ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертационной работе Новака Сергея Юрьевича «Предельные теоремы и оценки скорости сходимости в теории экстремальных значений», представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика.

Статистическая теория экстремумов случайных последовательностей и процессов представляет собой важную интенсивно развивающуюся область математической статистики и теории вероятностей. Подобно любой вероятностной теории важнейшими стимулами развития статистики экстремумов является развитие соответствующего математического аппарата и потребности приложений. Возможность оценивания вероятностей редких событий и их прогноза, зачастую моделирующих экономические и природные катастрофы, техногенные аварии, привлекает к этой тематике большое количество исследователей. Основы теории в первой половине 20го века заложили Фреше, фон Мизес, Фишер, Типет, Гнеденко. Построение теории для последовательностей независимых случайных величин было завершено де Хааном. Наряду с этим структура данных при исследовании экономических, природных, технологических явлений зачастую не соответствует стандартной модели статистической выборки. Наблюдения часто оказываются зависимыми и нестационарными. Это делает актуальным исследование асимптотики экстремальных значений в последовательностях стационарных случайных величин. По данной тематике ежегодно проводится несколько международных конференций, публикуются десятки статей, издаются специальные журналы. При этом стандартный инструментарий статистики экстремумов остается существенно беднее хорошо развитого мощного аппарата современной теории статистики и случайных процессов. В рассматриваемой диссертационной работе этот пробел в технологии исследований существенным образом пополняется. Все это позволяет заключить, что тема данной диссертационной работы является актуальной.

Диссертация Новака С.Ю. посвящена актуальным задачам теории экстремальных значений в стационарных последовательностях случайных величин. В отличие от теории сумм зависимых случайных величин, где наличие слабой зависимости не меняет класса предельных распределений, в теории экстремальных статистик слабая зависимость существенно расширяет класс предельных распределений.

Перейдем к рассмотрению содержания диссертации. Диссертация объемом в 232 страницы состоит из введения, шести глав и списка литературы, включающего 417 наименований.

В главе 1 представлен предложенный автором метод оценивания скорости сходимости в предельных теоремах теории экстремальных значений – метод рекуррентных неравенств. Этим методом доказана теорема 1.1, дающая оценки сверху и снизу для распределения максимального значения временного ряда. Далее этот метод применяется к решению ряда

задач теории экстремальных значений, таких как исследование свойств оценок экстремального индекса (Теорема 1.5), исследование распределения максимального значения частичных сумм (статистик Эрдеша-Реньи, теоремы 1.6, 1.12,1.13). Приводятся примеры применения полученных результатов в биологии, финансах и страховому делу. Оценки скорости сходимости в предельной теореме для максимума частичных сумм получены впервые.
Далее в этой главе с помощью метода рекуррентных неравенств впервые получены оценки скорости сходимости в ряде специальных задач, связанных с выборками случайного объёма. Получены результаты типа закона повторного логарифма; установлены необходимые и достаточные условия существания экстремального индекса. Теоремы главы 1 уточняют и обобщают результаты таких авторов, как Эрдёш, Реньи, Деовельс, Деврой, Питербарг, Зубков, Карлин.

Глава 2 посвящена важной задаче о точности пуассоновской и сложно-пуассоновской аппроксимации для распределения числа N_n выходов за высокий уровень. Над этой проблемой, восходящей к Пуассону, работали, в частности, Прохоров, Ле-Кам, Деовельс, Барбур, Холл и др.. Роос (1999) получил оценку с неулучшаемой константой. В работе улучшен результат Рооса (уточнено слагаемое второго порядка), предложено новое доказательство теоремы Прохорова–Рооса об асимптотике расстояния по вариации между биномиальным и пуассоновским распределениями; показано, что главный член асимптотики может быть выражен в терминах специального преобразования распределения Пуассона.
Результаты автора о точности пуассоновской аппроксимации для сумм целочисленнозначных случайных величин открывают новое направление в тематике пуассоновской аппроксимации. Впервые получена правильная по порядку оценка точности пуассоновской аппроксимации, установлена роль специального преобразования исходного распределения, впервые найдена оценка точности пуассоновской аппроксимации (Теоремы 2.6, 2.15). Отметим, что для доказательства соответствующих теорем был применен метод Стейна, разработанный для исследования распределений сумм случайных величин.
Для вектора количеств выходов за высокие уровни получены необходимые и достаточные условия слабой сходимости к сложно-пуассоновскому случайному вектору, а также необходимые и достаточные условия слабой сходимости в общем случае, когда компоненты предельного случайного вектора могут быть зависимы. Лемма 2.22 уточняет и обобщает на многомерный случай теорему Бредли (1983).

В главе 3 изложена асимптотическая теория эмпирических точечных процессов выходов за высокий уровень. Охарактеризован класс предельных распределений этих точечных процессов, который богаче класса сложно-пуассоновских процессов, найдены необходимые и достаточные условия слабой сходимости эмпирических точечных процессов выхода за высокий уровень к предельному распределению, оценена скорость сходимости. Установлено, что каждый элемент класса предельных распределений представим в виде композиции одномерных

процессов. Следует особо отметить результаты о сходимости к сложно-пуассоновскому процессу (Теоремы 3.2-3.4) – серьезное обобщение теорем Калленберга, Теоремы 3.6 и 3.7, дополняющие результаты Каблучко-де Хаана, а также теорему 3.8 о точности аппроксимации сложно пуассоновским процессом.
Результаты главы 3 диссертации формируют целостную теорию о предельных распределениях эмпирических точечных процессов выходов за высокий уровень.

