На правах рукописи

ПЕТРОВ
Андрей Николаевич

Операторы композиции и обратные оценки в пространствах Блоха

Специальность 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург
2013

Работа выполнена в лаборатории математического анализа ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН)

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ
доктор физико-математических наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории математического анализа ПОМИ РАН

Дубцов Евгений Сергеевич

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа Математико-механического факультета ФГБОУ ВПО "Санкт-Петербургский государственный университет"

Широков Николай Алексеевич

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры прикладной математики ФГБОУ ВПО "Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова"

Васин Андрей Васильевич

ВЕДУЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
ФГБОУ ВПО "Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ" им. В. И. Ульянова (Ленина)"

Защита диссертации состоится "______" ____________ 2013 года в ______ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 в ПОМИ РАН по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ПОМИ РАН.

Автореферат разослан "______" ноября 2013 года.

Учёный секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук А. Ю. Зайцев

1. Общая характеристика работы

Актуальность темы. Первый классический результат об операторах композиции на пространствах голоморфных функций — это принцип подчинения Литтлвуда [9]. После длительного перерыва, в 1980-ых годах наблюдался стремительный рост интереса к соответствующей тематике, находящейся на стыке теории функций и теории операторов. В случае одной комплексной переменной решения многих задач об операторах композиции были основаны на прорывной работе Дж. Х. Шапиро [11]. Разнообразные многомерные результаты, полученные в этот период, представлены в монографии К. К. Коуэна и Б. Д. МакКлюер [5].

Настоящая диссертация в первую очередь посвящена многомерным задачам об операторах композиции. За последние двадцать лет были опубликованы сотни работ на данную тему. Один из актуальных методов при изучении свойств операторов композиции — это конструктивный подход, основанный на доказательстве точных обратных оценок в рассматриваемых функциональных пространствах (см., например, [1, 6, 8, 10]). Отметим, что вопросы об обратных оценках также непосредственно связаны с актуальными задачами теории аппроксимации суммами модулей голоморфных и гармонических функций.

Цель работы. Доказать точные интегральные обратные оценки для логарифмических пространств Блоха в комплексном шаре. Использовать полученные оценки для исследования операторов композиции в случае одной или нескольких комплексных переменных. В частности, решить восходящую к работе П. Ахерна и У. Рудина [2] задачу об описании тех регулярных голоморфных символов, которые порождают ограниченные операторы композиции между пространствами Блоха и Харди в единичном комплексном шаре.

Методы исследования. Основной метод заключается в доказательстве и применении точных обратных оценок для рассматриваемых пространств голоморфных функций. Также используются общие методы многомерного комплексного анализа, классического анализа Фурье и линейного функционального анализа.

Основные результаты.

1. Получены интегральные обратные оценки для логарифмических пространств Блоха в комплексном шаре. Доказана точность этих оценок.

2. Получены новые количественные результаты о росте гиперболических градиентов голоморфных отображений.

3. Получены описания регулярных голоморфных символов, которые порождают ограниченные операторы композиции, действующие из пространства Блоха или пространства роста в заданное пространство Харди или весовое пространство Бергмана.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми.

Практическая и теоретическая ценность. Работа имеет теоретический характер. Методы и результаты диссертации могут быть применены в смежных областях теории функций и теории операторов.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались на Санкт-Петербургском семинаре по теории операторов и теории функций СПбГУ–ПОМИ РАН в 2012–2013 годах.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в трёх статьях [П1–П3] в научных журналах, включённых в Перечень ВАК.

Структура и объём работы. Диссертация состоит из введения и четырёх глав. Библиография содержит 33 наименования. Общий объём работы — 74 страницы.

2. Содержание работы

Во введении к диссертации даны основные определения, а также обоснован и сформулирован базовый вопрос об обратных оценках в пространствах голоморфных функций в круге и в комплексном шаре.

Пусть $H(\mathbb{D})$ обозначает пространство всех голоморфных функций в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Неубывающую непрерывную и неограниченную функцию $v : [0, 1) \to (0, +\infty)$ будем называть весовой функцией. Задача об обратных оценках естественным образом возникает для пространства роста $\mathcal{A}^v(\mathbb{D})$, которое состоит из функций $f \in H(\mathbb{D})$, удовлетворяющих условию

$$|f(z)| \leqslant Cv(|z|), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{1}$$

