дискретными полями*), а то же пространство, оснащённое $\|\cdot\|_1$-нормой, – аналог пространства векторных зарядов в $\mathbb{R}^N$ (элементы этого пространства мы называем *дискретными зарядами*). Для $f_1, f_2 \in F$ положим $f_1[f_2] = \sum\limits_{e\in E} f_1(e)\, f_2(e)$.

Операторы *дискретного градиента* $\nabla\colon U \to F$ и *дискретной дивергенции* $\operatorname{div}\colon F \to U$ вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned}(\nabla u)\,(e) &= u(\operatorname{end} e) - u(\operatorname{begin} e), \quad e \in E;\\ (\operatorname{div} f)(v) &= \sum_{\operatorname{begin} e = v} f(e) - \sum_{\operatorname{end} e = v} f(e), \quad v \in V.\end{aligned}$$

Функцию $u \in U$ будем называть (*дискретной*) *ε-первообразной дискретного поля f*, если $\|\nabla u - f\|_\infty \le \varepsilon$. Нас интересует, при каких условиях дискретное поле $f \in F$ имеет ε-первообразную.

Возможность существования ε-первообразной дискретного поля f легко выразить в двойственных терминах: заряды, ортогональные дискретным градиентам, – это в точности *соленоидальные* заряды (то есть такие заряды $\mu \in F$, что $\operatorname{div} \mu = 0$). При выполнении некоторого технического *условия симметричности* (предположение 3.2.1), не нарушающего общность задачи, любой соленоидальный заряд разлагается на "простейшие" соленоиды в графе: такими зарядами оказываются *циклы*, то есть заряды, порождённые простыми замкнутыми ориентированными путями в графе G; обозначим через $\mathfrak{c}(G)$ множество циклов в графе G. Цикл $\Gamma \in \mathfrak{c}(G)$ *препятствует* существованию ε первообразной дискретного поля f, если $\Gamma[f] > \varepsilon\|\Gamma\|_1$. Наша цель – получить прямой (то есть не использующий двойственности) метод построения ε-первообразной на графе или препятствия к её существованию. Применение теоремы Хана–Банаха к задаче на графе приводит к равенству, аналогичному равенству (5). Как и в случае непрерывной задачи, мы допускаем зазор между левой и правой частями этого равенства, точнее, мы ограничиваемся рассмотрением такой задачи: для заданных дискретного поля $f \in F$ и числа $\varepsilon > 0$ мы хотим в явном виде построить либо

3ε-первообразную поля f, либо цикл $\Gamma \in \mathfrak{c}(G)$, препятствующий существованию ε-первообразной поля f. Для этого в подпункте 3.2.3 мы вводим пошаговый процесс, который мы называем *алгоритмом перестроек.*

В результате этого процесса мы построим некоторую последовательность функций $u_m\colon V \to \mathbb{R}$, $m = 0, 1, 2\dots$. На каком-то шаге функция u_m может оказаться 3ε-первообразной поля f. В теореме 3.2.3 мы показываем, что так и случится, если ε-первообразная поля f существует. Однако эта теорема не достигает нашей цели, именно, она не обходит теорему Хана–Банаха и не позволяет в явном виде построить препятствие к существованию ε-первообразной (в случае, если её существование невозможно). Основной результат, касающийся дискретной задачи аппроксимации градиентами, – это

Теорема 6 (теорема 3.2.6)**.** *Предположим, что упомянутый выше процесс не приводит к существованию 3ε-первообразной дискретного поля f. Тогда найдётся цикл $\Gamma \in \mathfrak{c}(G)$, препятствующий существованию ε-первообразной поля f. Такой цикл Γ может быть найден в явном виде, исходя из функций u_m.*

Для доказательства нам, в частности, требуется установить равномерную ограниченность функций u_m. Мы выводим эту ограниченность из леммы 3.2.5 об ограниченности функций, получаемых в ходе процесса более общего вида. Эта лемма, как нам кажется, представляет самостоятельный интерес. Отметим, что явную конструкцию цикла Γ, препятствующего существованию ε-первообразной дискретного поля $f \in F$, можно понять, не вдаваясь в детали построения, из неформального замечания к теореме 3.2.6.

