На правах рукописи

КАЧКОВСКИЙ Илья Васильевич

ОТСУТСТВИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ В СПЕКТРЕ НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЁДИНГЕРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

специальность 01.01.03 – математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена в лаборатории математической физики федерального бюджетного учреждения науки Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской Академии Наук.

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, ст. н. с.
ФИЛОНОВ Николай Дмитриевич

Официальные оппоненты:

СУСЛИНА Татьяна Александровна,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой высшей математики и математической физики,
Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет

НАЗАРОВ Сергей Александрович
доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник лаборатории математических методов механики материала, Институт проблем машиноведения РАН

Ведущая организация:
Институт математики с вычислительным центром
Уфимского научного центра РАН

Защита состоится “_____” _____________ 2013 года в __________ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова РАН.

Автореферат разослан “_____” _____________ 2013 года.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук,

А.Ю. Зайцев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Спектральный анализ периодических операторов математической физики имеет как общетеоретическое, так и прикладное значение. В очень широких предположениях известно (теория Флоке–Блоха, см. [5]), что спектр периодического оператора имеет зонную структуру. Общая теория не исключает, однако, ситуации, когда какая-то зона вырождается в точку. Тогда у оператора возникает собственное значение бесконечной кратности. Наличие или отсутствие таких зон существенно отражается на выводах о физических свойствах рассматриваемой периодической структуры. Общепринятая точка зрения состоит в том, что в достаточно "регулярных" случаях вырожденных зон быть не должно. Обоснование этой гипотезы в каждом конкретном случае представляет собой сложную математическую задачу. Известно также, что в "нерегулярных" случаях бесконечнократные собственные значения могут возникнуть: в работе [10] построен пример оператора акустики с негладкими коэффициентами, имеющего в спектре вырожденную зону. Наличие определенных особенностей у коэффициентов вполне реалистично с точки зрения приложений. Поэтому важно уметь исключить наличие вырожденных зон при возможно более широких предположениях на коэффициенты.

Настоящая работа посвящена доказательству отсутствия собственных значений в спектре многомерного периодического оператора Шрёдингера в пространстве, в слое и в цилиндре. Электрический потенциал может содержать "сингулярную" составляющую в виде заряда, сосредоточенного на периодической системе гиперповерхностей. Такие потенциалы встречаются в теории фотонных кристаллов (см. [4, 9]). В случае оператора в слое и в цилиндре на границе ставится условие Дирихле, Неймана или краевое условие третьего типа. Коэффициенты в третьем краевом условии также предполагаются периодическими. Отсутствие собственных значений в спектре матричного несамосопряженного оператора Шрёдингера в слое или цилиндре с третьим краевым условием позволяет установить абсолютную непрерывность спектра периодического оператора Максвелла в соответствующих областях.

Цель работы. Целью диссертации является

1. доказательство отсутствия собственных значений в спектре оператора Шрёдингера с сингулярным электрическим потенциалом, сосредоточенным на периодической системе гиперповерхностей;

2. исследование случая цилиндра с сечением общего вида;

3. доказательство отсутствия собственных значений в спектре оператора Шрёдингера в прямоугольном и круговом цилиндрах с третьим краевым условием.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты.

1. Впервые доказана абсолютная непрерывность спектра многомерного оператора Шрёдингера с электрическим потенциалом, сосредоточенным на периодической системе гиперповерхностей, на которую не налагается никаких геометрических условий.

2. Установлено отсутствие собственных значений у оператора Шрёдингера в цилиндре с сечением общего вида при широких предположениях об электрическом потенциале.

3. Впервые доказана абсолютная непрерывность спектра оператора Шрёдингера в прямоугольном и круговом цилиндрах с третьим краевым условием.

Методика исследований. Мы следуем классической схеме Томаса, впервые использованной в [8]. Оператор Шрёдингера унитарно эквивалентен (разложение Флоке–Блоха–Гельфанда) прямому интегралу от некоторого семейства секториальных операторов $H(\xi)$ с дискретным спектром. Если одно из собственных значений оператора $H(\xi)$ постоянно по ξ, то у исходного оператора H это собственное значение является собственным значением бесконечной кратности. Если же таких собственных значений нет, то спектр оператора H абсолютно непрерывен. Таким образом, достаточно доказать отсутствие собственных значений, постоянных по ξ.

Идея Томаса состоит в аналитическом продолжении операторного семейства $H(\xi)$ в комплексную область по одной из компонент ξ. В силу аналитической альтернативы Фредгольма достаточно доказать, что при любом фиксированном λ оператор $H(\xi)-\lambda I$ обратим при достаточно большой мнимой части параметра ξ. Оценка нормы соответствующей резольвенты представляет основную техническую трудность и в каждом конкретном случае производится различными методами. В случае оператора с обычным электрическим потенциалом в цилиндре с липшицевой границей мы оцениваем действие свободного оператора в некотором анизотропном пространстве Соболева, а затем применяем теоремы вложения. В случае цилиндра с гладкой границей мы используем оценки спектральных проекторов оператора