Глава 4 посвящена задачам статистики экстремальных значений. Одной из краеугольных задач, привлекавших внимание многих известных исследователей (Хилл, Холл, Голди, Смит, Айнмаль, де Хаан, Тойгельс и др.), является задача о непараметрическом оценивании показателя скорости убывания хвоста распределения. Ключевым моментом процедуры оценивания этого параметра является проблема выбора «управляющего параметра» оценок – числа первых порядковых статистик, участвующих в оценивании. Оказалось, что предложенный автором алгоритм выбора управляющего параметра непараметрических оценок существенно точнее методик других авторов.
Предложен ряд новых оценок показателя скорости убывания, и тесно связанных с этим параметром вероятности выхода за высокий уровень и экстремальной квантили, доказана их состоятельность и асимптотическая нормальность в условиях слабой зависимости при минимальных ограничениях на коэффициенты перемешивания. Отметим особо оценку (4.16), состоятельность и асимптотическая нормальность которой доказаны с полноценным привлечением аппарата исследования стационарных процессов с перемешиванием. Установлены нижние границы точности оценивания характеристик распределений с тяжёлыми хвостами, выявлены соответствующие информационные функционалы, раздел 4.6. И здесь применение общих методов современной теории статистики и случайных процессов привело к выдающимся результатам в статистике экстремумов.
Следует отметить, что глава 4 блестяще написана, приводится большое число примеров, иллюстрирующих преимущества предлагаемых методов. Результаты главы 4 имеют важное прикладное значение, поскольку экстремальные квантили широко используются банками как мера риска.
Глава 5 посвящена задачам точности аппроксимации распределений самонормированными сумм случайных величин. Интерес к таким функционалам от выборок связан с тем, что ряд оценок в статистике экстремальных значений, а также других разделах статистики, являются самонормированными суммами случайных величин.
В работе получены оценки точности нормальной аппроксимации для распределений самонормированных сумм случайных величин (Теоремы 5.1-5.7). Глава 5 представляет собой начало общей теории предельных распределений функционалов от двумерных зависимых выборок, настроенной как на использование в классической статистике, так и в статистике экстремумов. Оценки с явными константами получены впервые, включая случай неодинаково распределённых случайных величин. В случае стационарной последовательности зависимых

случайных величин подобные оценки также получены впервые. На основе указанных оценок предложены так называемые под-асимптотические доверительные интервалы для оценок показателя скорости убывания хвоста распределения, которые точнее стандартных асимптотических. Константы точны в следующем смысле: показано, что для определённого класса распределений оценки для статистики Стьюдента отличаются от оценок в классических равномерном и неравномерном неравенствах Берри–Эссеена лишь на множитель $1+o(1)$. Показано, что константа в неравенстве типа Берри–Эссеена для статистики Стьюдента не может быть лучше, чем $1/\sqrt{2e}$. Установлено, что неравномерная оценка типа Берри–Эссеена для статистики Стьюдента неверна без дополнительных предположений.

Переходя к изложению недостатков работы, прежде всего следует отметить, что структура изложения, когда доказательства результатов выносятся в конец главы, не подходит для математического текста, скорее для текста где более важными являются приложения. Читать математический текст с такой структурой неудобно. Кроме того, важные для чтения определения (например, определение φ-перемешивания) определяются в приложении, далеко ниже их употребления, при этом не даются ссылки на место их определения. Это тоже существенно затрудняет чтение и понимание сути диссертации. Часть изложенных ниже других недостатков связана с таким стилем изложения.

- На стр. 8 последовательность событий B_n не определена, поэтому равенства (1.3) и предыдущие непонятны. Аналогичный недостаток замечен и в автореферате.
- Теорема 1.1: Из-за неудачного определения b (не указываются аргументы) плохо понятно, какое b имеется в виду в каждой из строчек. Впрочем, в приведенных (существенно ниже) доказательствах подобного недостатка нет.
- На стр. 51, теорема 2.6. Нет ссылки на определение расстояния d_G. Найти его в тексте чрезвычайно трудно.
- На стр. 152 в формулировке теоремы 5.1 не определена величина a. Ее роль непонятна даже из доказательства.
- В теореме 5.2, если положить координаты рассматриваемых случайных двумерных векторов равными друг другу с вероятностью единица, что не запрещается условиями, вероятность в формулировке становится индикаторной функцией, и утверждение второго абзаца после формулировки теоремы оказывается неверным. По-видимому, пропущено некое условие о невырожденности рассматриваемых двумерных векторов.

Таким образом, отмеченные недостатки в основном относятся к стилю изложения, а не к сути полученных результатов и не могут повлиять на общую оценку работы.

Все основные результаты диссертации являются новыми и математически строго доказанными фактами. Все выносимые на защиту результаты диссертации получены соискателем лично. Результаты диссертации представлены в 23 работах, опубликованных в ведущих российских и зарубежных журналах. Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание. На основании вышеизложенного, следует заключить, что представленная диссертация является научно-квалификационной работой, в которой содержится решение задач, имеющих существенное значение для теории вероятностей и математической статистики. Она удовлетворяет всем требованиям, указанным в Положении о порядке присуждения ученых степеней и предъявляемым к докторским диссертациям. Сам диссертант, Сергей Юрьевич Новак, является известным и весьма компетентным специалистом, он безусловно заслуживает присуждения ему степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика.

Официальный оппонент,
главный научный сотрудник Московского государственного университета им.М. В. Ломоносова доктор физ.-мат. наук профессор

27.01.2014 г В. И. Питербарг

Подпись профессора В. И. Питербарга заверяю.
и.о. декана механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова
профессор В.Н. Чубариков

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА (МГУ) ИНН 7729082090