Санкт-Петербургский государственный университет

На правах рукописи

Корчевский Валерий Михайлович

Усиленный закон больших чисел для последовательностей зависимых случайных величин

01.01.05 Теория вероятностей
и математическая статистика

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д-р физ.-мат. наук, проф. В. В. Петров

Санкт-Петербург — 2013

Оглавление

§ 1. Введение

Рассмотрим последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$, принимающих значения в $\mathbb{R}^1$. Обозначим $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \geqslant 1$. Будем говорить, что последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет **усиленному закону больших чисел**, если существуют последовательность вещественных чисел $\{d_n\}_{n=1}^{\infty}$ и неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что

$$\frac{S_n - d_n}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.}$$

Первые теоремы об усиленном законе больших чисел для последовательностей случайных величин были получены при условии независимости с классической нормировкой ($a_n = n,\ n \geqslant 1$). Дальнейшие исследования были связаны с поиском новых достаточных условий применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям независимых случайных величин, а также обобщением классических результатов в различных направлениях. Одним из таких направлений является отказ от предположения о независимости и получение результатов о применимости усиленного закона больших чисел к различным классам зависимых случайных величин (мартингалов, ассоциированных случайных величин, последовательностей случайных величин с условиями перемешивания и т.д.). Другим направлением исследований является обобщение результатов об усиленном законе больших чисел на последовательности случайных элементов, принимающих значения в $\mathbb{R}^d$, а также в более общих измеримых пространствах. Третьим направлением является обобщение результатов об усиленном законе больших чисел с заменой классической нормировки на произвольную нормирующую последовательность.

Цель настоящей диссертации — получение новых результатов об усиленном законе больших чисел для последовательностей зависимых случайных величин.

Ограничиваясь рассмотрением последовательностей случайных величин, принимающих значения в $\mathbb{R}^1$, мы приводим ряд результатов, обобщающих известные теоремы об усиленном законе больших чисел на более общие классы зависимых случайных величин, а также результаты, обобщающие известные теоремы с классической нормировкой на случай произвольной нормирующей последовательности. Кроме того, мы приводим новые достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям зависимых случайных величин, новые результаты о сходимости почти наверное рядов зависимых случайных величин, а также исследуем связь между некоторыми классическими условиями в теоремах об усиленном законе больших чисел для последовательностей как независимых, так и зависимых случайных величин.

Основные результаты диссертации применимы к последовательностям неодинаково распределенных случайных величин.

Известно множество результатов, связанных с усиленным законом больших чисел как для независимых, так и для различных классов зависимых случайных величин. Значительная часть таких результатов включена в монографии, посвященные предельным теоремам для различных классов случайных величин. В книгах Петрова [12], [16], [46] содержится обширный материал об усиленном законе больших чисел для последовательностей независимых случайных величин, в книге Холла и Хейде [33] — для мартингалов, в монографиях Булинского и Шашкина [1] и Оливейры [45] — для ассоциированных случайных величин, в монографии Лина и Лу [37] — для случайных величин с условиями перемешивания. Большое количество результатов об усиленном законе больших чисел для независимых, а также различных классов зависимых случайных величин приведено в монографиях Стаута [51], Дэвидсона [28], Чандры [24], а также в статье Фазекаша и Клесова [32]. Результаты об усиленном законе больших чисел для стационарных, квазистационарных, а также родственных им классов случайных величин содержатся в работах Гапошкина [2]–[4], Лионса [38], Морица [43], [44], Петрова [13], Серфлинга [50], Сунга [53], Ху, Розальского и Володина [34], Ху и Вебера [35], Левенталя, Салехи и Чобаняна [7], [26], Ськова [22]. Результаты об усиленном законе больших чисел для последовательностей случайных величин без предположения о каком либо типе зависимости (в формулировках теорем используются только условия, налагаемые на моменты случайных величин и их сумм) содержатся в работах Петрова [17]–[21].

Одним из основных подходов к установлению усиленного закона больших чисел является метод подпоследовательностей, который заключается в следующем: на первом шаге требуемый результат доказывается для некоторой подпоследовательности исходной последовательности случайных величин. На втором (заключительном) шаге результат, полученный для подпоследовательности, обобщается на всю исходную последовательность. Обычно на втором шаге основным инструментом является максимальное неравенство, которому удовлетворяют случайные величины последовательности.

Отметим также эффективный метод доказательства усиленного закона больших чисел для зависимых случайных величин, разработанный Этемади [29]–[31]. Подход Этемади основан на методе подпоследовательностей, однако позволяет обойтись без использования максимальных неравенств.

Метод Этемади, а также классический метод подпоследовательностей (предполагающий использование максимальных неравенств) являются основными инструментами, используемыми в настоящей диссертации.

Классическими результатами об усиленном законе больших чисел являются следующие теоремы Колмогорова [6]:

Теорема A. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность независимых случайных величин с конечными дисперсиями* DX_n, $n \geqslant 1$. *Если выполнено условие*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} < \infty, \tag{1.1}$$

то имеет место соотношение

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{1.2}$$

Теорема B. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин такая, что* $E|X_1| < \infty$. *Тогда*

$$\frac{S_n}{n} \to EX_1 \qquad \text{п.н.} \tag{1.3}$$

Известно [6], что условие (1.1) является оптимальным в том смысле, что если $\{\sigma_n^2\}_{n=1}^\infty$ — последовательность положительных чисел такая, что $\sum_{n=1}^\infty \sigma_n^2/n^2 = \infty$, то существует последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $DX_n = \sigma_n^2$, $n \geqslant 1$, но соотношение (1.2) выполнено не будет. Тем не менее, теорема А может быть обобщена на некоторые классы зависимых случайных величин без введения дополнительных предположений.

В работе Фазекаша и Клесова [32] доказан следующий результат:

Лемма 1.1. *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность случайных величин, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ — неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность неотрицательных чисел. Предположим, что для любого $n \geqslant 1$ и некоторого $r > 0$ выполнены условия*

$$E\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j|\right)^r \leqslant \sum_{k=1}^n b_k$$

и

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{b_n}{a_n^r} < \infty.$$

Тогда

$$\frac{S_n}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{1.4}$$

Из этой леммы следует, что если $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность случайных величин с конечными дисперсиями DX_n, $n \geqslant 1$, которая удовлетворяет неравенству

$$E\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n} |S_j - ES_j|\right)^2 \leqslant C \sum_{k=1}^n DX_k \qquad \text{для всех } n \geqslant 1, \tag{1.5}$$

где C — некоторая постоянная, то условие (1.1) является достаточным для того чтобы выполнялось (1.2). Таким образом, один из возможных подходов к установлению применимости усиленного закона больших чисел к последовательности случайных величин (с конечными дисперсиями), связанных определенным типом зависимости — это доказательство неравенства (1.5) для данного класса зависимых случайных величин.

В настоящее время установлено, что неравенства (1.5) имеет место для некоторых классов зависимых случайных величин, в частности, для мартингалов (см. [5]), а также, как установлено Матулой [40], для отрицательно ассоциированных случайных величин. Отметим, что в настоящее время максимальные неравенства являются одной из обширных и интенсивно развивающихся областей теории вероятностей.

В работе Черге, Тандори и Тотика [27] показано, что в теореме А нельзя заменить условие взаимной независимости случайных величин условием их попарной независимости без введения дополнительных предположений.

Одной из основных задач настоящей диссертации является получение результатов об усиленном законе больших чисел для различных классов зависимых случайных величин, включающих в себя класс попарно независимых случайных величин.

Результатом, который играет ключевую роль в доказательствах теорем настоящей диссертации является следующее максимальное неравенство Серфлинга [49]:

Лемма 1.2. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность случайных величин с конечными моментами второго порядка. Обозначим через* $F_{a,n}$ *функцию распределения случайного вектора* $(X_{a+1}, \dots, X_{a+n})$, $a \geqslant 0$, $n \geqslant 1$. *Пусть* $g(F_{a,n})$ *— некоторый функционал на* $\{F_{a,n}:\ a \geqslant 0,\ n \geqslant 1\}$ *такой, что*

$$g(F_{a,k}) + g(F_{a+k,m}) \leqslant g(F_{a,k+m}) \qquad \text{для всех } a \geqslant 0,\ 1 \leqslant k < k+m. \tag{1.6}$$

Если выполнено условие

$$E(\sum_{i=a+1}^{a+n} X_i)^2 \leqslant g(F_{a,n}) \qquad \text{\textit{для всех} } a \geqslant 0,\ n \geqslant 1, \tag{1.7}$$

то

$$E\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{i=a+1}^{a+j} X_i\right|\right)^2 \leqslant \left(\frac{\log(2n)}{\log 2}\right)^2 g(F_{a,n}) \qquad \text{\textit{для всех} } a \geqslant 0,\ n \geqslant 1.$$

Это неравенство является обобщением классического неравенства Меньшова-Радемахера (см., например, [5]). Применение неравенства Серфлинга позволяет получать результаты об усиленном законе больших чисел для достаточно широкого класса зависимых случайных величин.

Прежде чем переходить к описанию результатов работы, введем необходимые определения.

Следуя [12], будем использовать обозначение Ψ_c для множества функций $\psi(x)$ таких, что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0 и ряд $\sum \frac{1}{n\psi(n)}$ сходится. Значение x_0 не предполагается одним и тем же для различных функций ψ. Если в этом определении заменим слово “сходится” словом “расходится”, то мы получим определение класса функций Ψ_d. Примерами функций класса Ψ_c являются функции x^δ и $(\log x)^{1+\delta}$ при любом $\delta > 0$. Функции $\log x$ и $\log\log x$ принадлежат классу Ψ_d.

Результаты диссертации

Диссертация состоит, помимо Введения, из четырех параграфов и списка литературы.

В **параграфе 2** рассматриваются последовательности случайных величин с конечными моментами второго порядка.

Классическая теорема теорема Меньшова-Радемахера (см., например, [5]) утверждает, что если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ортогональных случайных величин и

$$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2 \log^2 n < \infty,$$

то

$$\text{ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_n \quad \text{сходится п.н.;}$$

если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ортогональных случайных величин, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EX_n^2}{a_n^2} \log^2 n < \infty,$$

то имеет место соотношение (1.4).

В параграфе 2 настоящей работы приведено обобщение теоремы Меньшова-Радемахера на широкий класс зависимых случайных величин, включающий в себя класс случайных величин, удовлетворяющих условию $EX_iX_j \leqslant 0$ для всех $i \neq j$.

В.В.Петровым в работе [15] найдены другие достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям ортогональных случайных величин.

Теорема С (Петров)**.** *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ортогональных случайных величин. Если*

$$ES_n^2 = O\left(\frac{n^2}{\psi(n) \log^2 n}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c, \tag{1.8}$$

то

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \qquad \text{п.н.}$$

Мы обобщаем теорему С на случай произвольной нормирующей последовательности, а также на широкий класс зависимых случайных величин, включающий в себя класс случайных величин, удовлетворяющих условию $EX_iX_j \geqslant 0$ для всех i, j. Кроме того, показана оптимальность полученного результата.

Приведем следующий результат, полученный Петровым [11] (см. также [12]).

Теорема D (Петров). *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность независимых случайных величин, удовлетворяющая условию*

$$DS_n = O\left(\frac{n^2}{\psi(n)}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c. \tag{1.9}$$

Тогда имеет место соотношение (1.2).

Условие (1.9) нельзя ослабить, потребовав вместо него выполнение, содержащегося в (1.9) равенства для некоторой функции $\psi \in \Psi_d$. Как показано в [12], для любой функции $\psi \in \Psi_d$ такой, что $n/\psi(n)$ не убывает в области $n > n_0$ при некотором n_0, существует последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ с конечными дисперсиями, для которой $DS_n = O(n^2/\psi(n))$ выполнено, но соотношение (1.2) не имеет места. В [17] показано, что при некоторых дополнительных предположениях условие (1.9) достаточно для применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям случайных величин без каких-либо предположений о независимости.

В параграфе 2 настоящей работы приведено обобщение теоремы D на случай произвольной нормирующей последовательности. Также установлена связь между условиями (1.9) и (1.1) в случае независимых случайных величин.

Кроме того, в параграфе 2 приведены теоремы об усиленном законе больших чисел, а также о сильной устойчивости сумм случайных величин, обобщающие некоторые результаты Этемади [30], [31]. Также приведен новый результат, содержащий достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям зависимых случайных величин.

В **параграфе 3** рассматриваются последовательности случайных величин с конечными моментами порядка p, где $1 < p < 2$.

Классическим результатом является следующая теорема Марцинкевича-Зигмунда (см., например, [8]):

Теорема E. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Предположим, что* $E|X_1|^p < \infty$ *при некотором положительном* $p < 2$. *Тогда*

$$\frac{S_n - nb}{n^{1/p}} \to 0 \qquad \textit{п.н.},$$

где $b = 0$ в случае $0 < p < 1$ и $b = EX_1$ в случае $1 \leqslant p < 2$. Эта теорема обобщает теорему Колмогорова (теорема B), соответствующую случаю $p = 1$.

Существуют различные обобщения теоремы E как на последовательности зависимых, так и на последовательности неодинаково распределенных случайных величин. Так, Сойером [48] было показано, что в случае $0 < p < 1$ условие независимости в теореме E можно опустить. Этемади [29] показал, что в случае $p = 1$ условие взаимной независимости в теореме E можно ослабить до условия попарной независимости.