Лапласа, полученные в [6]. Для оператора с сингулярным потенциалом во всем пространстве, в слое и в прямоугольном цилиндре мы применяем аналогичную схему, но основанную на оценках следов спектральных проекторов на гиперповерхностях, впервые полученных в [1]. Наконец, в случае кругового цилиндра используется явное выражение для собственных функций свободного оператора в терминах специальных функций, и оценки символа оператора опираются на известные результаты о расположении нулей функций Бесселя.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в дальнейшем для исследования спектра периодического оператора Максвелла, а также в физике твердого тела и в теории фотонных кристаллов.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на семинаре кафедры Высшей математики и Математической Физики СПбГУ (руководитель В. С. Буслаев), на Санкт-Петербургском семинаре им. В. И. Смирнова по математической физике (руководитель Н. Н. Уральцева), на семинаре по анализу Королевского колледжа Лондона (King's College, London), а также на конференциях: Дни дифракции (ПОМИ РАН, 2009 и 2010), Международная конференция по спектральной теории (ММИ им. Эйлера, 2009).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статьях [KF1, KF2, K] в российских журналах из Перечня ведущих рецензируемых журналов и изданий ВАК.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на разделы, и списка литературы. Объем диссертации – 127 страниц. Список литературы содержит 59 наименований.

Краткое содержание работы

Введение содержит общую постановку задачи, обзор ранее известных результатов об абсолютной непрерывности спектра, описание схемы Томаса, перечисление основных результатов диссертации и идей их доказательств, описание приложения результатов (оператор Максвелла) и формулировки нескольких открытых вопросов.

Глава 1. Схема Томаса доказательства абсолютной непрерывности спектра. Данная глава является вводной, в ней излагаются известные результаты. В разделе 1.1 формулируются необходимые сведения из теории секториальных форм и m-секториальных операторов. Даются определения голоморфного семейства типа (B) m-секториальных операторов с дискретным спектром и самосопряженного голоморфного семейства. Доказывается аналитическая альтернатива Фредгольма для таких семейств. Вводятся прямые интегралы

$$A = \int\limits_{\mathfrak{M}} \oplus A(x)\, d\nu(x),$$

ν-измеримых семейств самосопряженных или m-секториальных операторов $A(x)$. Доказываются теоремы 1.1.23 и 1.1.25 о структуре спектра таких семейств: если никакое $\lambda \in \mathbb{C}$ не является собственным значением операторов $A(x)$ на множестве положительной меры, то у оператора A отсутствуют собственные значения. Если семейство $A(x)$ дополнительно является самосопряженным аналитическим семейством, а $\mathfrak{M}$ – отрезок вещественной оси с мерой Лебега, то спектр оператора A является чисто абсолютно непрерывным.

В разделе 1.2 вводится оператор Шрёдингера

$$H = -\Delta + V(x) + \sigma(x)\delta_\Sigma(x) \tag{1}$$

в многомерном цилиндре $\Xi = U \times \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^d$, где $d = k + m \geqslant 3$, $U \subset \mathbb{R}^k$ – ограниченная область или гладкое компактное k-мерное многообразие с краем. При $k = 0$ подразумевается, что $\Xi = \mathbb{R}^d$. Предполагается, что система гиперповерхностей $\Sigma \subset \Xi$ периодична относительно решетки

$$\Gamma = \{l_1 b_1 + \ldots + l_m b_m, \quad l_j \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^m,$$

где $b_1, \ldots, b_m$ – некоторый базис в $\mathbb{R}^m$, а V и σ – Γ-периодические функции. Оператор (1) вводится с помощью квадратичной формы

$$h[u,u] = \int\limits_\Xi |\nabla u(x,y)|^2\, dx\, dy + \int\limits_\Xi V(x,y)|u(x,y)|^2\, dx\, dy + \int\limits_\Sigma \sigma(x,y)|u(x,y)|^2\, dx\, dy. \tag{2}$$

Областью определения формы h является пространство Соболева $H^1(\Xi;\mathbb{C}^N)$ или (в зависимости от краевых условий на $\partial\Xi$) некоторое замкнутое подпространство, плотное в $L_2(\Xi;\mathbb{C}^N)$. В терминах шкалы L_p, для самосопряженности/секториальности оператора H естественно предполагать

$$V \in L_{d/2,\mathrm{loc}}(\Xi, M_N(\mathbb{C})), \quad \sigma \in L_{d-1,\mathrm{loc}}(\Sigma; M_N(\mathbb{C})),$$

где через $M_N(\mathbb{C})$ обозначено пространство комплексных $N \times N$-матриц. Доказывается, что при этих условиях квадратичная форма h замкнута, секториальна и, следовательно, корректно определяет соответствующий оператор.