Таким образом, алгоритм перестроек позволяет обойти применение и теоремы Хана–Банаха, и дискретного аналога теоремы С.К. Смирнова о разложении (дискретных) соленоидальных зарядов. Перенос этого метода на непрерывную задачу, к которой мы возвращаемся в пункте 3.3, приводит нас к некоторому квазилинейному параболическому уравнению в частных производных, в котором участвует время t. Далее, мы заменяем это параболическое уравнение на эллиптическое, соответствующее стационарному состоянию параболического уравнения (в подпункте 3.3.1 мы излагаем эвристические соображения, приводящие к этим уравнениям). С помощью стандартных методов вариационного исчисления нетрудно показать, что это уравнение имеет обобщённое решение. Обобщённая форма нашего уравнения такова. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ – открытое множество с гладкой границей, а $\vec{f} \in \vec{C}(\operatorname{clos}\Omega)$ – векторное поле. Мы ищем такую функцию $u \in W^{1,2}(\Omega)$, что

$$\int\limits_{\Omega} \left\langle \zeta(|\nabla u - \vec{f}|) \left(\nabla u - \vec{f}\right), \nabla\eta \right\rangle \, d\mathcal{H}^N = 0 \qquad (6)$$

для любой функции $\eta \in W^{1,2}(\Omega)$; здесь $\zeta\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ – бесконечно гладкая неубывающая ограниченная функция, причём $\zeta(t) = 0$ при $t \in [0,\varepsilon]$

и $\zeta(t) > 0$ при $t > \varepsilon$. Уравнение (6) совпадает с уравнением Эйлера правильно подобранного нелинейного функционала на $W^{1,2}(\Omega)$, из чего легко следует существование требуемой функции u (см. подпункт 3.3.2).

Прямая схема решения задачи равномерной аппроксимации градиентами в евклидовом пространстве такова. Пусть $K \subset \mathbb{R}^N$ – компактное множество, $\vec{f} \in \vec{C}(K)$ – непрерывное векторное поле, а $\varepsilon > 0$. Будем считать, что поле $\vec{f}$ продолжено на $\mathbb{R}^N$ с сохранением непрерывности. Пусть $\{\Omega_m\}_{m=1}^{\infty}$ – убывающая последовательность открытых множеств в $\mathbb{R}^N$ с гладкими границами, причём $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Omega_m = K$. Пусть u_m – решение уравнения (6) на множестве Ω_m. Верно одно из двух утверждений (теорема 3.3.3):

1. Для какого-то $m = 1, 2, \ldots$ оценка $|\nabla u_m - \vec{f}| \leq \varepsilon$ верна почти всюду в Ω_m. В этом случае регуляризация функции u_m приводит к гладкой ε^*-первообразной поля $\vec{f}$ на K, где $\varepsilon^* > \varepsilon$ произвольно.

2. Существует ненулевой заряд $\vec{\mu} \in \operatorname{sol} K$, для которого $\vec{\mu}[f] \geq \varepsilon \|\vec{\mu}\|_{\vec{M}(K)}$. Такой заряд может быть получен переходом к слабому пределу в последовательности зарядов, построенных, исходя из функций u_m и множеств Ω_m.

Отметим, что такой метод позволяет избежать лишь применения теоремы Хана–Банаха, но не обходит теорему С.К. Смирнова о разложении соленоидальных зарядов.

Нетрудно видеть, что конструкцию решения задачи равномерной аппроксимации градиентами в евклидовом пространстве можно приспособить к равномерному приближению дифференциалами форм произвольной степени на компактных подмножествах римановых многообразий. Вопросу о таком приближении посвящён пункт 3.4. Пусть M – гладкое N-мерное ориентируемое риманово многообразие без края, а $K \subset M$ – компактное множество. Пусть $p = 1, \ldots, N$ и f – непрерывная дифференциальная форма степени p, заданная на K. Гладкая $(p-1)$-форма u, заданная на M, называется *ε-первообразной формы u на K*, если $|du - f| < \varepsilon$ на K (здесь $|\cdot|$ – норма на p-ковекторах, порождаемая римановой структурой на M). Отметим, что понятие ε-первообразной формы на римановом многообразии обобщает понятие ε-первообразной векторного поля в $\mathbb{R}^N$: векторные поля в $\mathbb{R}^N$ можно понимать как дифференциальные формы степени 1, а оператор ∇ – как оператор d на формах степени 0.