В настоящее время остается открытым вопрос, можно ли в теореме Марцинкевича-Зигмунда (теорема E) условие взаимной независимости случайных величин ослабить до условия попарной независимости в случае $1 < p < 2$. Тем не менее, в этом случае, при введении дополнительных предположений, можно получить результаты, применимые к последовательностям попарно независимых случайных величин. Результаты такого типа, а также некоторые смежные результаты приведены в работах Мартикайнена [9], [39], Сунга [52], Ву [55].

Заметим, что большинство результатов, содержащих различные обобщения теоремы Марцинкевича-Зигмунда (теорема E) применимы только к последовательностям одинаково распределенных случайных величин.

В параграфе 3 настоящей работы приведены достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел в форме

$$\frac{S_n}{n^{1/p} \log n} \to 0 \qquad \text{п.н.}$$

к последовательностям попарно независимых неодинаково распределенных случайных величин с конечными моментами порядка p, где $1 < p < 2$.

В параграфе 3 также содержится результат, являющийся обобщением классической теоремы Марцинкевича-Зигмунда для независимых случайных величин на случай неодинаково распределенных случайных величин.

В доказательствах теорем использованы методы, развитые в работах Чандры и др. [23], [25], [24].

В **параграфе 4** рассматриваются последовательности случайных величин с конечными моментами первого порядка.

Следующий результат Этемади [29] является обобщением теоремы Колмогорова об усиленном законе больших чисел для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин (теорема B) на случай последовательности попарно независимых случайных величин.

Теорема F. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин такая, что* $E|X_1| < \infty$*. Тогда имеет место соотношение* (1.3).

Существуют различные обобщения теоремы Колмогорова-Этемади (теорема F) как на последовательности случайных величин с более общим типом зависимости, чем попарная независимость, так и на последовательности неодинаково распределенных случайных величин. Так, Матула [41] обобщил теорему Колмогорова-Этемади на широкий класс зависимых случайных величин, включающий в себя класс попарно независимых случайных величин.

Бозе и Чандра [23] (см. также [24]) обобщили теорему Колмогорова-Этемади на случай неодинаково распределенных случайных величин. Ими был получен следующий результат:

Теорема G (Бозе, Чандра)**.** *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность попарно независимых случайных величин, удовлетворяющая условиям*

$$\int_0^{\infty} G(x)\,dx < \infty, \qquad \text{где } G(x) = \sup_{n\geqslant 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > x)}{n}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n) < \infty.$$

Тогда имеет место соотношение (1.2).

Основным результатом параграфа 4 является обобщение теоремы G на случай произвольной нормирующей последовательности. Кроме того, получен результат, содержащий достаточные условия для сильной устойчивости сумм зависимых неодинаково распределенных случайных величин с конечными моментами первого порядка.

В **параграфе 5** рассматриваются последовательности случайных величин без предположения о существовании моментов первого порядка. Основным результатом этого параграфа является теорема, содержащая достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел в форме (1.4) к последовательности неодинаково распределенных случайных величин с конечными моментами порядка p, где $0 < p < 1$. Эта теорема является обобщением теоремы Марцинкевича-Зигмунда (теорема E) для случая $0 < p < 1$. Другие условия, достаточные для (1.4), приведены в работах Петрова [47], Мартикайнена и Петрова [10], Круглова [36]. Основной результат параграфа 5 не является обобщением результатов указанных работ (мы предполагаем существование моментов порядка p для некоторого положительного $p < 1$ у случайных величин рассматриваемой последовательности — требование, отсутствующее в [47], [10] и [36]). Тем не менее, в отличие от теорем, содержащихся в указанных работах, наш результат применим к последовательностям неодинаково распределенных случайных величин.

Результаты диссертации докладывались автором на Шестнадцатой Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (Санкт-Петербург, 19–24 мая 2009 г.), на Шестом международном симпозиуме по статистическому моделированию (Санкт-Петербург, 28 июня – 4 июля 2009 г.), на Третьем Северном трехстороннем (финско-шведско-российском) семинаре (Санкт-Петербург, 11–13 апреля 2011 г.), на Двадцатой Всероссийской школе-коллоквиуме по стохастическим методам (Йошкар-Ола, 12–18 мая 2013 г.) и на Санкт-Петербургском городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике под руководством академика РАН И.А.Ибрагимова (в октябре 2013 г.) Они опубликованы в шести работах [56]–[61].

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения и четырех параграфов.
Общий объем диссертации составляет 70 страниц. Список литературы содержит 61 наименование.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору Валентину Владимировичу Петрову за постановку интересных задач, за постоянное внимание и поддержку. Также автор благодарен всему коллективу Петербургской вероятностной школы за создание благоприятной научной атмосферы.

Обозначения

Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность случайных величин.

Положим $S_{a,n} = \sum\limits_{i=a+1}^{a+n} X_i$, $a \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, $S_n = S_{0,n} = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $n \geqslant 1$,

$M_{a,n} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \left| \sum\limits_{i=a+1}^{a+k} X_i \right|$, $a \geqslant 0$, $n \geqslant 1$.

Если X — случайная величина, то $X^+ = max\{0, X\}$, $X^- = max\{0, -X\}$.

$DX = E(X - EX)^2$ — дисперсия случайной величины X.

$\log x = \log_2 x$, $x > 0$.

Для функций $f(n)$ и $g(n)$, $n \geqslant 1$ запись $f \asymp g \ (n \to \infty)$ означает, что

$$0 < \liminf_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty.$$

На протяжении всей работы $C, C_0, C_1, C_2, \ldots$ — некоторые постоянные.

Вспомогательные результаты

В этом разделе мы сформулируем некоторые вспомогательные результаты, которые будем использовать в дальнейшем.

Лемма 1.3 (Мориц [42]). *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность случайных величин такая, что*

$$ES_{a,n}^2 \leqslant C_0 \left(\sum_{i=a+1}^{a+n} EX_i^2 \right)^{\alpha} \qquad \text{для всех } a \geqslant 0, \ \ n \geqslant 1$$

и некоторой постоянной $\alpha > 1$. Тогда

$$EM_{a,n}^2 \leqslant C_1 \left(\sum_{i=a+1}^{a+n} EX_i^2 \right)^{\alpha} \qquad \text{для всех } a \geqslant 0, \ \ n \geqslant 1.$$

Лемма 1.4 (см., например, [24]). *Если Z — неотрицательная случайная величина и $a > 0$, то имеет место неравенство*

$$E(Z\mathbb{I}_{\{Z \leqslant a\}}) \leqslant \int_0^a P(Z > x)\,dx.$$

Лемма 1.5 (см., например, [24]). *Если Z — неотрицательная случайная величина и $a > 0$, то имеет место равенство*

$$E(Z\mathbb{I}_{\{Z > a\}}) = aP(Z > a) + \int_a^\infty P(Z > x)\,dx.$$

Лемма 1.6 (см. [17]). *Если $\psi(x) \in \Psi_c$, то ряд $\sum 1/\psi(b^n)$ сходится для любого $b > 1$.*

(Определение класса Ψ_c см. на стр. 7).

Следующая лемма является следствием одного результата Чандры и Госвами [25] (см. также [24]).

Лемма 1.7. *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность неотрицательных случайных величин, $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ — неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел. Пусть выполнены условия*

$$DS_n \leqslant C\sum_{k=1}^n DX_k \qquad \text{для всех } n \geqslant 1, \tag{1.10}$$

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{DX_n}{a_n^2} < \infty, \tag{1.11}$$

$$ES_n \leqslant C \cdot a_n \qquad \text{для всех } n \geqslant 1. \tag{1.12}$$

Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.}$$

Лемма 1.8 (лемма Кронекера). *Если $a_n \uparrow \infty$ и ряд $\sum_{n=1}^\infty x_n$ сходится, то $\frac{1}{a_n}\sum\limits_{k=1}^n a_k x_k \to 0$.*

Лемма 1.9 (см., например, [28]). *Если X — неотрицательная случайная величина и $EX^p < \infty$, то имеет место равенство*

$$EX^p = p \int_0^\infty x^{p-1} P(X > x)\, dx.$$

Лемма 1.10 (неравенство Колмогорова). *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями. Тогда для любого $\varepsilon > 0$*

$$P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| > \varepsilon) \leqslant \frac{\sum_{k=1}^n DX_k}{\varepsilon^2}.$$

§ 2. Усиленный закон больших чисел для последовательностей случайных величин с конечными моментами второго порядка

В этом параграфе мы будем рассматривать последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ с конечными моментами второго порядка.

Теорема 2.1. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность случайных величин, удовлетворяющая условиям*

$$ES_{a,n}^2 \leqslant C \sum_{i=a+1}^{a+n} EX_i^2 \qquad \text{для } n \geqslant 1 \text{ и всех достаточно больших } a \tag{2.1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2 \log^2 n < \infty. \tag{2.2}$$

Тогда

$$\text{ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_n \quad \text{сходится п.н.} \tag{2.3}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что условие (2.1) выполнено для всех $a \geqslant 0$. Из условий (2.1) и (2.2) следует, что для $m > n$

$$E(S_m - S_n)^2 = ES_{n,m-n}^2 \leqslant C \sum_{i=n+1}^{m} EX_i^2 \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Таким образом, S_n является последовательностью Коши в L_2. В силу полноты L_2, существует случайная величина S, определенная на том же вероятностном пространстве, что и исходная последовательность, такая, что $ES^2 < \infty$ и $E(S_n - S)^2 \to 0$ $(n \to \infty)$. Имеем

$$E(S-S_{2^n})^2=\lim_{m\to\infty}E(S_m-S_{2^n})^2\leqslant\lim_{m\to\infty}C\sum_{i=2^n+1}^{m}EX_i^2=C\sum_{i=2^n+1}^{\infty}EX_i^2.$$

Отсюда, учитывая (2.2), получаем, что для любого $\varepsilon>0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(|S-S_{2^n}|>\varepsilon)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(S-S_{2^n})^2}{\varepsilon^2}\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2^n+1}^{\infty}EX_i^2=$$
$$=\frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2^n+1}^{\infty}EX_i^2\log^2 i\frac{1}{\log^2 i}\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2^n+1}^{\infty}EX_i^2\log^2 i\frac{1}{\log^2(2^n)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log^2(2^n)}\sum_{i=2^n+1}^{\infty}EX_i^2\log^2 i\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\log^2(2^n)}\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty. \quad (2.4)$$

Из (2.4) и леммы Бореля-Кантелли следует, что

$$S_{2^n}\to S \qquad \text{п.н.}$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}|S_k-S_{2^n}|=0 \qquad \text{п.н.} \quad (2.5)$$

Положим

$$g(F_{a,n})=C\sum_{i=a+1}^{a+n}EX_i^2, \qquad a\geqslant 0,\ n\geqslant 1,$$

где C — постоянная из условия (2.1). Тогда выполнены соотношения (1.6) и (1.7) и в силу леммы 1.2 для любого $\varepsilon>0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}|S_k-S_{2^n}|>\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}E(\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}|S_k-S_{2^n}|)^2=$$
$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}E(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}|\sum_{i=2^n+1}^{2^n+k}X_i|)^2\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\log^2(2\cdot 2^n)\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}}EX_i^2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}}EX_i^2\log^2 i\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty}EX_i^2\log^2 i<\infty.$$

Таким образом, в силу леммы Бореля-Кантелли (2.5) выполнено. Теорема доказана. □

Замечание 2.2. *Если случайные величины* $X_1, X_2, \ldots$ *удовлетворяют условию*

$$EX_iX_j \leqslant 0 \qquad \textit{для всех } i \neq j, \tag{2.6}$$

то они удовлетворяют условию (2.1).

Учитывая это замечание, в качестве следствия теоремы 2.1 получаем следующий результат.

Следствие 2.3. *Если* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность случайных величин, удовлетворяющая условиям* (2.6) *и* (2.2)*, то имеет место соотношение* (2.3).