Вводится преобразование Флоке–Блоха–Гельфанда

$$(Fu)(\xi, x, y) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{l \in \Gamma} e^{-i\langle \xi, y+l \rangle} u(x, y+l), \quad (x, y) \in \Xi, \quad \xi \in \widetilde{\Omega},$$

где $\widetilde{\Omega}$ – элементарная ячейка решетки $\widetilde{\Gamma}$, двойственной к Γ. Доказывается, что оно продолжается до изометрического изоморфизма

$$F \colon L_2(\Xi) \to \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)\, d\xi$$

и частично диагонализует оператор H:

$$FHF^* = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \oplus H(\xi)\, d\xi,$$

где

$$H(\xi) = -\Delta_x + (\nabla_y + i\overline{\xi})^*(\nabla_y + i\xi) + V(x) + \sigma(x)\delta_\Sigma(x)$$

– оператор в $L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)$. Наконец, пусть

$$\widetilde{\Omega}' = \{\xi' \in \mathbb{R}^m \mid \xi' \perp b_1, \text{ и } \exists \xi_1 \in \mathbb{R} \colon (\xi_1 b_1 + \xi') \in \widetilde{\Omega}\}$$

– ограниченное множество в $\mathbb{R}^m$, являющееся проекцией $\widetilde{\Omega}$ на гиперплоскость, ортогональную b_1. Любой вектор $\xi \in \widetilde{\Omega}$ допускает однозначное представление в виде $\xi = \xi_1 b_1 + \xi'$, где $\xi_1 \in \mathbb{R}$, $\xi' \in \widetilde{\Omega}'$. Параметр ξ' фиксируется и изучается зависимость свободного оператора

$$H_0(\xi) = -\Delta_x + (\nabla_y + i\overline{\xi})^*(\nabla_y + i\xi)$$

от одномерного параметра ξ_1.

Условие A(q_1). *Для любых $\xi' \in \widetilde{\Omega}'$, $\lambda \in \mathbb{C}$ существует $\tau_0 > 0$, такое что при $\tau > \tau_0$*

$$\| |H_0((\pi/|b_1| + i\tau)b_1 + \xi')|^{-1/2} u\|_{L_{q_1}(U \times \Omega)} \leqslant C_1 \|u\|_{L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)}$$

равномерно по $u \in L_2(U \times \Omega; \mathbb{C}^N)$.

Условие B(q_2). *Для любых $\xi' \in \widetilde{\Omega}'$, $\lambda \in \mathbb{C}$ существует $\tau_0 > 0$, такое что при $\tau > \tau_0$*

$$\| |H_0((\pi/|b_1| + i\tau)b_1 + \xi')|^{-1/2} u\|_{L_{q_2}(\Sigma \cap (U \times \Omega))} \leqslant C_2 \|u\|_{L_2(U \times \Omega)}$$

равномерно по $u \in L_2(U \times \Omega)$, а также

$$\||H_0((\pi/|b_1| + i\tau)b_1 + \xi')|^{-1/2}u\|_{L_2(\Sigma\cap(U\times\Omega))} \leqslant C_3(\tau)\|u\|_{L_2(U\times\Omega)}$$

равномерно по $u \in L_2(U \times \Omega)$, где $C_3(\tau) \to 0$ при $\tau \to +\infty$.

Оказывается, что условия $\mathrm{A}(q_1)$ и $\mathrm{B}(q_2)$ удобно использовать в виде критериев отсутствия собственных значений. Следующая теорема является центральным результатом главы. Дальнейшие результаты диссертации сводятся к проверке условий теоремы 1.2.4 для различных случаев оператора (1).

Теорема 1.2.4. *Пусть оператор H задан секториальной формой (2) с V и σ, удовлетворящими*

$$V \in L_{p_1,\mathrm{loc}}(\Xi),\, p_1 \geqslant d/2, \quad \sigma \in L_{p_2,\mathrm{loc}}(\Sigma),\, p_2 \geqslant d-1.$$

Предположим, что семейство операторов $H_0(\xi)$ удовлетворяет условиям $\mathrm{A}(q_1)$ и $\mathrm{B}(q_2)$ с

$$2 \leqslant q_1 \leqslant \frac{2d}{d-2}, \quad 2 \leqslant q_2 \leqslant \frac{2(d-1)}{d-2}, \quad q_i = 2p_i'.$$

Тогда у оператора H нет собственных значений. Если $V(x,y) = V(x,y)^*$, $\sigma(x,y) = \sigma(x,y)^*$, то спектр оператора H абсолютно непрерывен.

Глава 2. Оценки сужений спектральных проекторов операторов Лапласа. В данной главе мы доказываем следующий вспомогательный результат для случая d-мерного тора $M = \mathbb{T}^d$.

Теорема 2.1.1. *Пусть M – гладкое компактное d-мерное риманово многообразие без края, $d \geqslant 3$. Пусть $\Sigma \subset M$ – компактная C^d-гладкая гиперповерхность (то есть подмногообразие размерности $d-1$). Пусть $E_\lambda = E_{-\Delta}[(\lambda-1)^2;\lambda^2)$ – спектральный проектор оператора Лапласа–Бельтрами на M. Тогда*

$$\|E_\lambda f\|_{L_r(\Sigma)} \leqslant C\lambda^{\frac{d-1}{2}-\frac{d-1}{r}}\|f\|_{L_2(M)}, \forall f \in L_2(M),\ \forall\lambda \geqslant 1, \qquad \frac{2d}{d-1} < r \leqslant +\infty.$$

Впервые он доказан в [1] для гиперповерхностей класса C^∞. Фактически глава 2 является подробным изложением доказательства [1], однако мы дополнительно следим за классами гладкости функций, возникающих в процессе доказательства.