Возможность существования ε-первообразной формы f на множестве K легко выразить в двойственных терминах: препятствиями к такому приближению оказываются потоки размерности p, имеющие конечную массу и нулевую границу (см. [8]). Вопрос о *прямом* методе решения задачи равномерной аппроксимации дифференциалами для римановых многообразий ставится так же, как и для евклидова случая (и форм степени 1). Оказывается, что метод, полученный для задачи в евклидовом пространстве, применим и для задачи на многообразиях. Аналогом уравнения (6) для римановых многообразий оказывается такое уравнение: мы ищем $(p-1)$-форму u на открытом множестве $\Omega \subset M$ такую, что формы u и du суммируемы с квадратом по мере Хаусдорфа на Ω, и равенство

$$\int\limits_{\Omega} \zeta(|du-f|)(du-f) \wedge *d\eta = 0 \tag{7}$$

выполняется для любой гладкой $(p-1)$-формы η на M; здесь $*$ – звезда Ходжа, а функция ζ определена так же, как и для задачи в $\mathbb{R}^N$. Как и в евклидовом случае, можно показать, что это уравнение имеет решение: для этого достаточно построить такой функционал на пространстве $(p-1)$-форм, что уравнение Эйлера этого функционала совпадает с (7), см. подпункт 3.4.5. Единственное отличие от задачи приближения градиентами состоит в том, что для применения вариационных методов к этому уравнению требуется нормальная разрешимость оператора d в пространствах форм, суммируемых с квадратом (см. [16] и подпункт 3.4.4 диссертации; для $M=\mathbb{R}^N$ и $p=1$ это следует из хорошо известных теорем вложения для пространств Соболева). В остальном прямая схема равномерного приближения дифференциалами на римановых многообразиях принципиально не отличается от прямой схемы аппроксимации градиентами в евклидовом пространстве.

В главе 4 мы выводим некоторые частные результаты о гармонической и безвихревой аппроксимации в трёхмерном пространстве.

В пункте 4.1 мы исследуем задачу равномерной безвихревой аппроксимации в $\mathbb{R}^3$. Для этого мы вводим *потоки Био–Савара*, порождаемые соленоидальными распределениями в $\mathbb{R}^3$. Пусть $\vec{T} \in \vec{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^3)$ – поток размерности 1 с компактным носителем в $\mathbb{R}^3$. Определим *потенциал Ньютона* потока $\vec{T}$ равенством $U^{\vec{T}} = \vec{T} * \frac{1}{|x|}$, а *потенциал Био–Савара* потока $\vec{T}$ – равенством $\mathrm{BS}^{\vec{T}} = \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot} U^{\vec{T}}$. Потенциалы $U^{\vec{T}}$ и $\mathrm{BS}^{\vec{T}}$, хорошо известные в классической физике, суть потоки размерности 1 в $\mathbb{R}^3$, свёртка и оператор rot в определениях этих потенциалов понимаются в смысле распределений. *Если* $\vec{T} \in \vec{\mathcal{D}}'(\mathbb{R}^3)$ *и* $\operatorname{div}\vec{T} = 0$ *в смысле распределений, то* $\operatorname{rot}\mathrm{BS}^{\vec{T}} = \vec{T}$, $\operatorname{div}\mathrm{BS}^{\vec{T}} = 0$, *кроме того, вне носителя потока* $\vec{T}$ *распределение* $\mathrm{BS}^{\vec{T}}$ *совпадает с гармоническим векторным полем* (см. предложение 4.1.2).