Теорема 2.4. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность случайных величин. Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$1 < q \leqslant \frac{a_{2n}}{a_n} \leqslant Q \qquad \textit{для всех достаточно больших } n, \tag{2.7}$$

где q *и* Q *— некоторые постоянные. Если выполнены условия* (2.1) *и*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EX_n^2}{a_n^2} \log^2 n < \infty, \tag{2.8}$$

то

$$\frac{S_n}{a_n} \to 0 \qquad \textit{п.н.} \tag{2.9}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что условие (2.1) выполнено для всех $a \geqslant 0$, а условие (2.7) — для всех $n \geqslant 1$. В силу неравенства Чебышева для любого $\varepsilon > 0$, учитывая (2.7) и (2.8) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ES_{2^n}^2}{a_{2^n}^2} \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{2^n} EX_i^2}{a_{2^n}^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty} EX_i^2 \sum_{n=[\log i]+1}^{\infty}\frac{1}{a_{2^n}^2} \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty} EX_i^2\frac{1}{a_i^2} < \infty.$$

Применение леммы Бореля-Кантелли приводит к соотношению

$$\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}} \to 0 \qquad \text{п.н.}$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_k}{a_k}\right| = 0 \qquad \text{п.н.}$$

Имеем

$$\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_k}{a_k}\right| = \max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_k - S_{2^n} + S_{2^n}}{a_k}\right| =$$

$$= \max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\frac{a_{2^n}}{a_k} + \frac{S_{2^n,k-2^n}}{a_{2^{n+1}}}\frac{a_{2^{n+1}}}{a_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\right| + \max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\frac{S_{2^n,k}}{a_{2^{n+1}}}\right|\frac{a_{2^{n+1}}}{a_{2^n}} \quad (2.10)$$

Первое слагаемое в правой части (2.10) сходится к нулю п.н. и, учитывая (2.7), нам достаточно доказать соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\frac{S_{2^n,k}}{a_{2^{n+1}}}\right| = 0 \qquad \text{п.н.} \tag{2.11}$$

Положим

$$g(F_{a,n}) = C\sum_{i=a+1}^{a+n} EX_i^2, \qquad a \geqslant 0,\ n \geqslant 1,$$

где C — постоянная из условия (2.1). Тогда выполнены соотношения (1.6) и (1.7), таким образом, в силу леммы 1.2 и условия (2.8) для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\frac{S_{2^n,k}}{a_{2^{n+1}}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 2^n}|S_{2^n,k}|)^2}{a_{2^{n+1}}^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^2(2\cdot 2^n)\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} EX_i^2}{a_{2^{n+1}}^2} \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=2^n+1}^{2^{n+1}} EX_i^2\log^2 i}{a_{2^{n+1}}^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{i=3}^{\infty} EX_i^2\log^2 i\frac{1}{a_i^2} < \infty. \quad (2.12)$$

Из соотношения (2.12) и леммы Бореля-Кантелли следует (2.11). Теорема доказана. □

Приведем еще одно следствие теоремы 2.1.

Следствие 2.5. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность случайных величин, удовлетворяющая условию* (2.6), $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел. Если выполнено* (2.8), *то имеет место соотношение* (2.9).

Доказательство. Если последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2.6), то этому же условию удовлетворяет последовательность случайных величин $\{X_n/a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Поскольку выполнено условие (2.8), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} X_n/a_n$ сходится п.н. в силу следствия 2.3. Применение леммы Кронекера (лемма 1.8) приводит к соотношению (2.9). □

Замечание 2.6. *Следствие 2.5 показывает, что если в теореме 2.4 условие* (2.1) *заменить более ограничительным условием* (2.6), *то условие* (2.7) *может быть опущено.*

Теорема 2.7. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность случайных величин. Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\frac{a_{2n}}{a_n} \leqslant Q \qquad \text{для всех достаточно больших } n, \quad (2.13)$$

где Q — некоторая постоянная. Если выполнены условия

$$ES^2_{a,k} + ES^2_{a+k,m} \leqslant ES^2_{a,k+m}$$

$$\text{для } 1 \leqslant k < k+m \text{ и всех достаточно больших } a \qquad (2.14)$$

и

$$ES^2_n = O\left(\frac{a^2_n}{\psi(n)\log^2 n}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c \qquad (2.15)$$

(определение класса Ψ_c см. на стр. 7), то имеет место соотношение (2.9).

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что условие (2.14) выполнено для всех $a \geqslant 0$. В силу условия (2.15) и неравенства Чебышева для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ES^2_{2^n}}{a^2_{2^n}} \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^2_{2^n}}{a^2_{2^n}\psi(2^n)\log^2(2^n)} < \infty,$$

Применение леммы Бореля-Кантелли приводит к соотношению

$$\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}} \to 0 \qquad \text{п.н.}$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_k}{a_k}\right| = 0 \qquad \text{п.н.}$$

Имеем

$$\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_k}{a_k}\right| = \max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_k - S_{2^n} + S_{2^n}}{a_k}\right| =$$

$$= \max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\frac{a_{2^n}}{a_k} + \frac{S_{2^n,k-2^n}}{a_{2^{n+1}}}\frac{a_{2^{n+1}}}{a_k}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\right| + \max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\frac{S_{2^n,k}}{a_{2^{n+1}}}\right|\frac{a_{2^{n+1}}}{a_{2^n}} \qquad (2.16)$$

Первое слагаемое в правой части (2.16) сходится к нулю п.н. и, учитывая (2.13), нам достаточно доказать соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \max_{1\leqslant k\leqslant 2^n} \left|\frac{S_{2^n,k}}{a_{2^{n+1}}}\right| = 0 \qquad \text{п.н.} \tag{2.17}$$

Положим

$$g(F_{a,n}) = ES^2_{a,n}, \qquad a \geqslant 0,\ n \geqslant 1.$$

Тогда выполнены соотношения (1.6) и (1.7), таким образом, в силу леммы 1.2 и условия (2.14) для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\frac{S_{2^n,k}}{a_{2^{n+1}}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E(\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 2^n}|S_{2^n,k}|)^2}{a^2_{2^{n+1}}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^2(2\cdot 2^n)ES^2_{2^n,2^n}}{a^2_{2^{n+1}}} \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^2(2^{n+1})(ES^2_{2^n}+ES^2_{2^n,2^n})}{a^2_{2^{n+1}}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^2(2^{n+1})ES^2_{2^{n+1}}}{a^2_{2^{n+1}}} \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\log^2(2^n)a^2_{2^n}}{a^2_{2^n}\psi(2^n)\log^2(2^n)} = \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\psi(2^n)} < \infty. \tag{2.18}$$

Ряд в правой части (2.18) сходится в силу леммы 1.6. Таким образом, (2.17) выполнено. Теорема доказана. □

Замечание 2.8. *Если случайные величины* $X_1, X_2, \ldots$ *удовлетворяют условию*

$$EX_iX_j \geqslant 0 \qquad \text{для всех } i, j, \tag{2.19}$$

то они удовлетворяют условию (2.14).

Следствие 2.9. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность случайных величин, удовлетворяющая условию* (2.19), $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* (2.13). *Если выполнено* (2.15), *то имеет место соотношение* (2.9).

Следствие 2.10. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность ортогональных случайных величин,* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* (2.13). *Если выполнено* (2.15), *то имеет место соотношение* (2.9).

Как было указано во Введении, если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, то каждое из следующих условий

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^2} < \infty \tag{2.20}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} DX_k = O\left(\frac{n^2}{\psi(n)}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c \tag{2.21}$$

является достаточным для выполнения соотношения

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{2.22}$$

Далее, если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ортогональных случайных величин, то каждое из следующих условий

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{EX_n^2}{n^2} \log^2 n < \infty \tag{2.23}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} EX_k^2 = O\left(\frac{n^2}{\psi(n) \log^2 n}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c \tag{2.24}$$

является достаточным для выполнения соотношения

$$\frac{S_n}{n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{2.25}$$

Ниже мы установим связь между условиями (2.20) и (2.21), а также между условиями (2.23) и (2.24).

Прежде чем сформулировать соответствующие результаты докажем две леммы, полученные в работе [59].

Лемма 2.11 ([59]). *Пусть $b_1, b_2, \ldots$ — последовательность положительных чисел. Для того чтобы было выполнено соотношение*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} < \infty, \tag{2.26}$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала положительная функция $f(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, такая, что

$$f(n) \to \infty \ \ (n \to \infty), \tag{2.27}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nf(n)} < \infty, \tag{2.28}$$

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{n^2}{f(n)} \qquad \text{для любого } n \geqslant 1. \tag{2.29}$$

Доказательство. Сначала докажем достаточность. Пусть существует положительная функция $f(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, такая, что выполнены соотношения (2.27), (2.28) и (2.29). Из соотношения (2.29) следует, что

$$b_n = \frac{n^2}{f(n)} - \frac{(n-1)^2}{f(n-1)}.$$

Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{n^2}{f(n)} - \frac{(n-1)^2}{f(n-1)}}{n^2} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n-1)} + \frac{2}{nf(n-1)} - \frac{1}{n^2 f(n-1)}\right) = T_1 + T_2 - T_3, \tag{2.30}$$

где

$$T_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n-1)}\right),$$

$$T_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{nf(n-1)},$$

$$T_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 f(n-1)}.$$

Из (2.27) и (2.28) следует, что все три ряда T_1, T_2 и T_3 сходятся, поэтому имеет место (2.26).

Теперь докажем необходимость. Пусть выполнено условие (2.26). Определим функцию $f(n)$ равенствами

$$f(n) = \frac{n^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k} \qquad (n \geqslant 1), \qquad f(0) = 1. \tag{2.31}$$

Таким образом, $f(n)$ — положительная функция такая, что выполнено равенство (2.29). Из (2.26) и леммы Кронекера (лемма 1.8) получаем соотношение (2.27). Учитывая (2.26), (2.27), (2.29) и (2.30), приходим к утверждению о сходимости рядов T_1, T_3 и T_2. Отсюда следует (2.28). Лемма доказана. □

Лемма 2.12 ([59])**.** *Пусть $b_1, b_2, \ldots$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = O\left(\frac{n^2}{\psi(n)}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c. \tag{2.32}$$

Тогда имеет место соотношение (2.26).

Доказательство. Определим функцию $f(n)$ равенствами (2.31). Эта положительная функция удовлетворяет равенству (2.29). Из (2.32) и (2.29) следует, что

$$\frac{n^2}{f(n)} = O\left(\frac{n^2}{\psi(n)}\right), \qquad \frac{\psi(n)}{f(n)} = O(1) \qquad (n \to \infty).$$

Отсюда следуют (2.27) и (2.28). Таким образом, в силу леммы 2.11, соотношение (2.26) выполнено. Лемма доказана. □

Теорема 2.13. *Пусть $b_1, b_2, \ldots$ — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = O\left(\frac{n^2}{\psi(n)g(n)}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c, \tag{2.33}$$

где $g(n)$ — некоторая функция такая, что

$$g(n) \text{ положительна и не убывает в области } n > N \tag{2.34}$$

для некоторого $N \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^2} g(n) < \infty. \tag{2.35}$$

Доказательство. В силу условия (2.34) для достаточно больших n имеем

$$\sum_{k=1}^{n} b_k g(k) \leqslant C \sum_{k=1}^{n} b_k g(n).$$

Отсюда, с учетом (2.33), получаем

$$\sum_{k=1}^{n} b_k g(k) = O\biggl(\frac{n^2}{\psi(n)}\biggr).$$

Таким образом, (2.35) выполнено в силу леммы 2.12. Теорема доказана. □

Теорема 2.14. *Пусть* $b_1, b_2, \ldots$ — *последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* (2.35) *с функцией* $g(n)$, *удовлетворяющей условию*

$$\frac{g(n)}{n} \text{ положительна и не возрастает в области } n > N \tag{2.36}$$

для некоторого $N \in \mathbb{N}$. *Если существует неубывающая функция* $\psi_0(x)$ *такая, что*

$$\psi_0(n) \asymp \frac{n^2}{(\sum_{k=1}^{n} b_k) g(n)} \qquad (n \to \infty), \tag{2.37}$$

то $\psi_0(x)$ *принадлежит классу* Ψ_c *и*

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = O\biggl(\frac{n^2}{\psi_0(n) g(n)}\biggr). \tag{2.38}$$

Доказательство. Если существует неубывающая функция $\psi_0(x)$, удовлетворяющая условию (2.37), то (2.38) очевидно выполнено, и нам нужно только показать, что

$$\psi_0 \in \Psi_c. \tag{2.39}$$

Пусть условие (2.36) выполнено при всех $n \geqslant N_0$ для некоторого $N_0 \in \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение функцию

$$f(n) = \frac{n^2}{(\sum_{k=1}^{n} b_k) g(n)}, \qquad n \geqslant N_0. \tag{2.40}$$

Для того чтобы доказать (2.39), учитывая (2.37) и (2.40), нам достаточно показать, что

$$f(n) \to \infty \qquad (n \to \infty) \tag{2.41}$$

и

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{nf(n)} < \infty. \tag{2.42}$$

Соотношение (2.41) следует из (2.35), (2.40) и леммы Кронекера, и нам остается только доказать (2.42). В силу (2.36) и (2.35) имеем

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{nf(n)} = \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k g(n)}{n^3} \leqslant C_1 + C \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{g(n)}{n^3} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 + C \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k \frac{g(k)}{k} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leqslant C_1 + C \sum_{k=N_0}^{\infty} b_k \frac{g(k)}{k} \cdot \frac{1}{k} < \infty.$$

Таким образом, (2.42) выполнено. Теорема доказана. □

Замечание 2.15. *Функции* $g(n) \equiv 1$ *и* $g(n) = \log^2 n$ *для всех* $n \geqslant 1$ *удовлетворяют условиям* (2.34) *и* (2.36).

Замечание 2.16. *Теоремы 2.13 и 2.14 с функцией* $g(n) \equiv 1$ *устанавливают связь между условиями* (2.20) *и* (2.21).

Замечание 2.17. *Теоремы 2.13 и 2.14 с функцией* $g(n) = \log^2 n$ *для всех* $n \geqslant 1$ *устанавливают связь между условиями* (2.23) *и* (2.24).

В качестве приложения теоремы 2.14 докажем оптимальность теоремы C (см. Введение). Покажем, что в теореме C нельзя заменить условие (1.8) более слабым условием

$$\sum_{k=1}^{n} EX_k^2 = O\left(\frac{n^2}{\psi(n)\log^2 n}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_d \tag{2.43}$$

(определение класса Ψ_d см. на стр. 7).