В разделе 2.2 доказываем вспомогательные оценки для различных интегральных операторов. В разделе 2.3 доказывается основная оценка.

Теорема 2.3.1. *Для любой гладкой компактной C^d-гиперповерхности $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 3$, существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой функции $R \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp} R \subset \{x \in \mathbb{R}^d \colon \varepsilon \leqslant |x| \leqslant 2\varepsilon\}$, выполняется неравенство*

$$\Bigg\| \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{\pm i\lambda|x-y|} R(x-y) g(y)\, dy \Bigg\|_{L_r(\Sigma)} \leqslant C(R) \lambda^{-\frac{d-1}{r}} \|g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

$$\frac{2d}{d-1} < r \leqslant +\infty, \quad \lambda \geqslant 1.$$

В разделе 2.4 мы выводим теорему 2.1.1 из теоремы 2.3.1.

Глава 3. Случаи всего пространства, слоя и прямоугольного цилиндра. В данной главе рассматривается частный случай оператора H из главы 1. Он задается квадратичной формой

$$h[u,v] = \int\limits_{\Xi} \langle \nabla u(x,y), \nabla v(x,y) \rangle \, dx\, dy + \int\limits_{\Xi} \langle V(x,y) u(x,y), v(x,y) \rangle \, dx\, dy + \\ + \int\limits_{\Sigma} \langle \sigma(x,y) u(x,y), v(x,y) \rangle \, dS(x,y)$$

в $L_2(\Xi) = L_2(U \times \mathbb{R}^m)$, где $U = [0; a_1] \times \ldots \times [0; a_k] \subset \mathbb{R}^k$, $a_i > 0$, – параллелепипед в $\mathbb{R}^k$, $k \geqslant 0$, $d = k + m \geqslant 3$. При $k = 0$ область Ξ – это всё пространство, а при $k = 1$ – плоско-параллельный слой. Основным результатом является

Теорема 3.1.1. *Пусть $d = k + m \geqslant 3$, $m \geqslant 1$. Пусть $\Sigma \subset \Xi = U \times \mathbb{R}^m$ – Γ-периодическая система C^d-гиперповерхностей. Пусть $\sigma \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Sigma)$, $p > d-1$, и $V \in L_{d/2,\mathrm{loc}}(\Xi)$ – Γ-периодические функции. Тогда у соответствующего оператора H в $L_2(\Xi)$ нет собственных значений. Если $H = H^*$, то его спектр абсолютно непрерывен.*

При $\sigma = 0$ соответствующий результат для электрического потенциала V с оптимальным показателем $d/2$ известен. Доказательство соответствующего условия $A(q)$ дано в [2]. Для полноты изложения мы приводим его в разделе 3.3 (для цилиндра с периодическими краевыми условиями).

В случае ненулевого сингулярного потенциала теорема является новой. Подчеркнем, что на гиперповерхность Σ не накладывается никаких геометрических условий. В старших размерностях таких результатов известно не было. Соответствующее условие $B(q)$ доказывается в разделе 3.2 (для цилиндра с периодическими краевыми условиями). Доказательство основано на применении теоремы 2.1.1. Отметим также, что при $d \geqslant 3$ оптимальным показателем для σ в шкале L_p является $p = d - 1$. Таким образом, условие $p > d-1$ близко к оптимальному. В разделе 3.4 мы выводим теорему 3.1.1 из результатов, полученных для цилиндров с периодическими краевыми условиями.

Опишем основную идею доказательства условия B(q). Для простоты обозначений пусть $k = 0$, то есть оператор H является оператором во всем пространстве. Оператор $H_0(\tau)$ в базисе

$$\{|\Omega|^{-1/2} e^{iny}, \quad n \in \widetilde{\Gamma}\}$$

является оператором умножения на символ

$$h_n(\tau) = |n + \pi b_1 + \xi'|^2 - \tau^2 + 2i\tau\langle n + \pi b_1, b_1\rangle, \quad n \in \widetilde{\Gamma}.$$

Из теоремы 2.1.1 при $2 \leqslant q < \frac{2d}{d-1}$ следует оценка

$$\Big\| |H_0(\tau)|^{-1/2} u \Big\|_{L_q(\Sigma\cap\Omega)} \leqslant C \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^{1/2-\delta} \Big\| E_\mu |H_0(\tau)|^{-1/2} \Big\| \cdot \|E_\mu u\|_{L_2(\Omega)}.$$

Теорема 3.1.1 выводится из этой оценки, выражения для символа и следующей элементарной леммы:

Лемма 3.2.1. *Пусть* $0 < \delta < 1/2$, $b \geqslant 1$, *пусть* $|m_\mu| \leqslant b \ \ \forall \mu \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu^{1-2\delta}}{|(\mu + m_\mu)^2 - \tau^2| + \tau} \leqslant C(b,\delta)\tau^{-\delta}$$

при $\tau > 1$.