для некоторой константы $C > 0$. А именно, при изучении конкретных линейных операторов, заданных на пространстве $\mathcal{A}^v(\mathbb{D})$, часто оказываются полезными наборы тестовых функций, для которых в определённом смысле выполняется оценка, обратная к неравенству (1). Принцип максимума накладывает запрет на существование функции $f \in H(\mathbb{D})$ и весовой функции v, для которых верна непосредственная обратная оценка $|f(z)| \geqslant cv(|z|)$ при всех $z \in \mathbb{D}$. Тем не менее, задача оказывается разрешимой, если рассмотреть сумму модулей $|f_1(z)| + |f_2(z)|$. Действительно, если весовая функция v обладает свойством удвоения, то в силу результатов статьи [1] существуют функции $f_1,\ f_2 \in \mathcal{A}^v(\mathbb{D})$, такие что

$$|f_1(z)| + |f_2(z)| \geqslant v(|z|), \quad z \in \mathbb{D}.$$

Отметим, что первую теорему этого типа получили У. Рамей и Д. Улрич в работе [10] для весовой функции $v(t) = (1 - t^2)^{-1}$.

Результаты для пространств роста порождают естественный вопрос об обратных оценках в иных пространствах голоморфных функций. Диссертация посвящена соответствующим оценкам и их приложениям в том случае, когда функция f в неравенстве (1) заменена на производную f'. Для произвольной весовой функции w соответствующий аналог свойства (1) порождает весовое пространство Блоха $\mathcal{B}^w(\mathbb{D})$, состоящее из функций $f \in H(\mathbb{D})$, таких что

$$\|f\|_{\mathcal{B}^w(\mathbb{D})} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|f'(z)|}{w(|z|)} < \infty.$$

Если $w(t) = (1-t^2)^{-1}$, то пространство $\mathcal{B}^w(\mathbb{D})$ совпадает с классическим пространством Блоха $\mathcal{B}(\mathbb{D})$, для которого известны интегральные обратные оценки. Чтобы найти подобные оценки в весовом случае, в диссертации изучаются логарифмические мультипликативные возмущения базовой функции $w(t) = (1-t^2)^{-1}$. Более сильные возмущения не рассматриваются, так как они кардинально меняют основные свойства соответствующих весовых пространств.

Исследуемый вопрос об обратных оценках естественно распространяется на весовые пространства Блоха в единичном шаре $B_m = \{z \in \mathbb{C}^m : |z| < 1\}$, $m \geqslant 1$. Отметим, что в зависимости от ситуации для единичного круга в диссертации используется обозначение $\mathbb{D}$ или B_1.

Во введении также перечисляются и обсуждаются основные результаты диссертации, связанные с приложениями полученных обратных оценок к теории операторов композиции. Пусть $H(B_m)$ обозначает пространство всех голоморфных функций в шаре B_m. Для $n, m \geqslant 1$ каждое голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ порождает оператор композиции $C_\varphi : H(B_m) \to H(B_n)$ с помощью следующей формулы:

$$(C_\varphi f)(z) = f(\varphi(z)), \quad f \in H(B_m), \quad z \in B_n.$$

Центральными объектами для диссертации являются операторы композиции C_φ, заданные на логарифмических пространствах Блоха $L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$, $m \geqslant 1$. По определению, для $\alpha \in \mathbb{R}$ пространство $L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$

состоит из тех функций $f \in H(B_m)$, для которых

$$\|f\|_{L^\alpha\mathcal{B}(B_m)} = |f(0)| + \sup_{z\in B_m} |\mathcal{R}f(z)|(1-|z|^2)\left(\log\frac{e}{1-|z|^2}\right)^\alpha < \infty,$$

где

$$\mathcal{R}f(z) = \sum_{j=1}^m z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z), \quad z \in B_m,$$

обозначает радиальную производную функции f. Отметим, что функция $w_\alpha(t) = \dfrac{1}{1-t^2}\left(\log\dfrac{e}{1-t^2}\right)^{-\alpha}$ возрастает на промежутке $[0,1)$ при $\alpha \leqslant 1$. Если $\alpha = 0$, то $L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$ — это классическое пространство Блоха $\mathcal{B}(B_m)$.

Основная цель **главы 1** — предсказать и доказать точные обратные оценки в пространствах $L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$ при $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, $m \geqslant 1$. Отметим, что при $\alpha > \frac{1}{2}$ нетривиальные обратные оценки в пространстве $L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$ отсутствуют для всех $m \geqslant 1$.

Пусть $\mathbb{T} = \partial\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Предсказание точных обратных оценок в пространстве $L^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}(\mathbb{D})$ основано на следующем результате об операторах композиции.