Введем в рассмотрение функцию

$$h(x) = \frac{x^2}{\psi(x)\log^2 x} \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_d. \tag{2.44}$$

Теорема 2.18. *Для любой функции* $\psi \in \Psi_d$ *такой, что*

$$h(n) \qquad \text{строго возрастает в области } n > N \tag{2.45}$$

и

$$h^2(n) \geqslant h(n-1)h(n+1) \qquad \text{для всех } n > N \tag{2.46}$$

при некотором $N \in \mathbb{N}$ *(здесь* $h(x)$*— функция, определенная соотношением* (2.44)*) существует последовательность ортогональных случайных величин, удовлетворяющая условию* (2.43)*, для которой*

$$\limsup \frac{|S_n|}{n} = \infty \qquad \text{п.н.} \tag{2.47}$$

Замечание 2.19. *Условие* (2.46) *может быть заменено условием*

$$\log h(x) \qquad \text{выпукла вверх в области } x > x_0 \tag{2.48}$$

для некоторого $x_0 > 0$. *Очевидно, что* (2.46) *следует из* (2.48) *(достаточно прологарифмировать неравенство* (2.46)*).*

Замечание 2.20. *Примерами функций из класса* Ψ_d*, удовлетворяющих условиям* (2.45) *и* (2.48)*, являются функции* $\log x$ *и* $\log x \log\log x$.

Доказательство теоремы 2.18. Пусть $\psi(x)$ — функция из класса Ψ_d, удовлетворяющая условиям (2.45) и (2.46) при всех $n \geqslant N_0$ для некоторого $N_0 \in \mathbb{N}$. Введем в рассмотрение числовую последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, заданную равенствами

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_{N_0} = \frac{N_0}{\psi(N_0)\log^2 N_0},$$

$$b_n = \frac{n^2}{\psi(n)\log^2 n} - \frac{(n-1)^2}{\psi(n-1)\log^2(n-1)} \qquad \text{для } n \geqslant N_0 + 1.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{n^2}{\psi(n)\log^2 n} \qquad \text{для всех } n \geqslant N_0. \tag{2.49}$$

Покажем, что

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{b_n}{n^2}\log^2 n = \infty. \tag{2.50}$$

Предположим противное, то есть ряд из (2.50) сходится. Учитывая (2.49) и применяя теорему 2.14 с $\psi_0(x) \equiv \psi(x)$ и с функцией $g(n) = \log^2 n$ для всех $n \geqslant 1$, приходим к заключению, что $\psi \in \Psi_c$. Полученное противоречие доказывает (2.50).

Заметим, что последовательность $\{h(n)/n^2\}$ не возрастает, начиная с номера N_0, поэтому

$$\frac{h(n+1)}{h(n)} \leqslant \frac{(n+1)^2}{n^2} \qquad \text{для всех } n \geqslant N_0. \tag{2.51}$$

Покажем, что последовательность $\{b_n/n^2\}$ не возрастает, начиная с номера N_0+1. Предположим противное, то есть найдется номер $N \geqslant N_0+1$ такой, что $b_{N+1}/(N+1)^2 > b_N/N^2$. Но тогда

$$\begin{aligned} 1 < \frac{b_{N+1}/(N+1)^2}{b_N/N^2} &= \frac{(h(N+1)-h(N))/(N+1)^2}{(h(N)-h(N-1))/N^2} = \\ &= \frac{h(N+1)-h(N)}{h(N)-h(N-1)} \cdot \frac{N^2}{(N+1)^2} = \\ &= \frac{h(N+1)(1-\frac{h(N)}{h(N+1)})}{h(N)(1-\frac{h(N-1)}{h(N)})} \cdot \frac{N^2}{(N+1)^2} \leqslant \frac{1-\frac{h(N)}{h(N+1)}}{1-\frac{h(N-1)}{h(N)}}. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Последнее неравенство в (2.52) выполнено в силу (2.51). Из (2.52) следует, что

$$h^2(N) < h(N-1)h(N+1).$$

Это противоречит условию (2.46). Таким образом, доказано, что последовательность $\{b_n/n^2\}$ не возрастает, начиная с номера N_0+1, и, следовательно, по теореме 2 работы [14] (см. также [54]) существует последовательность ортогональных случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $EX_n^2 = b_n$ и выполнено соотношение (2.47). Из (2.49) следует, что (2.43) также выполнено. Теорема доказана. $\square$

Следствие 2.21. *Существует последовательность ортогональных случайных величин* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$\sum_{k=1}^{n} EX_k^2 = O\biggl(\frac{n^2}{(\log n)^3 \log\log n}\biggr), \tag{2.53}$$

и выполнено соотношение (2.47).

Интересно сравнить следствие 2.21 со следующим результатом, являющимся следствием теоремы C (см. Введение).

Лемма 2.22. *Если $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность ортогональных случайных величин, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{n} EX_k^2 = O\left(\frac{n^2}{(\log n)^{3+\delta}}\right) \qquad \text{для некоторого } \delta > 0,$$

то имеет место соотношение (2.25).

Из теоремы 2.18 также следует, что в теореме 2.7 условие (2.15) не может быть заменено ни условием

$$ES_n^2 = O\left(\frac{a_n^2}{\psi(n)\log^{2-\delta} n}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c,$$

ни даже условием

$$ES_n^2 = O\left(\frac{a_n^2}{\psi(n)(\log n)^2(\log\log n)^{-\delta}}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c \tag{2.54}$$

и некоторого $\delta > 0$.

Действительно, в силу следствия 2.21 существует последовательность ортогональных случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяющая условию (2.53), для которой выполнено (2.47). Но тогда эта последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2.14) (в силу ортогональности) и условию (2.54) с $a_n = n$ для всех n и функцией $\psi(x) = \log x(\log\log x)^{1+\delta}$ принадлежащей классу Ψ_c.

Следующая теорема является обобщением теоремы D (см. Введение) на случай произвольной нормирующей последовательности.

Теорема 2.23. *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая неограниченная последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* (2.13). *Если выполнено соотношение*

$$DS_n = O\left(\frac{a_n^2}{\psi(n)}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c, \tag{2.55}$$

то

$$\frac{S_n - ES_n}{a_n} \to 0 \qquad \textit{п.н.} \tag{2.56}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $EX_n = 0$ для всех $n \geqslant 1$. В силу неравенства Чебышева для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ES_{2^n}^2}{a_{2^n}^2} =$$
$$= \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{2^n} EX_k^2}{a_{2^n}^2} \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2^n}^2}{a_{2^n}^2\psi(2^n)} < \infty. \tag{2.57}$$

Ряд в правой части (2.57) сходится в силу леммы 1.6. Применение леммы Бореля-Кантелли приводит к соотношению

$$\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}} \to 0 \qquad \text{п.н.}$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_k}{a_k}\right| = 0 \qquad \text{п.н.}$$

Имеем

$$\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_k}{a_k}\right| = \max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_k - S_{2^n} + S_{2^n}}{a_k}\right| =$$
$$= \max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\frac{a_{2^n}}{a_k} + \frac{S_{2^n,k-2^n}}{a_{2^{n+1}}}\frac{a_{2^{n+1}}}{a_k}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{S_{2^n}}{a_{2^n}}\right| + \max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\frac{S_{2^n,k}}{a_{2^{n+1}}}\right|\frac{a_{2^{n+1}}}{a_{2^n}} \tag{2.58}$$

Первое слагаемое в правой части (2.58) сходится к нулю п.н. и, учитывая (2.13), нам достаточно доказать соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\frac{S_{2^n,k}}{a_{2^{n+1}}}\right| = 0 \qquad \text{п.н.} \tag{2.59}$$

В силу неравенства Колмогорова (лемма 1.10) для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^n}\left|\frac{S_{2^n,k}}{a_{2^{n+1}}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} EX_k^2}{a_{2^{n+1}}^2} \leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{2^{n+1}} EX_k^2}{a_{2^{n+1}}^2} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_{2^n}^2}{a_{2^n}^2\psi(2^n)} = \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\psi(2^n)} < \infty. \quad (2.60)$$

Ряд в правой части (2.60) сходится в силу леммы 1.6. Таким образом, (2.59) выполнено. Теорема доказана. □

Следующий пример показывает, что в теореме 2.23 нельзя опустить условие (2.13).

Рассмотрим последовательность положительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $a_n = 2^{n/2}$, $n \geqslant 1$. Построим последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом. Для $n = 1$ или 2 случайная величина X_n принимает значения 1 и -1 с вероятностями, равными 1/2. Для $n \geqslant 3$

$$X_n = 2^{n/2}, \qquad \text{с вероятностью } \frac{n-2}{4n(n-1)},$$

$$X_n = -2^{n/2}, \qquad \text{с вероятностью } \frac{n-2}{4n(n-1)},$$

$$X_n = 0, \qquad \text{с вероятностью } 1 - \frac{n-2}{2n(n-1)}.$$

Тогда $EX_n = 0$ для всех $n \geqslant 1$, $DX_1 = DX_2 = 1$.

$$DX_n = 2\cdot 2^n\frac{n-2}{4n(n-1)} = \frac{2^{n-1}(n-2)}{n(n-1)} = \frac{2^n}{n} - \frac{2^{n-1}}{n-1} \qquad \text{для } n \geqslant 3.$$

Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} DX_k = \frac{2^n}{n} \qquad \text{для } n \geqslant 3.$$

Таким образом, построенная последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2.55) с $a_n = 2^{n/2}$, $n \geqslant 1$ и функцией $\psi(x) = x$, $x > 0$ (принадлежащей классу Ψ_c). Далее,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| = a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{2n(n-1)} = \infty.$$

Отсюда в силу леммы Бореля-Кантелли следует, что

$$P(|X_n| = a_n \ \text{ б.ч.}) = 1. \tag{2.61}$$

Заметим, что

$$\frac{X_n}{a_n} = \frac{S_n}{a_n} - \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{S_{n-1}}{a_{n-1}}. \tag{2.62}$$

Если теперь предположить, что выполнено (2.56), то в силу (2.62) должно выполняться соотношение

$$\frac{X_n}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.},$$

а это противоречит (2.61). Следовательно, соотношение (2.56) не имеет места.

Следующий результат является обобщением леммы 2.12.

Теорема 2.24. *Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — две последовательности положительных чисел, причем последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает. Пусть выполнено условие*

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = O\left(\frac{a_n^2}{\psi(n)}\right) \qquad \text{для некоторой функции } \psi \in \Psi_c. \tag{2.63}$$

Для того чтобы было выполнено соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{a_n^2} < \infty, \tag{2.64}$$

достаточно выполнения условия (2.13).

Замечание 2.25. *Лемма 2.12 следует из теоремы 2.24 при* $a_n = n$ *для всех* $n \geqslant 1$.

Доказательство теоремы 2.24. Предположим, что две последовательности положительных чисел $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям теоремы 2.24, но ряд из соотношения (2.64) расходится. Из условия (2.63) следует, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена. Тогда найдется последовательность независимых случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что $EX_n = 0$, $DX_n = b_n$ для всех $n \geqslant 1$, при этом соотношение (2.56) не имеет места (см., например, [12]). Но последовательность $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.23, поэтому (2.56) должно быть выполнено. Полученное противоречие доказывает теорему. □

Замечание 2.26. *В теореме 2.24 нельзя опустить условие* (2.13).

Действительно, пусть $b_1 = b_2 = 1$, $b_n = 2^n/n - 2^{n-1}/(n-1)$ для $n \geqslant 3$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{2^n}{n} \qquad \text{для } n \geqslant 3.$$

Таким образом, последовательность $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2.63) с $a_n = 2^{n/2}$, $n \geqslant 1$ и функцией $\psi(x) = x$, $x > 0$ (принадлежащей классу Ψ_c). Но соотношение (2.64) не имеет места, поскольку

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{b_n}{a_n^2} = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n/n - 2^{n-1}/(n-1)}{2^n} = \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2(n-1)} \right) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-2}{2n(n-1)} = \infty.$$

Теорема 2.27. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность неотрицательных случайных величин,* $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность положительных чисел. Положим* $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} w_k X_k$. *Пусть выполнены условия*

$$W_n \to \infty \qquad (n \to \infty),$$

$$DT_n \leqslant C \sum_{k=1}^{n} w_k^2 DX_k \qquad \text{для всех } n \geqslant 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n^2 DX_n}{W_n^2} < \infty$$

и

$$ET_n \leqslant C \cdot W_n \qquad \textit{для всех } n \geqslant 1.$$

Тогда

$$\frac{T_n - ET_n}{W_n} \to 0 \qquad \textit{п.н.} \tag{2.65}$$

Для доказательства теоремы 2.27 достаточно положить $a_n = W_n$, $n \geqslant 1$, $Y_k = w_k X_k$, $k \geqslant 1$ и применить к последовательности $\{Y_k\}_{n=1}^{\infty}$ лемму 1.7.

Замечание 2.28. *Теорема 2.27 обобщает теорему 5 из работы [58]. (В работе [58] эта теорема доказана в дополнительном предположении $w_n/W_n \to 0$ $(n \to \infty)$).*

Теорема 2.29. *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных случайных величин, удовлетворяющая условиям*

$$ES_n \to \infty \qquad (n \to \infty),$$

$$DS_n \leqslant C \sum_{k=1}^{n} DX_k \qquad \textit{для всех } n \geqslant 1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{(ES_n)^2} < \infty.$$

Тогда

$$\frac{S_n}{ES_n} \to 1 \qquad \textit{п.н.} \tag{2.66}$$

Для доказательства теоремы 2.29 достаточно положить $a_n = ES_n$, $n \geqslant 1$ и применить лемму 1.7.