Следующий результат характеризует заряды из $\vec{M}(K)$, ортогональные всем полям, безвихревым вблизи K (а значит, и всем полям, допускающим равномерную безвихревую аппроксимацию на K), в терминах потоков Био–Савара и в терминах теории гомологий.

Теорема 7 (теорема 4.1.3). *Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – компактное множество, а $\vec{\mu} \in \vec{M}(K)$ – векторный заряд, сосредоточенный на K. Следующие условия равносильны:*

1. $\vec{\mu}[\vec{f}] = 0$ *для любого поля $\vec{f}$, гладкого и безвихревого вблизи K;*

2. $\operatorname{div}\vec{\mu} = 0$, *и поле* $\mathrm{BS}^{\vec{\mu}}$ *точно в* $\mathbb{R}^3 \setminus K$;

3. *Для любой окрестности* Ω *множества* K *найдётся такой векторный заряд* $\vec{\nu} = \vec{\nu}_\Omega$ *с носителем в* Ω, *что* $\operatorname{rot}\vec{\nu} = \vec{\mu}$.

Третье условие теоремы имеет гомологический характер. По теореме С.К. Смирнова, любой соленоидальный заряд с носителем на K можно разложить в выпуклую интегральную комбинацию зарядов из $\mathfrak{c}(K)$; значит, в третьем условии теоремы 7 речь идёт о такой комбинации, гомологичной нулю в любой окрестности множества K (в то время как при описании равномерной почти безвихревой аппроксимации в $\mathbb{R}^3$ возникают такие комбинации, гомологичные нулю в классе зарядов на самом множестве K, см. выше). В пункте 4.2 мы приводим целый класс примеров, иллюстрирующий полученные результаты; этот класс обобщает пример компактного множества, построенный в [5] для доказательства нелокальности задачи равномерной гармонической аппроксимации в $\mathbb{R}^3$. В частности, из этих примеров следует, что задачи равномерной почти гармонической и равномерной почти безвихревой аппроксимации в $\mathbb{R}^3$ неравносильны своим точным аналогам. Кроме того, из приведённого в пункте 4.2 обсуждения становится ясно, что свойство равномерной безвихревой аппроксимации на компактном множестве зависит, во-первых, от наличия на нём спрямляемых кривых, то есть от его метрических характеристик, во-вторых, от взаимного расположения этих кривых, то есть от его топологических характеристик. И метрические, и топологические свойства множеств сохраняются при диффеоморфизмах, поэтому сохраняется и свойство равномерной безвихревой аппроксимации. Это верно и для равномерной почти безвихревой аппроксимации (предложение 4.3.1).

Равносильность задач равномерной безвихревой и почти безвихревой аппроксимации всё же имеет место для некоторого класса компактных множеств в $\mathbb{R}^3$: грубо говоря, для множеств этого класса имеет место теорема вложения $W^{1,1}(\mathbb{R}^3 \setminus K) \to L^1(\partial K)$. Точная формулировка такова.

Предложение 8 (предложение 4.4.1). *Предположим, что компактное множество* $K \subset \mathbb{R}^3$ *обладает следующим свойством: для любой скалярной функции* $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus K)$ *такой, что* $\int\limits_{\mathbb{R}^3\setminus K} |\nabla\psi|\, d\mathcal{H}^3 < \infty$, *найдётся семейство открытых множеств* $\{\Omega_m\}_{m=1}^\infty$ *с* C^1*-гладкими границами,* $\Omega_{m+1} \subset \Omega_m$, $\bigcap\limits_{m=0}^{\infty} \Omega_m = K$, *такое, что* $\sup\limits_m \int\limits_{\partial\Omega_m} |\psi|\, d\mathcal{H}^2 < \infty$. *Тогда на множестве* K *задача равномерного приближения почти безвихревыми полями равносильна задаче равномерного приближения безвихревыми полями.*

Условие этого предложения выполняется, в частности, для "плоских" компактных множеств в $\mathbb{R}^3$, то есть для компактных подмножеств двумерной плоскости в $\mathbb{R}^3$. Отождествим эту плоскость с $\mathbb{R}^2$, а плоское множество в $\mathbb{R}^3$ – с компактным подмножеством в $\mathbb{R}^2$. Верно следующее