Глава 4. Случай электрического потенциала в цилиндрах с сечением общего вида. В данной главе установлено отсутствие собственных значений у периодического оператора Шрёдингера (в самосопряженном случае – абсолютная непрерывность спектра) с обычным электрическим потенциалом в случае, когда цилиндр $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$ не является прямоугольным. Методы главы 3, базирующиеся на явном виде собственных функций оператора Лапласа в ячейке, здесь неприменимы.

Напомним, что оператор H задается квадратичной формой

$$h[u,v] = \int\limits_{\mathbb{R}^m} a[u(\cdot,y), v(\cdot,y)]\,dy + \int\limits_{\Xi} \langle \nabla_y u(x,y), \nabla_y v(x,y)\rangle\,dx\,dy$$
$$+ \int\limits_{\Xi} \langle V(x,y)u(x,y), v(x,y)\rangle\,dx\,dy \quad (3)$$

в цилиндре $L_2(\Xi;\mathbb{C}^N)$, где $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$; U – ограниченная область в $\mathbb{R}^k$ с липшицевой границей. Потенциал V периодичен относительно решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ с элементарной ячейкой Ω. Квадратичная форма (3) определена на области $L_2(U; H^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}^N)) \cap L_2(\mathbb{R}^m; \mathrm{Dom}\, a)$. Предполагается, что форма a отвечает некоторому неотрицательному эллиптическому дифференциальному оператору A второго порядка в U.

Теорема 4.1.1. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ – ограниченная область с липшицевой границей, $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, $d = k+m \geqslant 3$. Пусть a – замкнутая неотрицательная квадратичная форма в $L_2(U;\mathbb{C}^N)$, такая что* $\mathrm{Dom}\, a$ *– замкнутое подпространство $H^1(U;\mathbb{C}^N)$,* $\mathrm{Dom}\, a \cap C^1(U;\mathbb{C}^N)$ *плотно в* $\mathrm{Dom}\, a$. *Пусть $V \in L_{d-1}(U \times \Omega; M_N(\mathbb{C}))$. Тогда в спектре оператора H, отвечающего квадратичной форме* (3)*, отсутствуют собственные значения. Если V самосопряжен, то спектр H абсолютно непрерывен.*

В частности, при $N = 1$ и

$$a[u,v] = \int_U \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx, \quad \mathrm{Dom}\, a = H_0^1(U) \text{ или } H^1(U)$$

получаем, что спектр обычного оператора Шрёдингера $H = -\Delta + V$ с условиями Дирихле или Неймана абсолютно непрерывен. В теореме 4.1.1 допускается достаточно негладкая (липшицева) граница. В случае гладкой границы и скалярного оператора H условия суммируемости на потенциал V можно немного ослабить.

Теорема 4.1.2. *Пусть $U \subset \mathbb{R}^k$ – ограниченная область с C^∞-гладкой границей, $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$, $d = k + m \geqslant 3$. Пусть $N = 1$, V – скалярная вещественная функция, $V \in L_p(U \times \Omega)$, где $p > d/2$ при $d = 3, 4$, $p > d - 2$ при $d \geqslant 5$. Тогда спектр оператора $H = -\Delta + V$ с краевыми условиями Дирихле или Неймана абсолютно непрерывен.*

В случае сечения общего вида вопрос об абсолютной непрерывности спектра оператора с сингулярным потенциалом и/или с третьим краевым условием остается открытым.

Согласно результатам главы 1, обе теоремы сводятся к проверке условий $\mathrm{A}(q)$ для соответствующих свободных операторов.

Теорема 4.1.3. *В условиях теоремы* 4.1.1 *оператор $H_0(\xi)$, построенный в главе* 1*, удовлетворяет условию* $\mathrm{A}(\frac{2d-2}{d-2})$.

Теорема 4.1.3 доказывается в разделе 4.2. Доказательство основано на теоремах вложения для анизотропных пространств Соболева. Теорема 4.1.3 используется в главе 5.

Теорема 4.1.4. *Пусть $N = 1$, $k \geqslant 2$, U – C^∞-гладкое компактное k-мерное риманово многообразие с краем или без края. Пусть a – квадратичная форма неотрицательного эллиптического дифференциального оператора второго порядка с гладкими коэффициентами и краевыми условиями Дирихле или Неймана. Тогда оператор $H_0(\xi)$, построенный в главе 1, удовлетворяет условию $\mathrm{A}(q)$ при $q < \frac{2d}{d-2}$, в случае, если U – многообразие без края (при любом d), и в случае, если U – многообразие с краем при $d = 3$ или $d = 4$. Если $d \geqslant 5$ и U – многообразие с краем, то условие $\mathrm{A}(q)$ выполняется с $q < \frac{2d-4}{d-3}$.*

Теорема 4.1.4 доказывается в разделе 4.3. Доказательство опирается на результаты [6], известные, по-видимому, только для скалярных операторов.