Следствие 2.30. *Соотношение* (2.66) *выполнено для последовательности неотрицательных одинаково распределенных случайных величин* $X_1, X_2, \ldots$, *удовлетворяющих условиям* $EX_1 > 0$ *и* $DS_n \leqslant Cn$ *для всех* $n \geqslant 1$.

Замечание 2.31. *Теорема 2.29 обобщает теорему 6 из работы [58]. (В работе [58] эта теорема доказана в дополнительном предположении* $EX_n/ES_n \to 0$ $(n \to \infty)$*).*

Замечание 2.32. *Иные достаточные условия для соотношений* (2.65) *и* (2.66) *получены Этемади [31].*

Теорема 2.33. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность неотрицательных случайных величин. Пусть выполнены условия*

$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} Cov(X_i, X_j) \leqslant C \sum_{i,j=1}^{n} |EX_i - EX_j|, \tag{2.67}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sum_{i=1}^{j} |EX_i - EX_j|}{j^2} < \infty, \tag{2.68}$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} EX_k \leqslant C(n-m) \qquad \text{для всех достаточно больших } n-m, \tag{2.69}$$

и (2.20)*. Тогда имеет место соотношение* (2.22).

Доказательство. Пусть $b > 1$, $k_n = [b^n]$. В силу условий (2.67), (2.68), (2.20) и неравенства Чебышева для всякого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{S_{k_n}-ES_{k_n}}{k_n}\right|>\varepsilon\right)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{DS_{k_n}}{k_n^2}=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{k_n} DX_i+\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k_n} Cov(X_i,X_j)}{k_n^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k_n} DX_i+\sum_{j=1}^{k_n}\sum_{i=1}^{j}|EX_i-EX_j|}{k_n^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{DX_i}{i^2}+\frac{C_2}{\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{j}|EX_i-EX_j|}{j^2}<\infty.$$

Применение леммы Бореля-Кантелли приводит к соотношению

$$\frac{S_{k_n}-ES_{k_n}}{k_n}\to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{2.70}$$

Если $k_n\leqslant k<k_{n+1}$ то, с учетом неотрицательности случайных величин из исходной последовательности, получаем

$$\frac{S_k-ES_k}{k}\leqslant\frac{|S_{k_{n+1}}-ES_{k_{n+1}}|}{k_{n+1}}\cdot\frac{k_{n+1}}{k_n}+\frac{ES_{k_{n+1}}-ES_{k_n}}{k_n}, \tag{2.71}$$

$$\frac{S_k-ES_k}{k}\geqslant\frac{|S_{k_n}-ES_{k_n}|}{k_n}\cdot\frac{k_n}{k_{n+1}}-\frac{ES_{k_{n+1}}-ES_{k_n}}{k_{n+1}}. \tag{2.72}$$

Вследствие (2.70) первые слагаемые в правых частях (2.71) и (2.72) сходятся к нулю почти наверное. Второе слагаемое в правой части (2.71) при всех достаточно больших n не превосходит $C(k_{n+1}-k_n)/k_n$ в силу условия (2.69). Такая же оценка справедлива и для дроби во втором слагаемом (2.72), так как $k_n\leqslant k_{n+1}$. Поэтому

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{|S_k-ES_k|}{k}\leqslant C(b-1)\ \text{ п.н.}$$

Правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора числа b достаточно близким к 1. Отсюда следует соотношение (2.22). Теорема доказана. □

Теорема 2.33 обобщает следующий результат Этемади [30]:

Лемма 2.34. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность неотрицательных случайных величин. Пусть выполнены условия* (2.68), (2.20),

$$\sup_{n\geqslant 1} EX_n < \infty \tag{2.73}$$

и

$$EX_iX_j \leqslant EX_iEX_{j-i} \qquad \text{для всех } j > i \geqslant 1. \tag{2.74}$$

Тогда имеет место соотношение (2.22).

Действительно, если последовательность неотрицательных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ удовлетворяет условиям (2.73) и (2.74), то она также удовлетворяет условиям (2.67) и (2.69).

Теорема 2.35. *Пусть* $\{X_n\}$ *последовательность случайных величин, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^{p(2-\varepsilon)}} < \infty \tag{2.75}$$

для некоторых $0 < \varepsilon < 2$ *и* $p > 0$,

$$DS_{a,n} \leqslant C\left(\sum_{i=a+1}^{a+n} DX_i\right)^{\gamma} \qquad \text{для } n \geqslant 1 \text{ и всех достаточно больших } a \tag{2.76}$$

и некоторой постоянной γ *такой, что* $1 < \gamma < \frac{2p+1}{2p+1-p\varepsilon}$. *Тогда*

$$\frac{S_n - ES_n}{n^p} \to 0 \qquad \text{п.н.}$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что условие (2.76) выполнено для всех $a \geqslant 0$. Кроме того, не ограничивая общности, будем считать, что $EX_n = 0$ для всех $n \geqslant 1$.

Выберем (фиксированное) δ такое, что $\delta \geqslant p/(2p+1-\gamma(2p+1-p\varepsilon))$ и δ/p — целое число. Положим $k_n = n^{\delta/p}$. В силу (2.76) и неравенства Чебышева для любого $\lambda > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{S_{k_n}}{k_n^p}\right| \geqslant \lambda\right) \leqslant \frac{1}{\lambda^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ES_{k_n}^2}{k_n^{2p}} \leqslant \frac{C}{\lambda^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sum_{i=1}^{k_n} EX_i^2\right)^\gamma}{k_n^{2p}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\lambda^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k_n^{\gamma-1}\sum_{i=1}^{k_n}\left(EX_i^2\right)^\gamma}{k_n^{2p}} = \frac{C}{\lambda^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k_n}\left(EX_i^2\right)^\gamma}{k_n^{2p+1-\gamma}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(EX_i^2\right)^\gamma \sum_{n:k_n\geqslant i}\frac{1}{k_n^{2p+1-\gamma}} = \frac{C}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(EX_i^2\right)^\gamma \sum_{n:n^{\delta/p}\geqslant i}\frac{1}{n^{\delta/p(2p+1-\gamma)}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(EX_i^2\right)^\gamma \frac{1}{i^{(p/\delta)(\delta/p(2p+1-\gamma)-1)}} = \frac{C}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{\infty}\left(EX_i^2\right)^\gamma \frac{1}{i^{2p+1-\gamma-p/\delta}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(EX_i^2\right)^\gamma}{i^{2p+1-\gamma-(2p+1-\gamma(2p+1-p\varepsilon))}} \leqslant \frac{C}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\left(EX_i^2\right)^\gamma}{i^{\gamma(2p-p\varepsilon)}} < \infty. \quad (2.77)$$

Сходимость последнего ряда в правой части (2.77) следует из (2.75) и того, что $\gamma > 1$. Из (2.77) и леммы Бореля-Кантелли следует, что

$$\frac{S_{k_n}}{k_n^p} \to 0 \qquad \text{п.н.} \quad (2.78)$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{k_n<k\leqslant k_{n+1}}\left|\frac{S_k}{k^p}\right| = 0 \qquad \text{п.н.}$$

Имеем

$$\max_{k_n<k\leqslant k_{n+1}}\left|\frac{S_k}{k^p}\right| = \max_{k_n<k\leqslant k_{n+1}}\left|\frac{S_k - S_{k_n} + S_{k_n}}{k^p}\right| =$$
$$= \max_{k_n<k\leqslant k_{n+1}}\left|\frac{S_{k_n}}{k_n^p}\left(\frac{k_n}{k}\right)^p + \frac{S_{k_n,k-k_n}}{k_{n+1}^p}\left(\frac{k_{n+1}}{k}\right)^p\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{S_{k_n}}{k_n^p}\right| + \max_{k_n<k\leqslant k_{n+1}}\left|\frac{S_{k_n,k-k_n}}{k_{n+1}^p}\right|\left(\frac{k_{n+1}}{k_n}\right)^p \quad (2.79)$$

В силу (2.78) первое слагаемое в правой части (2.79) сходится к нулю п.н., и нам осталось показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{k_n<k\leqslant k_{n+1}} \left| \frac{S_{k_n,k-k_n}}{k_{n+1}^p} \right| = 0 \qquad \text{п.н.} \tag{2.80}$$

Из леммы 1.3 и неравенства Чебышева следует, что для любого $\lambda > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{k_n<k\leqslant k_{n+1}} \left| \frac{S_{k_n,k-k_n}}{k_{n+1}^p} \right| > \lambda \right) \leqslant \frac{C}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{EM^2_{k_n,k_{n+1}-k_n}}{k_{n+1}^{2p}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sum_{i=k_n+1}^{k_{n+1}} EX_i^2\right)^{\gamma}}{k_{n+1}^{2p}} \leqslant \frac{C}{\lambda^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^{k_{n+1}} EX_i^2\right)^{\gamma}}{k_{n+1}^{2p}} < \infty. \tag{2.81}$$

Сходимость ряда в правой части (2.81) следует из (2.77). Таким образом, в силу леммы Бореля-Кантелли, (2.80) выполнено. Теорема доказана. □

Если в теореме 2.35 положить $p = 1$, то мы получим следующий результат:

Следствие 2.36. *Пусть $\{X_n\}$ последовательность случайных величин, удовлетворяющая условиям*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{DX_n}{n^{2-\varepsilon}} < \infty$$

для некоторого $0 < \varepsilon < 2$,

$$DS_{a,n} \leqslant C \left(\sum_{i=a+1}^{a+n} DX_i \right)^{\gamma} \qquad \text{для } n \geqslant 1 \text{ и всех достаточно больших } a$$

и некоторой постоянной γ такой, что $1 < \gamma < \frac{3}{3-\varepsilon}$. Тогда имеет место соотношение (2.22).

§ 3. Усиленный закон больших чисел для последовательностей случайных величин с конечными моментами порядка p, где $1 < p < 2$

Теорема 3.1. *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно независимых случайных величин, причем $E|X_n|^p < \infty$ для всех $n \geqslant 1$ при некотором $1 < p < 2$ и $EX_n = 0$ для всех $n \geqslant 1$. Пусть выполнены условия*

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} G(x)\, dx < \infty, \qquad \text{где } G(x) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > x)}{n} \tag{3.1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n^{1/p}) < \infty. \tag{3.2}$$

Тогда

$$\frac{S_n}{n^{1/p} \log n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{3.3}$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$X_i^{(n)} = X_i \mathbb{I}_{\{|X_i| \leqslant n^{1/p}\}}, \qquad i \geqslant 1,\ n \geqslant 1, \tag{3.4}$$

$$S_j^{(n)} = \sum_{i=1}^{j} X_i^{(n)} \qquad j \geqslant 1,\ n \geqslant 1. \tag{3.5}$$

Для того чтобы доказать (3.3), достаточно показать, что

$$\frac{S_n - S_n^{(n)}}{n^{1/p}} \to 0 \qquad \text{п.н.,} \tag{3.6}$$

$$\frac{S_n^{(n)} - ES_n^{(n)}}{n^{1/p} \log n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{3.7}$$

и

$$\frac{ES_n^{(n)}}{n^{1/p}} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{3.8}$$

Для того чтобы доказать (3.6), положим $U_n = |X_n|^p \mathbb{I}_{\{|X_n|>n^{1/p}\}}$, $n \geqslant 1$. В силу (3.2) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(U_n \neq 0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n^{1/p}) < \infty.$$

Таким образом, по лемме Бореля-Кантелли

$$U_n \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{3.9}$$

Имеем

$$\begin{aligned}\frac{|S_n - S_n^{(n)}|}{n^{1/p}} &= \frac{|\sum_{i=1}^n X_i \mathbb{I}_{\{|X_i|>n^{1/p}\}}|}{n^{1/p}} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\sum_{i=1}^n |X_i| \mathbb{I}_{\{|X_i|>n^{1/p}\}}}{n^{1/p}} = \frac{\sum_{i=1}^n n^{\frac{p-1}{p}} |X_i| \mathbb{I}_{\{|X_i|>n^{1/p}\}}}{n} \leqslant \\ &\leqslant \frac{\sum_{i=1}^n |X_i|^p \mathbb{I}_{\{|X_i|>n^{1/p}\}}}{n} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n |X_i|^p \mathbb{I}_{\{|X_i|>i^{1/p}\}}}{n}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Правая часть (3.10) сходится к нулю п.н. в силу (3.9). Таким образом, (3.6) доказано.