Предложение 9 (предложение 4.5.1 и следствие 4.5.3, см. также теорему 4.5.2)**.** *Все четыре задачи равномерной гармонической аппроксимации, равномерной безвихревой аппроксимации, равномерной почти гармонической аппроксимации и равномерной почти безвихревой аппроксимации на плоском множестве в* $\mathbb{R}^3$ *равносильны. Множество* K *обладает свойством такой аппроксимации в том и только в том случае, если в* $\mathbb{R}^2$ *не существует ненулевой функции ограниченной вариации, сосредоточенной на* K*. Кроме того, это верно в том и только в том случае, если в плоскости* $\mathbb{R}^2$ *не существует множества Каччопполи* $E \subset K$*, для которого* $\mathcal{H}^2(E) > 0$*.*

(Определения функции ограниченной вариации и множества Каччопполи см., напр., в [9].)

Наконец, аналогичный факт верен и для компактных подмножеств гладких двумерных подмногообразий в $\mathbb{R}^3$ (см. предложения 4.6.1 и 4.6.2). В самом деле, как было указано выше, свойства безвихревой и почти безвихревой аппроксимаций сохраняются при диффеоморфизмах. Это позволяет свести вопрос об аппроксимации на подмножестве гладкого многообразия к предложению 9, локально отображая это подмножество на плоское множество в $\mathbb{R}^3$.

Список литературы

[1] С.К. Смирнов, *Разложение соленоидальных векторных зарядов на элементарные соленоиды и структура нормальных одномерных потоков*, Алгебра и анализ **5** (1993), № 4, 206–238.

[2] Д. Гайер, *Лекции по теории аппроксимации в комплексной области*, Мир, М., 1986.

[3] Т. Гамелин, *Равномерные алгебры*, Мир, М., 1973.

[4] А. Преса Саге, В.П. Хавин, *Равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами в евклидовом пространстве*, Алгебра и анализ **7** (1995), № 6, 104–152.

[5] С.К. Смирнов, В.П. Хавин, *Задачи приближения и продолжения для некоторых классов векторных полей*, Алгебра и анализ **10** (1998), № 3, 133–162.

[6] Е.В. Малинникова, В.П. Хавин, *Равномерное приближение гармоническими дифференциальными формами. Конструктивный подход*, Алгебра и анализ **9** (1997), № 6, 156–196.

[7] N.V. Rao, *Approximation by gradients*, J. Approx. Theory **12** (1974), № 1, 52–60.

[8] Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, М., 1987.

[9] Э. Джусти, *Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации*, Мир, М., 1989.

[10] Ж. де Рам, *Дифференцируемые многообразия*, ГИИЛ, М., 1956.

[11] Е.В. Малинникова, *Равномерная аппроксимация гармоническими дифференциальными формами на компактных подмножествах риманова многообразия*, Алгебра и анализ, **11** (1999), № 4, 115–138.

[12] N.N Tarkhanov, *The Cauchy Problem for Solutions of Elliptic Equations*, Akademie Verlag, Berlin, 1995.

[13] А.В. Бицадзе, *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*, Наука, М., 1966.

[14] A. Sudbery, *Quaternionic analysis*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc, **85** (1979), 199–225.

[15] В.И. Смирнов, Н.А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1964.

[16] В.М. Гольдштейн, В.И. Кузьминов, И.А. Шведов, *О нормальной и компактной разрешимости оператора внешнего дифференцирования при однородных краевых условиях*, Сиб. мат. журн. **28** (1987), № 4, 82–96.

Публикации автора по теме диссертации

[D1] М.Б. Дубашинский, *О равномерной аппроксимации гармоническими и почти гармоническими векторными полями*, Зап. научн. семин. ПОМИ **389** (2011), 58–84.

[D2] М.Б. Дубашинский, *Об одном методе аппроксимации векторных полей градиентами*, Алгебра и анализ **25** (2013), № 1, 3–36.