Опишем основные моменты доказательства теоремы 4.1.3. Пусть $\varphi_l(x)$ – собственные функции оператора A, заданного квадратичной формой $a[\cdot,\cdot]$ на области определения $\operatorname{Dom} a$, $A\varphi_l = \lambda_l \varphi_l$. Тогда в базисе

$$\varphi_{l,n}(x,y) = |\Omega|^{-1/2} e^{iny} \varphi_l(x)$$

оператор $H_0((\pi+i\tau)b_1+\xi')$, который мы будем сокращенно обозначать через $H_0(\tau)$, является оператором умножения на символ

$$h_{l,n}(\tau) = |n + \pi b_1 + \xi'|^2 - \tau^2 + \lambda_l + 2i\tau\langle n + \pi b_1, b_1\rangle, \quad n \in \widetilde{\Gamma}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Пусть

$$J_1 = \{(l,n) : |n + \pi b_1 + \xi'|^2 + \lambda_l \leqslant \frac{1}{2}\big(n^2 + \lambda_l + 1\big)\},$$
$$J_2 = \{(l,n) : n^2 + \lambda_l + 1 \leqslant 4\tau^2\},$$
$$J_3 = \{(l,n) : |n + \pi b_1 + \xi'|^2 + \lambda_l > \frac{1}{2}\big(n^2 + \lambda_l + 1\big) > 2\tau^2\}.$$

Основная часть доказательства теоремы 4.1.3 содержится в следующей лемме:

Лемма 4.2.2. *Пусть $u \in \operatorname{Dom}|H_0(\tau)|^{1/2}$, причем*

$$u(x,y) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{(l,n)\in J_2} u_{l,n}\varphi_l(x) e^{iny}$$

(подчеркнем, что суммирование только по J_2). Тогда

$$\|u\|^2_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega)} \leqslant C\||H_0(\tau)|^{1/2}u\|^2_{L_2(U\times\Omega;\mathbb{C}^N)}.$$

Аналогичные оценки для множеств J_1 и J_3 доказываются элементарно. Лемма 4.2.2 следует из двух оценок:

$$\|u\|^2_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}([0;1];H^1(U\times\Omega'))} \leqslant C\|u\|^2_{H^{1/2}([0;1];H^1(U\times\Omega'))} \leqslant C'\tau\||H_0(\tau)|^{1/2}u\|^2$$

и

$$\|u\|^2_{L_{\frac{2d-2}{d-2}}([0;1];L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))} \leqslant C\|u\|^2_{H^{1/2}([0;1];L_2(U\times\Omega'))} \leqslant C'\tau^{-1}\||H_0(\tau)|^{1/2}u\|^2,$$

где $\Omega = [0;1]\times\Omega'$, и неравенства

$$\|u\|^2_{L_q\left([0;1];L_{\frac{2d-2}{d-2}}(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)\right)} \leqslant C\|u\|_{L_q([0;1];H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))}\|u\|_{L_q([0;1];L_2(U\times\Omega';\mathbb{C}^N))},$$
$$\forall u\in L_q([0;1];H^1(U\times\Omega';\mathbb{C}^N)),\quad q\geqslant 2.$$

Теорема 4.1.4 доказывается аналогично теореме 3.1.1. Вместо результатов главы 2 в случае многообразия без края используется следующий результат, полученный в [7]:

Теорема 4.3.1. *Пусть M – C^∞-гладкое компактное риманово многообразие размерности d без края, A – эллиптический дифференциальный оператор второго порядка на M с гладкими коэффициентами. Пусть $E_\mu = E_A[(\mu-1)^2;\mu^2)$. Тогда*

$$\|E_\mu f\|_{L_2(M)} \leqslant C\mu^{d(1/p-1/2)-1/2}\|f\|_{L_p(M)},$$
$$\forall f\in L_p(M),\quad 1\leqslant p\leqslant \frac{2(d+1)}{d+3},\quad \mu\geqslant 1.$$

В случае, когда U – область в $\mathbb{R}^k$ или многообразие с краем, используется аналогичный (более слабый) результат для многообразия с краем, полученный в [6].

Глава 5. Оператор Шрёдингера в круговом цилиндре. В этой главе подробно изучается случай цилиндра, сечение которого $U = \{x\in\mathbb{R}^k\colon |x|\leqslant 1\}$ – k-мерный шар. С физической точки зрения наиболее интересен случай $k=2$, $m=1$, поэтому многие утверждения снабжаются явными формулами при $k=2$. Собственные функции оператора Лапласа в шаре известны – они явно выражаются через функции Бесселя. Благодаря этому, удается доказать отсутствие собственных значений для оператора Шрёдингера с третьим краевым условием. Однако, поведение собственных функций оператора Лапласа в шаре сложнее, чем поведение собственных функций в прямоугольном параллелепипеде. Поэтому получить оптимальные результаты не удается, и доказательства получаемых результатов технически более тяжелые. В частности, требуются тонкие оценки расположения нулей функций Бесселя.