Докажем (3.8). В силу леммы 1.5

$$
\begin{aligned}
\frac{|ES_n^{(n)}|}{n^{1/p}} = \frac{|\sum_{i=1}^n EX_i^{(n)}|}{n^{1/p}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n |EX_i^{(n)}|}{n^{1/p}} = \\
= \frac{\sum_{i=1}^n |E(X_i - X_i^{(n)})|}{n^{1/p}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^n E(|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>n^{1/p}\}})}{n^{1/p}} \leqslant \\
\leqslant \frac{\sum_{i=1}^n \left(n^{1/p}P(|X_i|>n^{1/p}) + \int_{n^{1/p}}^\infty P(|X_i|>x)\,dx\right)}{n^{1/p}} = \\
= \sum_{i=1}^n P(|X_i|>n^{1/p}) + \frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^n \int_{n^{1/p}}^\infty P(|X_i|>x)\,dx \leqslant \\
\leqslant nG(n^{1/p}) + \frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^n \int_{n^{1/p}}^\infty P(|X_i|>x)\,dx = I_{1n} + I_{2n}.
\end{aligned}
$$

Имеем

$$
\infty > \int_0^\infty x^{p-1}G(x)\,dx = \frac{1}{p}\int_0^\infty G(y^{1/p})\,dy.
$$

Следовательно,

$$
\sum_{n=1}^\infty G(n^{1/p}) < \infty. \tag{3.11}
$$

Таким образом,

$$
I_{1n} = nG(n^{1/p}) \to 0 \qquad (n\to\infty). \tag{3.12}
$$

$$
\begin{aligned}
I_{2n} = \frac{1}{n^{1/p}}\sum_{i=1}^n \int_{n^{1/p}}^\infty P(|X_i|>x)\,dx \leqslant \\
\leqslant n^{\frac{p-1}{p}}\int_{n^{1/p}}^\infty G(x)\,dx \leqslant \int_{n^{1/p}}^\infty x^{p-1}G(x)\,dx \to 0 \qquad (n\to\infty).
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Из (3.12) и (3.13) следует (3.8).

Далее, покажем, что

$$
\frac{S_{2^n}^{(2^n)} - ES_{2^n}^{(2^n)}}{2^{\frac{n}{p}}} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{3.14}
$$

В силу леммы 1.4 и неравенства Чебышева для всякого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{S_{2^n}^{(2^n)} - ES_{2^n}^{(2^n)}}{2^{\frac{n}{p}}}\right| > \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{DS_{2^n}^{(2^n)}}{2^{\frac{2n}{p}}} \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{2^n} DX_k^{(2^n)}}{2^{\frac{2n}{p}}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{2^n} E(X_k^{(2^n)})^2}{2^{\frac{2n}{p}}} = \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{2n}{p}}}\sum_{k=1}^{2^n} E(|X_k|^2 \mathbb{I}_{\{|X_k| \leqslant 2^{\frac{n}{p}}\}}) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{2n}{p}}}\sum_{k=1}^{2^n}\int_0^{2^{\frac{2n}{p}}} P(|X_k| > x^{1/2})\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{2n}{p}}}\sum_{k=1}^{2^n}\int_0^{2^{\frac{n}{p}}} yP(|X_k| > y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n(p-2)}{p}}\int_0^{2^{\frac{n}{p}}} yG(y)\,dy \leqslant C_1 + \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\frac{n(p-2)}{p}}\sum_{i=1}^{n}\int_{2^{\frac{i-1}{p}}}^{2^{\frac{i}{p}}} yG(y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C_1 + \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{2^{\frac{i-1}{p}}}^{2^{\frac{i}{p}}} yG(y)\,dy \sum_{n=i}^{\infty} 2^{\frac{n(p-2)}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 + \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty} 2^{\frac{i(2-p)}{p}}\int_{2^{\frac{i-1}{p}}}^{2^{\frac{i}{p}}} y^{p-1}G(y)\,dy \cdot 2^{\frac{i(p-2)}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 + \frac{C}{\varepsilon^2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_{2^{\frac{i-1}{p}}}^{2^{\frac{i}{p}}} y^{p-1}G(y)\,dy \leqslant C_1 + \frac{C}{\varepsilon^2}\int_0^{\infty} y^{p-1}G(y)\,dy < \infty. \tag{3.15}$$

Таким образом, (3.14) выполнено в силу леммы Бореля-Кантелли.

Далее, покажем, что

$$\frac{\max_{2^n < k \leqslant 2^{n+1}} |ES_k^{(2^n)}|}{2^{\frac{n+1}{p}}} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{3.16}$$

С учетом леммы 1.5 имеем

$$\frac{\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}|ES_k^{(2^n)}|}{2^{\frac{n+1}{p}}} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{2^{n+1}}|EX_i^{(2^n)}|}{2^{\frac{n+1}{p}}} = \frac{\sum_{i=1}^{2^{n+1}}|E(X_i - X_i^{(2^n)})|}{2^{\frac{n+1}{p}}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\sum_{i=1}^{2^{n+1}} E(|X_i|\mathbb{I}_{\{|X_i|>2^{\frac{n}{p}}\}})}{2^{\frac{n+1}{p}}} \leqslant \frac{1}{2^{\frac{n+1}{p}}}\sum_{i=1}^{2^{n+1}}\left(2^{\frac{n}{p}}P(|X_i|>2^{\frac{n}{p}}) + \int_{2^{\frac{n}{p}}}^{\infty} P(|X_i|>x)\,dx\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{n+1}G(2^{\frac{n}{p}}) + \frac{2^{n+1}}{2^{\frac{n+1}{p}}}\int_{2^{\frac{n}{p}}}^{\infty} G(x)\,dx \leqslant 2\cdot 2^n G(2^{\frac{n}{p}}) + 2^{\frac{p-1}{p}}\cdot 2^{\frac{n(p-1)}{p}}\int_{2^{\frac{n}{p}}}^{\infty} G(x)\,dx. \tag{3.17}$$

Первое слагаемое в правой части (3.17) сходится к нулю при $n \to \infty$ в силу (3.12). Из (3.13) следует, что второе слагаемое в правой части (3.17) также сходится к нулю при $n \to \infty$.

Из (3.16) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и всех достаточно больших n имеет место соотношение

$$\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}|ES_k^{(2^n)}| < \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2^{\frac{n+1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}\cdot 2^{\frac{n+1}{p}}\log(2^{n+1}). \tag{3.18}$$

Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty}\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}\frac{|S_k^{(k)}|}{2^{\frac{n+1}{p}}\log(2^{n+1})} = 0 \qquad \text{п.н.} \tag{3.19}$$

Заметим, что для любых случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, $n \geqslant 1$ и любых положительных чисел a и b имеет место неравенство

$$P(|\sum_{i=1}^{n} Z_i| > a) \leqslant P(|\sum_{i=1}^{n} Z_i\mathbb{I}_{\{|Z_i|\leqslant b\}}| > a) + \sum_{i=1}^{n} P(|Z_i| > b). \tag{3.20}$$

Из (3.18) и (3.20) следует, что

$$
\begin{aligned}
&P\left(\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}|S_k^{(k)}|>\varepsilon\cdot 2^{\frac{n+1}{p}}\log(2^{n+1})\right)\leqslant\\
&\qquad\leqslant P\left(\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}|S_k^{(2^n)}|>\varepsilon\cdot 2^{\frac{n+1}{p}}\log(2^{n+1})\right)+\sum_{i=1}^{2^{n+1}}P(|X_i|>2^{\frac{n}{p}})=\\
&\qquad=P\left(\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}|S_k^{(2^n)}-ES_k^{(2^n)}+ES_k^{(2^n)}|>\varepsilon\cdot 2^{\frac{n+1}{p}}\log(2^{n+1})\right)+\\
&+\sum_{i=1}^{2^{n+1}}P(|X_i|>2^{\frac{n}{p}})\leqslant P\left(\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}|S_k^{(2^n)}-ES_k^{(2^n)}|>\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2^{\frac{n+1}{p}}\log(2^{n+1})\right)+\\
&\qquad\qquad+\sum_{i=1}^{2^{n+1}}P(|X_i|>2^{\frac{n}{p}})=J_{1n}+J_{2n}. \quad (3.21)
\end{aligned}
$$

Поскольку для любого $k\in\mathbb{N}$ последовательность $\{X_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ является последовательностью попарно независимых случайных величин, то для приводимой ниже оценки мы можем воспользоваться неравенством Серфлинга (лемма 1.2). Имеем

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}J_{1n}=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}}|S_k^{(2^n)}-ES_k^{(2^n)}|>\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2^{\frac{n+1}{p}}\log(2^{n+1})\right)\leqslant\\
&\qquad\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^{n+1}}|S_k^{(2^n)}-ES_k^{(2^n)}|>\frac{\varepsilon}{2}\cdot 2^{\frac{n+1}{p}}\log(2^{n+1})\right)\leqslant\\
&\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\left(\max_{1\leqslant k\leqslant 2^{n+1}}|S_k^{(2^n)}-ES_k^{(2^n)}|\right)^2}{2^{\frac{2(n+1)}{p}}\log^2(2^{n+1})}\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log^2(2^{n+1})\sum_{i=1}^{2^{n+1}}DX_i^{(2^n)}}{2^{\frac{2(n+1)}{p}}\log^2(2^{n+1})}\leqslant\\
&\qquad\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{i=1}^{2^{n+1}}E\left(X_i^{(2^n)}\right)^2}{2^{\frac{2(n+1)}{p}}}=C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{2(n+1)}{p}}}\sum_{i=1}^{2^{n+1}}E(|X_i|^2\mathbb{I}_{\{|X_i|\leqslant 2^{\frac{n}{p}}\}})\leqslant\\
&\qquad\qquad\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\frac{2(n+1)}{p}}}\sum_{i=1}^{2^{n+1}}\int_0^{2^{\frac{n}{p}}}xP(|X_i|>x)\,dx\leqslant\\
&\qquad\qquad\qquad\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}2\cdot 2^{\frac{n(p-2)}{p}}\int_0^{2^{\frac{n}{p}}}xG(x)\,dx<\infty. \quad (3.22)
\end{aligned}
$$

Ряд в правой части (3.22) сходится в силу (3.15).

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{2^{n+1}} P(|X_i| > 2^{\frac{n}{p}}) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1}G(2^{\frac{n}{p}}) = 2\sum_{n=1}^{\infty} 2^n G(2^{\frac{n}{p}}) < \infty. \qquad (3.23)$$

Здесь мы воспользовались соотношением (3.11), а также следующим известным фактом (О.Коши): Если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

Из (3.21), (3.22) и (3.23) следует (3.19). Из (3.19), (3.8) и (3.14) следует (3.7). Теорема доказана. □

Далее мы покажем, что если в теореме 3.1 дополнительно потребовать, чтобы случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ были независимы, то множитель $\log n$ в знаменателе в левой части (3.3) можно опустить.

Теорема 3.2. *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин, причем $E|X_n|^p < \infty$ для всех $n \geqslant 1$ при некотором $1 < p < 2$ и $EX_n = 0$ для всех $n \geqslant 1$. Пусть выполнены условия* (3.1) *и* (3.2). *Тогда имеет место соотношение*

$$\frac{S_n}{n^{1/p}} \to 0 \qquad \text{п.н.} \qquad (3.24)$$

Доказательство теоремы 3.2 практически полностью повторяет доказательство теоремы 3.1 за исключением того места, где мы воспользовались неравенством Серфлинга. Поскольку случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ независимы, мы можем применить вместо неравенства Серфлинга неравенство Колмогорова (лемма 1.10).

Более подробно, для доказательства (3.24) нам достаточно показать, что

$$\frac{S_n - S_n^{(n)}}{n^{1/p}} \to 0 \qquad \text{п.н.,} \qquad (3.25)$$

$$\frac{S_n^{(n)} - ES_n^{(n)}}{n^{1/p}} \to 0 \qquad \text{п.н.} \qquad (3.26)$$

и

$$\frac{ES_n^{(n)}}{n^{1/p}} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{3.27}$$

(Мы воспользовались обозначениями (3.4) и (3.5)). Соотношения (3.25) и (3.27) доказываются в точности как в доказательстве теоремы 3.1.

Далее, с помощью тех же рассуждений, что и в доказательстве теоремы 3.1 можно показать, что

$$\frac{S_{2^n}^{(2^n)} - ES_{2^n}^{(2^n)}}{2^{\frac{n}{p}}} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{3.28}$$

и

$$P\left(\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} |S_k^{(k)}| > \varepsilon \cdot 2^{\frac{n+1}{p}})\right) \leqslant P\left(\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} |S_k^{(2^n)} - ES_k^{(2^n)}| > \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{\frac{n+1}{p}})\right) + \\ + \sum_{i=1}^{2^{n+1}} P(|X_i| > 2^{\frac{n}{p}}) = J_{1n} + J_{2n}. \tag{3.29}$$

С помощью неравенства Колмогорова (лемма 1.10) можно доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_{1n} = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} |S_k^{(2^n)} - ES_k^{(2^n)}| > \frac{\varepsilon}{2} \cdot 2^{\frac{n+1}{p}})\right) < \infty. \tag{3.30}$$

Сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2^{n+1}} P(|X_i| > 2^{\frac{n}{p}}) \tag{3.31}$$

доказывается в точности как в доказательстве теоремы 3.1. Из (3.29), (3.30) и (3.31) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{2^n<k\leqslant 2^{n+1}} \frac{|S_k^{(k)}|}{2^{\frac{n+1}{p}}} = 0 \qquad \text{п.н.} \tag{3.32}$$

Соотношение (3.24) следует из (3.32), (3.27) и (3.28).

Замечание 3.3. *Теорема 3.2 является обобщением классической теоремы Марцинкевича-Зигмунда на последовательности неодинаково распределенных случайных величин.*

Действительно, если случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ одинаково распределены и $E|X_1|^p < \infty$, $1 < p < 2$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n^{1/p}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > n^{1/p}) \leqslant E|X_1|^p < \infty.$$

Следовательно, условие (3.2) выполнено.
Далее, $G(x) = \sup_{n\geqslant 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} P(|X_i|>x)}{n} = P(|X_1| > x)$ для любого $x \geqslant 0$, поэтому в силу леммы 1.9

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} G(x)\, dx = \int_0^{\infty} x^{p-1} P(|X_1| > x)\, dx = \frac{1}{p} E|X|^p < \infty.$$

Таким образом, условие (3.1) также выполнено.

§ 4. Усиленный закон больших чисел для последовательностей случайных величин с конечными моментами первого порядка

В этом параграфе мы будем рассматривать последовательность случайных величин $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ с конечными моментами первого порядка.

Теорема 4.1. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность случайных величин,* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— неубывающая последовательность положительных чисел такая, что*

$$a_n \geqslant C \cdot n \qquad \text{для всех } n \geqslant 1. \tag{4.1}$$

Пусть выполнены условия

$$\int_0^{\infty} G(x)\,dx < \infty, \qquad \text{где } G(x) = \sup_{n\geqslant 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > x)}{a_n}, \tag{4.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > a_n) < \infty, \tag{4.3}$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{I}_{\{0\leqslant X_i\leqslant a_i\}}\right) \leqslant C_1 \sum_{i=1}^{n} D\left(X_i \mathbb{I}_{\{0\leqslant X_i\leqslant a_i\}}\right) \qquad \text{для всех } n \geqslant 1, \tag{4.4}$$

$$D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \mathbb{I}_{\{-a_i\leqslant X_i\leqslant 0\}}\right) \leqslant C_2 \sum_{i=1}^{n} D\left(X_i \mathbb{I}_{\{-a_i\leqslant X_i\leqslant 0\}}\right) \qquad \text{для всех } n \geqslant 1. \tag{4.5}$$

Тогда

$$\frac{S_n - ES_n}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{4.6}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение случайные величины $Y_n = X_n \mathbb{I}_{\{|X_n| \leqslant a_n\}}$, $n \geqslant 1$. Обозначим $S_n^* = \sum_{i=1}^n X_i^+$, $S_n^{**} = \sum_{i=1}^n X_i^-$, $T_n^* = \sum_{i=1}^n Y_i^+$.
Покажем, что

$$\frac{S_n^* - ES_n^*}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{4.7}$$

Для этого достаточно показать, что

$$\frac{S_n^* - T_n^*}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.,} \tag{4.8}$$

$$\frac{T_n^* - ET_n^*}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.,} \tag{4.9}$$

$$\frac{ET_n^* - ES_n^*}{a_n} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{4.10}$$

Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n^+ \neq Y_n^+) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > a_n) < \infty.$$

Отсюда, в силу (4.1), следует (4.8). Для того, чтобы доказать (4.9) покажем, что последовательность $\{Y_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям леммы 1.7.

Из условия (4.4) следует, что для последовательности $\{Y_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ выполнено условие (1.10).

Из (4.2) и леммы 1.4 следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{DY_n^+}{a_n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\left(X_n^2\mathbb{I}_{\{|X_n|\leqslant a_n\}}\right)}{a_n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}\int_0^{a_n^2}P(|X_n|>x^{1/2})\,dx\leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}\int_0^{a_n}yP(|X_n|>y)\,dy\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[a_n]^2}\int_0^{[a_n]+1}yP(|X_n|>y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=[a_n]}^{\infty}\frac{1}{j^3}\sum_{k=1}^{[a_n]+1}\int_{k-1}^{k}yP(|X_n|>y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=[a_n]+1}^{\infty}\frac{1}{j^3}\sum_{k=1}^{[a_n]+1}\int_{k-1}^{k}yP(|X_n|>y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=[a_n]+1}^{\infty}\frac{1}{j^3}\sum_{k=1}^{j}\int_{k-1}^{k}yP(|X_n|>y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n:a_n\leqslant j}\frac{1}{j^3}\sum_{k=1}^{j}\int_{k-1}^{k}yP(|X_n|>y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j^2}\int_{k-1}^{k}y\frac{\sum_{n:a_n\leqslant j}P(|X_n|>y)}{j}\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j^2}\int_{k-1}^{k}yG(y)\,dy\leqslant C_1+C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j^2}\int_{k-1}^{k}yG(y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C\sum_{k=1}^{\infty}k\int_{k-1}^{k}G(y)\,dy\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j^2}\leqslant C_1+C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}G(y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C\int_0^{\infty}G(y)\,dy<\infty.$$

Таким образом, для последовательности $\{Y_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ выполнено условие (1.11).

Покажем, что условие (1.12) для последовательности $\{Y_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ также выполнено. Действительно, пусть постоянная A такая, что $\int_0^{\infty}G(x)\,dx\leqslant A$. Тогда для любого $n\geqslant 1$ имеем

$$\frac{\sum_{k=1}^n EY_k^+}{a_n} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^n E|X_k|}{a_n} = \frac{\sum_{k=1}^n \int_0^\infty P(|X_k| > x)\,dx}{a_n} =$$
$$= \int_0^\infty \frac{\sum_{k=1}^n P(|X_k| > x)}{a_n}\,dx \leqslant \int_0^\infty G(x)\,dx \leqslant A.$$

Таким образом, последовательность $\{Y_n^+\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условиям леммы 1.7 и, следовательно, (4.9) выполнено.

Осталось доказать (4.10).

В силу леммы 1.5

$$\frac{ES_n^* - ET_n^*}{a_n} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^n E(|X_k|\mathbb{I}_{\{|X_k|>a_k\}})}{a_n} =$$
$$= \frac{\sum_{k=1}^n a_k P(|X_k| > a_k) + \sum_{k=1}^n \int_{a_k}^\infty P(|X_k| > x)\,dx}{a_n} = \frac{I_n^1 + I_n^2}{a_n}.$$

Из условия (4.3) и леммы Кронекера (лемма 1.8) следует, что

$$\frac{I_n^1}{a_n} = \frac{\sum_{k=1}^n a_k P(|X_k| > a_k)}{a_n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Зафиксируем $N \geqslant 1$. Тогда для любого $n > N$

$$I_n^2 = \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^\infty P(|X_k| > x)\,dx + \sum_{k=N+1}^n \int_{a_k}^\infty P(|X_k| > x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^N \int_0^\infty P(|X_k| > x)\,dx + \sum_{k=1}^n \int_{a_N}^\infty P(|X_k| > x)\,dx.$$

$$\frac{\sum_{k=1}^N \int_0^\infty P(|X_k| > x)\,dx}{a_n} \leqslant \frac{a_N \int_0^\infty G(x)\,dx}{a_n} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

$$\frac{\sum_{k=1}^n \int_{a_N}^\infty P(|X_k| > x)\,dx}{a_n} \leqslant \int_{a_N}^\infty G(x)\,dx.$$

Правую часть последнего неравенства можно сделать сколь угодно малой за счет выбора N. Таким образом, (4.10) выполнено. Из (4.8), (4.9) и (4.10) следует (4.7). С помощью аналогичных рассуждений можно доказать, что

$$\frac{S_n^{**} - ES_n^{**}}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{4.11}$$

Из (4.7) и (4.11) следует утверждение теоремы. □

В качестве следствия получим результат о сильной устойчивости сумм случайных величин.

Теорема 4.2. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность неотрицательных случайных величин, удовлетворяющая условиям*

$$ES_n \geqslant C \cdot n \qquad \textit{для всех } n \geqslant 1, \tag{4.12}$$

$$\int_0^\infty G_2(x)\,dx < \infty, \qquad \textit{где } G_2(x) = \sup_{n\geqslant 1} \frac{\sum_{i=1}^n P(X_i > x)}{ES_n}, \tag{4.13}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n > ES_n) < \infty, \tag{4.14}$$

$$D\left(\sum_{i=1}^n X_i \mathbb{I}_{\{X_i \leqslant ES_i\}}\right) \leqslant C_1 \sum_{i=1}^n D\left(X_i \mathbb{I}_{\{X_i \leqslant ES_i\}}\right) \qquad \textit{для всех } n \geqslant 1. \tag{4.15}$$

Тогда

$$\frac{S_n}{ES_n} \to 1 \qquad \textit{п.н.} \tag{4.16}$$

Теорема 4.2 следует из теоремы 4.1 с $a_n = ES_n$.

Следствие 4.3. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность неотрицательных попарно независимых случайных величин, удовлетворяющая условиям* (4.12), (4.13) *и* (4.14)*. Тогда имеет место соотношение* (4.16).

Замечание 4.4. *Если неотрицательные случайные величины* $X_1, X_2, \ldots$ *одинаково распределены, то условия* (4.12), (4.13) *и* (4.14) *будут выполнены.*

Приведем еще одно следствие теоремы 4.1.

Следствие 4.5. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность попарно независимых случайных величин,* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* (4.1)*. Пусть выполнены условия* (4.2) *и* (4.3)*. Тогда имеет место соотношение* (4.6)*.*

Следствие 4.5 обобщает теорему G (см. Введение), которая соответствует случаю $a_n = n$ для всех $n \geqslant 1$.

§ 5. Усиленный закон больших чисел для последовательностей случайных величин без предположения о существовании моментов первого порядка

В этом параграфе мы будем рассматривать последовательности неодинаково распределенных случайных величин без предположения о существовании моментов первого порядка.

Теорема 5.1. *Пусть* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность случайных величин с конечными моментами порядка* p *при некотором положительном* $p<1$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— неубывающая последовательность положительных чисел такая, что*

$$a_n \geqslant C \cdot n \qquad \text{для всех } n \geqslant 1. \tag{5.1}$$

Пусть выполнены условия

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} G(x)\, dx < \infty, \qquad \text{где } G(x) = \sup_{n\geqslant 1} \frac{\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > x)}{a_n^p}, \tag{5.2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > a_n) < \infty, \tag{5.3}$$

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{I}_{\{0\leqslant X_k \leqslant a_k\}}\right) \leqslant C_1 \sum_{k=1}^{n} D\left(X_k \mathbb{I}_{\{0\leqslant X_k\leqslant a_k\}}\right) \qquad \text{для всех } n \geqslant 1, \tag{5.4}$$

$$D\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{I}_{\{-a_k\leqslant X_k \leqslant 0\}}\right) \leqslant C_2 \sum_{k=1}^{n} D\left(X_k \mathbb{I}_{\{-a_k\leqslant X_k\leqslant 0\}}\right) \qquad \text{для всех } n \geqslant 1. \tag{5.5}$$

Тогда

$$\frac{T_n}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.}, \tag{5.6}$$

где $T_n = \sum_{k=1}^n |X_k|$.

Доказательство. Введем в рассмотрение случайные величины $Y_n = X_n \mathbb{I}_{\{|X_n| \leqslant a_n\}}$, $n \geqslant 1$. Обозначим $S_n^* = \sum_{k=1}^n X_k^+$, $S_n^{**} = \sum_{k=1}^n X_k^-$, $U_n^* = \sum_{k=1}^n Y_k^+$.

Покажем, что

$$\frac{S_n^*}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{5.7}$$

Для этого достаточно показать, что

$$\frac{S_n^* - U_n^*}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.,} \tag{5.8}$$

$$\frac{U_n^* - EU_n^*}{a_n} \to 0 \qquad \text{п.н.,} \tag{5.9}$$

$$\frac{EU_n^*}{a_n} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{5.10}$$

Имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n^+ \neq Y_n^+) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > a_n) < \infty.$$

Отсюда и из (5.1) следует (5.8).

Далее, заметим, что

$$\frac{|EU_n^*|}{a_n} = \frac{|\sum_{k=1}^n EY_k^+|}{a_n} \leqslant \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n E(|X_k| \mathbb{I}_{\{|X_k| \leqslant a_k\}}). \tag{5.11}$$

Из (5.2) и леммы 1.4 следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}E(|X_n|\mathbb{I}_{\{|X_n|\leqslant a_n\}})\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\int_0^{a_n}P(|X_n|>x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\int_0^{[a_n]+1}P(|X_n|>x)\,dx\leqslant C_1+C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[a_n]+1}\int_0^{[a_n]+1}P(|X_n|>x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_1+C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=[a_n]+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\sum_{k=1}^{[a_n]+1}\int_{k-1}^{k}P(|X_n|>x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_1+C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=[a_n]+1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\sum_{k=1}^{j}\int_{k-1}^{k}P(|X_n|>x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_1+C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n:a_n\leqslant j}\frac{1}{j^2}\sum_{k=1}^{j}\int_{k-1}^{k}P(|X_n|>x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_1+C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j^{2-p}}\int_{k-1}^{k}\frac{\sum_{n:a_n\leqslant j}P(|X_n|>x)}{j^p}\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_1+C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j^{2-p}}\int_{k-1}^{k}G(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_1+C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j^{2-p}}k^{1-p}\int_{k-1}^{k}x^{p-1}G(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_1+C\sum_{k=1}^{\infty}k^{1-p}\int_{k-1}^{k}x^{p-1}G(x)\,dx\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j^{2-p}}\leqslant$$

$$\leqslant C_1+C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}x^{p-1}G(x)\,dx=C_1+C\int_0^{\infty}x^{p-1}G(x)\,dx<\infty. \quad (5.12)$$

Из (5.11), (5.12) и леммы Кронекера (лемма 1.8) следует (5.10).