Сформулируем основной результат в случае $d = 3$. Пусть $U \subset \mathbb{R}^2$ – единичный диск. Рассмотрим оператор в трехмерном цилиндре $\Xi = U \times \mathbb{R}$, действующий на вектор-функции $u = (u_a, u_r) \in L_2(U \times \mathbb{R}; \mathbb{C}^6)$ и отвечающий квадратичной форме

$$h_{2+1}[u,u] = \int\limits_{\Xi} |\nabla u(x,y)|^2 \, dx\, dy + \int\limits_{\Xi} \langle V(x,y)u(x,y), u(x,y)\rangle \, dx\, dy \\ + \int\limits_{\partial\Xi} \langle \sigma(x,y)u(x,y), u(x,y)\rangle \, dS(x,y)$$

на пространстве

$$\operatorname{Dom} h_{2+1} = \{(u_a, u_r) \in H^1(U; \mathbb{C}^6):\ u_{a,n}|_{\partial U\times\mathbb{R}} = 0,\, u_{r,\tau}|_{\partial U\times\mathbb{R}} = 0\}, \qquad (4)$$

где $u_{a,n}$ – нормальная компонента, а $u_{r,\tau}$ – тангенциальная компонента трехмерных векторных полей u_a, u_r.

Теорема 5.4.1. *Пусть $V(x, y + a) = V(x, y)$, $\sigma(x, y + a) = \sigma(x, y)$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$, и*

$$V \in L_{2,\mathrm{loc}}(U \times \mathbb{R}; M_6(\mathbb{C})), \quad \sigma \in L_{4,\mathrm{loc}}(\partial U \times \mathbb{R}; M_6(\mathbb{C}))).$$

Тогда у периодичекого оператора Шрёдингера, отвечающего форме h_{2+1}, нет собственных значений. Если V и σ самосопряжены, то его спектр абсолютно непрерывен.

Из теоремы 5.4.1 вытекает абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Максвелла в таком цилиндре. Размерность $N = 6$ соответствует тому факту, что электромагнитное поле шестимерно: три компоненты электрического поля и три – магнитного. Для работы с краевыми условиями (4) оказался удобен аппарат дифференциальных форм.

Теорема 5.4.1 является следствием более общего результата об операторе Лапласа, действующем на дифференциальные формы. Через $\Lambda^p(U)$ обозначим пространство всех дифференциальных p-форм на U, а через $L_2(\Lambda^p(U))$ и $H^1(\Lambda^p(U))$ – пространства форм с коэффициентами из $L_2(U)$ и $H^1(U)$ соответственно. Заметим, что выбором стандартного базиса данные пространства можно отождествить с $L_2(U; \mathbb{C}^{k(p)})$ и $H^1(U; \mathbb{C}^{k(p)})$, где $k(p) = \binom{k}{p}$.

Пусть $\iota^* \colon \Lambda^p(U) \to \Lambda^{p-1}(\partial U)$ – операция сужения формы на границу. Пусть также N – векторное поле на U, являющееся в окрестности ∂U единичным векторным полем, нормальным к границе, $i_N \colon \Lambda^p(U) \to \Lambda^{p-1}(U)$ – операция подстановки. В пространстве Соболева $H^1(\Lambda^p(U))$ выделим два подпространства

$$H^1_a(\Lambda^p(U)) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\eta \in H^1(\Lambda^p(U))\colon \iota^* i_N \eta = 0\},$$

$$H^1_r(\Lambda^p(U)) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \{\eta \in H^1(\Lambda^p(U))\colon \iota^* \eta = 0\}.$$

Соответствующие краевые условия будем называть *абсолютным* ($\iota^* i_N \eta = 0$) и *относительным* ($\iota^* \eta = 0$).

Предложение 5.2.1. *Квадратичная форма*

$$a[\eta, \eta] = \|d\eta\|^2_{L_2(\Lambda^{p+1}(U))} + \|\delta\eta\|^2_{L_2(\Lambda^{p-1}(U))} \tag{5}$$

в $L_2(\Lambda^p(U))$, заданная на области определения $H^1_a(\Lambda^p(U))$ или $H^1_r(\Lambda^p(U))$, замкнута и неотрицательна.

Для случая произвольного гладкого многообразия с C^2-гладкой границей оно доказано в [11].

Определение 5.2.2. *Оператор, отвечающий форме* (5) *с областью определения $H^1_a(\Lambda^p(U))$, называется оператором Лапласа на p-формах с абсолютным краевым условием и обозначается $-\Delta_a$. Оператор, отвечающий форме* (5) *с областью определения $H^1_r(\Lambda^p(U))$, называется оператором Лапласа на p-формах с относительным краевым условием и обозначается $-\Delta_r$.*

Оба оператора являются самосопряженными расширениями оператора

$$-\Delta = -(d\delta + \delta d),$$

изначально заданного на $C_0^\infty(\Lambda^p(U))$.