Для того чтобы доказать (5.9), покажем, что последовательность $\{Y_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям леммы 1.7.

Из условия (5.4) и соотношения (5.10) следует, что для последовательности $\{Y_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ выполнены условия (1.10) и (1.12) соответственно.

Из (5.2) и леммы 1.4 следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{DY_n^+}{a_n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{E\left(X_n^2\mathbb{I}_{\{|X_n|\leqslant a_n\}}\right)}{a_n^2}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}\int_0^{a_n^2}P(|X_n|>x^{1/2})\,dx=$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}\int_0^{a_n}yP(|X_n|>y)\,dy\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n^2}\int_0^{[a_n]+1}yP(|X_n|>y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=[a_n]+1}^{\infty}\frac{1}{j^3}\sum_{k=1}^{[a_n]+1}\int_{k-1}^{k}yP(|X_n|>y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=[a_n]+1}^{\infty}\frac{1}{j^3}\sum_{k=1}^{j}\int_{k-1}^{k}yP(|X_n|>y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n:a_n\leqslant j}\frac{1}{j^3}\sum_{k=1}^{j}\int_{k-1}^{k}yP(|X_n|>y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j^{3-p}}\int_{k-1}^{k}y\frac{\sum_{n:a_n\leqslant j}P(|X_n|>y)}{j^p}\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j^{3-p}}\int_{k-1}^{k}yG(y)\,dy\leqslant C_1+C\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j^{3-p}}\int_{k-1}^{k}yG(y)\,dy\leqslant$$
$$\leqslant C_1+C\sum_{k=1}^{\infty}k^{2-p}\int_{k-1}^{k}y^{p-1}G(y)\,dy\sum_{j=k}^{\infty}\frac{1}{j^{3-p}}\leqslant C_1+C\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}y^{p-1}G(y)\,dy=$$
$$=C_1+C\int_0^{\infty}y^{p-1}G(y)\,dy<\infty.$$

Таким образом, последовательность $\{Y_n^+\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям леммы 1.7 и, следовательно, (5.9) выполнено. Из (5.8), (5.9) и (5.10) следует (5.7). С помощью аналогичных рассуждений можно доказать, что

$$\frac{S_n^{**}}{a_n}\to 0 \qquad \text{п.н.} \tag{5.13}$$

Из (5.7) и (5.13) следует утверждение теоремы. Теорема доказана. □

Следствие 5.2. *Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно независимых случайных величин с конечными моментами порядка p при некотором поло-*

жительном $p < 1$, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию (5.1). *Пусть выполнены условия* (5.2) *и* (5.3). *Тогда имеет место соотношение* (5.6).

Если в следствии 5.2 положить $a_n = n^{1/p}$ для всех $n \geqslant 1$ и некоторого положительного $p < 1$, то мы получим следующий результат:

Следствие 5.3. *Пусть $\{X_n\}$ — последовательность попарно независимых случайных величин с конечными моментами порядка p при некотором положительном $p < 1$. Пусть выполнены условия*

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} G(x)\,dx < \infty, \qquad \text{где } G(x) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{\sum_{k=1}^{n} P(|X_k| > x)}{n} \tag{5.14}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n^{1/p}) < \infty. \tag{5.15}$$

Тогда

$$\frac{T_n}{n^{1/p}} \to 0 \qquad \text{п.н.},$$

где $T_n = \sum_{k=1}^{n} |X_k|$.

Покажем, что в случае, когда случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ одинаково распределены и $E|X_1|^p < \infty$, $0 < p < 1$, условия (5.14) и (5.15) выполнены.

Действительно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| > n^{1/p}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| > n^{1/p}) \leqslant E|X_1|^p < \infty.$$

Следовательно, условие (5.15) выполнено.

Далее, $G(x) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{\sum_{i=1}^{n} P(|X_i| > x)}{n} = P(|X_1| > x)$ для любого $x \geqslant 0$, поэтому в силу леммы 1.9

$$\int_0^\infty x^{p-1} G(x)\,dx = \int_0^\infty x^{p-1} P(|X_1| > x)\,dx = \frac{1}{p} E|X|^p < \infty.$$

Таким образом, условие (5.14) также выполнено.

Литература

[1] *Булинский А.В., Шашкин А.П.* Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М.: Физматлит, 2008.

[2] *Гапошкин В.Ф.* К усиленному закону больших чисел для стационарных в широком смысле процессов и последовательностей//Теор. вероятн. и примен., 1973, Т. 18, № 2, С. 388–392.

[3] *Гапошкин В.Ф.* Сходимость рядов, связанных со стационарными последовательностями//Изв. АН СССР. Сер. матем., 1975, Т. 39, № 6 С. 1366–1392.

[4] *Гапошкин В.Ф.* Критерии усиленного закона больших чисел для классов стационарных в широком смысле процессов и однородных случайных полей//Теор. вероятн. и примен., 1977, Т. 22, № 2, С. 295–319.

[5] *Дуб Дж.Л.* Вероятностные процессы. М.: ИЛ, 1956.

[6] *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.

[7] *Левенталь Ш., Салехи Х., Чобанян С.А.* Общие максимальные неравенства, связанные с усиленным законом больших чисел//Матем. заметки, 2007, Т. 81, Вып. 1, С. 98–111.

[8] *Лоэв М.* Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.

[9] *Мартикайнен А.И.* Замечание об усиленном законе больших чисел для сумм попарно независимых случайных величин//Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1992, Т. 194, С. 114–118.

[10] *Мартикайнен А.И., Петров В.В.* Об одной теореме Феллера//Теор. вероятн. и примен., 1980, Т. 25, № 1, С. 194–197.

[11] *Петров В.В.* Об усиленном законе больших чисел//Теор. вероятн. и примен., 1969, Т. 14, № 2, С. 193–202.

[12] *Петров В.В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972.

[13] *Петров В.В.* Об усиленном законе больших чисел для стационарной последовательности//Докл. АН СССР, 1973, Т. 213, № 3, С. 42–44.

[14] *Петров В.В.* Об усиленном законе больших чисел для последовательности ортогональных случайных величин//Вестн. ЛГУ, 1975, № 7, С. 52–57.

[15] *Петров В.В.* Об усиленном законе больших чисел для ортогональных случайных величин//Зап. науч. семинаров ЛОМИ, 1977, Т. 72, С. 103–106.

[16] *Петров В.В.* Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987.

[17] *Петров В.В.* Об усиленном законе больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин//Теор. вероятн. и примен., 2008, Т. 53, № 2, С. 379–382.

[18] *Петров В.В.* Об устойчивости сумм неотрицательных случайных величин//Зап. науч. семинаров ПОМИ, 2008, Т. 361, С. 78–82.

[19] *Петров В.В.* К усиленному закону больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин//Зап. науч. семинаров ПОМИ, 2010, Т. 384, С. 182–184.

[20] *Петров В.В.* Одна теорема об усиленном законе больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин//Зап. науч. семинаров ПОМИ, 2011, Т. 396, С. 172–174.

[21] *Петров В.В.* Об усиленном законе больших чисел для последовательности зависимых случайных величин//Зап. науч. семинаров ПОМИ, 2012, Т. 408, С. 285–288.

[22] *Яськов П.А.* Об одном обобщении теоремы Меньшова-Радемахера//Матем. заметки, 2009, Т. 86, Вып. 6, С. 925–937.

[23] *Bose A., Chandra T.K.* A note on the strong law of large numbers//Calcutta Statistical Association Bulletin, 1994, Vol. 44, P. 115–122.

[24] *Chandra T.K.* Laws of large numbers. Narosa Publishing House. New Delhi. 2012.

[25] *Chandra T.K., Goswami A.* Cesáro uniform integrability and a strong laws of large numbers//Sankhyā, 1992, Ser. A, Vol. 54, P. 215–231.

[26] *Chobanyan S., Levental S., Salehi H.* Strong law of large numbers under a general moment conditions//Electronic Communications in Probability, 2005, Vol. 10, P. 218–222.

[27] *Csörgő S., Tandori K., Totik V.* On the strong law of large numbers for pairwise independent random variables//Acta Math. Hungar., 1983, Vol. 42, N 3–4, P. 319–330.

[28] *Davidson J.* Stochastic limit theory. Oxford University Press. New York. 1994.

[29] *Etemadi N.* An elementary proof of the strong law of large numbers//Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1981, Bd. 55, N 1, S. 119–122.

[30] *Etemadi N.* On the law of large numbers for non-negative random variables//J. Multivariate Analysis, 1983, Vol. 13, P. 187–193.

[31] *Etemadi N.* Stability of sums of weighted non-negative random variables//J. Multivariate Analysis, 1983, Vol. 13, P. 361–365.

[32] *Fazekas I., Klesov O.* A general approach to the strong laws of large numbers//Теор. вероятн. и примен., 2000, Т. 45., № 3, С. 568–583.

[33] *Hall P., Heyde C.C.* Martingale limit theory and its application. Academic Press. New York. 1980.

[34] *Hu T.-C., Rosalsky A., Volodin A.* On convergence properties of sums of dependent random variables under second moment and covariance restrictions//Statist. Probab. Lett., 2008, Vol. 78, P. 1999–2005.

[35] *Hu T.-C., Weber N.C.* Note on the strong convergence of sums of dependent random variables//J. Probab. Statist., 2009, Article ID 873274, 7 pp.

[36] *Kruglov V.M.* A strong law of large numbers for pairwise independent identically distributed random variables with infinite means//Statist. Probab. Lett., 2008, Vol. 78, P. 890–895.

[37] *Lin Zhengyan, Lu Chuanrong* Limit theory for mixing dependent random variables. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. 1996.

[38] *Lyons R.* Strong laws of large numbers for weakly correlated random variables//Michigan. Math. J., 1988, Vol. 35, P. 353–359.

[39] *Martikainen A.* On the strong law of large numbers for sums of pairwise independent random variables//Statist. Probab. Lett., 1995, Vol.25, P. 21–26.

[40] *Matula P.* A note on the almost sure convergence of sums negatively dependent random variables//Statist. Probab. Lett., 1992, Vol. 15, P. 209–213.

[41] *Matula P.* On some families of AQSI random variables and related strong law of large numbers//Appl. Math. E-Notes, 2005, Vol. 5, P. 31–35.

[42] *Móricz F.* Moment inequalities and the strong laws of large numbers//Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1976, Bd. 35, S. 299–314.

[43] *Móricz F.* The strong laws of large numbers for quasi-stationary sequences//Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1977, Bd. 38, S. 223–236.

[44] *Móricz F.* SLLN and convergence rates for nearly orthogonal sequences of random variables//Proc. Amer. Math. Soc., 1985, Vol. 95, N 2, P. 287–294.

[45] *Oliveira P.E.* Asymptotics for associated random variables. Springer-Verlag. Berlin. 2012.

[46] *Petrov V.V.* Limit theorems of probability theory. Clarendon Press. Oxford. 1995.

[47] *Petrov V.V.* On the strong law of large numbers//Statist. Probab. Lett., 1996, Vol. 26, P. 377–380.

[48] *Sawyer S.* Maximal inequalities of weak type//Ann. Math., 1966, Vol. 84, P. 157–174.

[49] *Serfling R.J.* Moment inequalities for the maximum cumulative sum//Ann. Math. Statist., 1970, Vol. 41, N 4, P. 1227–1234.

[50] *Serfling R.J.* On the strong laws of large numbers and related results for quasi-stationary sequences//Теор. вероятн. и примен., 1980, Т. 25, № 1, С. 190–194.

[51] *Stout W.* Almost sure convergence. Academic Press. New York. 1974.

[52] *Sung S.H.* On the strong law of large numbers for pairwise i.i.d. random variables//Bull. Korean Math. Soc., 1997, N 4, P. 617–626.

[53] *Sung S.H.* Maximal inequalities for dependent random variables and applications//J. Inequalities Appl., 2008, Article ID 598319, 10 pp.

[54] *Tandori K.* Bemerkungen zum Gesetz der grossen Zahlen//Period. Math. Hung., 1972, V. 2, N. 1–4, P. 33–39.

[55] *Wu Qunying* Convergence properties of pairwise NQD sequences//Acta Math. Sinica, 2002, Vol. 45, N 3, P. 617–624.

Работы автора по теме диссертации

[56] *Корчевский В.М.* Об усиленном законе больших чисел для последовательностей зависимых случайных величин//Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, т. 16, в. 2, С. 266–267.

[57] *Petrov V.V., Korchevsky V.M.* On the strong law of large numbers for sequences of dependent random variables//Proceedings of the 6-th St. Petersburg Workshop on Simulation, 2009, P. 977–980.

[58] *Корчевский В.М., Петров В.В.* Об усиленном законе больших чисел для последовательностей зависимых случайных величин//Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, 2010, Вып. 3, С. 26–30.

[59] *Корчевский В.М.* Об условиях применимости усиленного закона больших чисел к последовательностям независимых случайных величин//Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, 2010, Вып. 4, С. 32–35.

[60] *Корчевский В.М.* Об усиленном законе больших чисел для последовательности случайных величин без предположения о независимости//Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 1, 2011, Вып. 4, С. 38–41.

[61] *Корчевский В.М.* Об усиленном законе больших чисел для последовательностей зависимых случайных величин с конечными дисперсиями//Обозрение прикл. и промышл. матем., 2013, т. 20, в. 2, С. 143–144.