Мы рассматриваем матричный периодический оператор Шрёдингера, заданный квадратичной формой

$$\begin{aligned} h[u,v] = \int\limits_{\mathbb{R}^m} a[u(\cdot,y), v(\cdot,y)]\,dy + \int\limits_{\Xi} \langle \nabla_y u(x,y), \nabla_y v(x,y)\rangle\,dx\,dy \\ + \int\limits_{\Xi} \langle V(x,y)u(x,y), v(x,y)\rangle\,dx\,dy + \int\limits_{\Sigma} \langle \sigma(x,y)u(x,y), v(x,y)\rangle\,dS(x,y), \end{aligned} \tag{6}$$

в цилиндре $L_2(\Xi;\mathbb{C}^{k(p)})$, где $\Xi = U \times \mathbb{R}^m$. Квадратичная форма (6) определена на области

$$\operatorname{Dom} h = L_2(U; H^1(\mathbb{R}^m;\mathbb{C}^{k(p)})) \cap L_2(\mathbb{R}^m; \operatorname{Dom} a).$$

Теорема 5.3.1. *Пусть*

$$V \in L_{d-1}(U \times \Omega; M_{k(p)}(\mathbb{C})), \quad \sigma \in L_{4d-8}(\partial U \times \Omega; M_{k(p)}(\mathbb{C})).$$

Тогда в спектре оператора Шрёдингера, заданного формой (6), *где форма* $a[\cdot,\cdot]$ *задана* (5), $\operatorname{Dom} a = H^1_a(\Lambda^p(U))$ *или* $\operatorname{Dom} a = H^1_r(\Lambda^p(U))$, *отсутствуют собственные значения. Если дополнительно* V *и* σ *самосопряжены, то его спектр абсолютно непрерывен.*

По теореме 4.1.3 для оператора H выполняется условие $\mathrm{A}\big(\frac{2d-2}{d-2}\big)$. В силу теоремы 1.2.4 достаточно доказать следующее утверждение.

Теорема 5.3.2. *Пусть периодический оператор Шрёдингера задан формой* (6), *где форма* $a[\cdot,\cdot]$ *задана* (5), $\operatorname{Dom} a = H^1_a(\Lambda^p(U))$ *или* $\operatorname{Dom} a = H^1_r(\Lambda^p(U))$. *Тогда соответствующий оператор* $H_0(\xi)$, *построенный в главе* 1, *удовлетворяет условию* $B(\frac{8d-16}{4d-9})$.

Замечание 5.3.3. *В скалярном случае* $(p = 0)$ *условие на* V *можно ослабить до* $V \in L_q(U \times \Omega)$, $q > \max\{d/2, d-2\}$, $d \geqslant 3$.

В разделе 5.1 мы приводим нужные сведения из теории дифференциальных форм и явные выражения для некоторых операций над ними в случае шара. В разделе 5.2 описываем оператор Лапласа, действующий на p-формы. В разделе 5.3 формулируем основной результат. В разделе 5.4 описываем прикладной трехмерный случай. В разделе 5.5 исследуем нули функций Бесселя. В разделе 5.6 мы приводим выражение для собственных p-форм оператора Лапласа в k-мерном шаре, заимствованное из [3]. В разделе 5.7 мы оцениваем их следы на границе. В разделе 5.8 доказывается несколько технических лемм о символе оператора. Наконец, в последнем разделе 5.9 доказывается теорема 5.3.1.

Список литературы

[1] Burq N., Gérard P., Tzvetkov N. Restrictions of the Laplace–Beltrami eigenfunctions to submanifolds // Duke Math. J. 2007. Vol. 138. No. 3. P. 445–486.

[2] Danilov L. I. On absolute continuity of the spectrum of a periodic magnetic Schrödinger operator // J. Phys. A: Math. Theor. 2009. Vol. 42. No. 27. Article ID: 275204.

[3] Kirsten K. Spectral Functions in Mathematics and Physics // Chapman & Hall/CRC. 2002.

[4] Kuchment P., The mathematics of photonic crystals // SIAM J. Math. Mod. Opt. Sci. 2001. P. 207–272.

[5] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов // 1982. М., Мир.

[6] Smith H. F., Sogge C. D. On the L^p norm of spectral clusters for compact manifolds with boundary // Acta Math. 2007. Vol. 198. No. 1. P. 107–153.

[7] Sogge C. D. Concerning the L^p norm of spectral clusters for second-order elliptic operators on compact manifolds // J. Funct. Anal. 1988. Vol. 77. No. 1. P. 123–138.

[8] Thomas L. Time dependent approach to scattering from impurities in a crystal // Comm. Math. Phys. 1972. Vol. 33. P. 335–343.

[9] Figotin A., Kuchment P. Spectral properties of classical waves in high-contrast periodic media // SIAM J. Appl. Math. 1998. Vol. 58. No. 2. P. 683–702.

[10] Филонов Н. Д. Эллиптическое уравнение второго порядка в дивергентной форме, имеющее решение с компактным носителем // Пробл. мат. анал. 2001. СПб. Вып. 22. С. 246–257.

[11] Friedrichs K. Differential forms on Riemannian manifolds // Comm. Pure Appl. Math. 1955. Vol. VIII. P. 551–590.

Публикации автора по теме диссертации

[KF1] Качковский И. В., Филонов Н. Д. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера в многомерном цилиндре // Алгебра и анализ. 2009. Том 21. №2. С. 133–152.

[KF2] Качковский И. В., Филонов Н. Д. Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Шрёдингера в слое и в гладком цилиндре // Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 41. Записки научных семинаров ПОМИ им. В. А. Стеклова Российской академии наук. 2010. Том 385. С. 69–82.

[K] Качковский И. В. Теорема Стейна–Томаса для тора и периодический оператор Шрёдингера с сингулярным потенциалом // Алгебра и анализ. 2012. Том 24. №6. С. 124–138.