Предложение 1 (предложение 1.1.3). *Пусть $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ является голоморфным отображением. Тогда следующие свойства равносильны:*

(2) *оператор C_φ действует из $L^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}(\mathbb{D})$ в $H^2(\mathbb{D})$;*

(3) $$\int_0^1 \frac{|\varphi'(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi(r\zeta)|^2)^2}\left(\log\frac{e}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\right)^{-1}(1-r)\,dr \in L^1(\mathbb{T});$$

(4) $$\sup_{0\leqslant r<1}\int_{\mathbb{T}} \log\log\frac{e}{1-|\varphi(r\zeta)|^2}\,d\sigma_1(\zeta) < \infty.$$

Доказательство сформулированного предложения проводится по схеме (2)$\Leftrightarrow$(3) и (3)$\Leftrightarrow$(4). С другой стороны, импликация (2)$\Rightarrow$(4) немедленно следует из существования функций $F_x \in L^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}(\mathbb{D})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, таких что $\|F_x\|_{L^{\frac{1}{2}}\mathcal{B}(\mathbb{D})} \leqslant 1$ и

$$\int_0^1 |F_x(w)|^2\,dx \geqslant \tau \log\log \frac{e}{1-|w|^2}, \quad w \in \mathbb{D}, \tag{5}$$

для некоторой константы $\tau > 0$.

При $\alpha < \frac{1}{2}$ аналогичным образом можно использовать функции $F_x \in L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\alpha < \frac{1}{2}$, такие что $\|F_x\|_{L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})} \leqslant 1$ и

$$\int_0^1 |F_x(w)|^2\,dx \geqslant \tau_\alpha \left(\log \frac{1}{1-|w|^2}\right)^{1-2\alpha}, \quad w \in \mathbb{D}, \tag{6}$$

для некоторой константы $\tau_\alpha > 0$.

Объединяя возможные оценки (5) и (6) для $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, приходим к следующим функциям от переменной $t \in [0,1)$:

$$\Psi_\alpha(t) = \begin{cases} \left(\log \dfrac{1}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha}, & \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ \left(\log\log \dfrac{e}{1-t}\right)^{\frac{1}{2}}, & \alpha = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \tag{7}$$

В главе 1 доказано, что оценки (5) и (6) действительно имеют место для подходящих тестовых функций в круге $\mathbb{D}$. Более того, следующая теорема (основной результат главы 1) гарантирует, что вид обратных оценок в пространствах $L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$ не зависит от размерности $m \geqslant 1$.

Теорема 2 (теорема 1.3.1)**.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $0 < p < \infty$, $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда существуют константа $\tau_{m,p,\alpha} > 0$ и функции $F_x \in L^\alpha\mathcal{B}(B_m)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, такие что $\|F_x\|_{L^\alpha\mathcal{B}(B_m)} \leqslant 1$ и*

$$\left(\int_0^1 |F_x(w)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant \tau_{m,p,\alpha}\Psi_\alpha(|w|^2), \quad w \in B_m. \tag{8}$$

Точность обратной оценки (8) доказана в разделе 1.5 с помощью новых неравенств для интегральных средних.

Глава 2 содержит непосредственные приложения обратных оценок, доказанных в главе 1.

Во-первых, с помощью доказанных обратных оценок получены новые ограничения на символ φ, порождающий непрерывный оператор C_φ из $L^\alpha\mathcal{B}(\mathbb{D})$ в пространство $\mathrm{BMOA}(\mathbb{D})$, состоящее из тех функций $f \in H^2(\mathbb{D})$, граничные значения которых имеют ограниченную среднюю осцилляцию.

Ещё одно непосредственное применение полученных обратных оценок — это количественная задача о росте гиперболических градиентов голоморфных отображений $\varphi : B_n \to B_m$. Соответствующая задача мотивирована следующим эвристическим принципом:

если гиперболический градиент отображения φ не растёт достаточно быстро, то отображение φ не является внутренним.

Следующая теорема количественным образом усиливает результаты, которые были получены в работах [3, 7, 12] для реализации сформулированного принципа.

Теорема 3 (теорема 2.2.3)**.** *Пусть n, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$, голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ таково, что*

$$(9) \qquad \frac{|\nabla\varphi(z)|}{1-|\varphi(z)|^2}\left(\log\frac{e}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{-\alpha} \leqslant \frac{\omega(1-|z|^2)}{1-|z|^2}, \quad z \in B_n,$$

где ω — неубывающая функция на $[0,1]$, $\omega(0) = 0$, $\int\limits_0 \frac{\omega^2(t)}{t}\,dt < \infty$. Пусть функция Ψ_α определена формулой (7). Тогда

$$(10) \qquad \int\limits_{\partial B_n} \exp\left(K\Psi_\alpha^2(|\varphi^*(\zeta)|^2)\right) d\sigma_n(\zeta) < \infty$$

для любого $K > 0$. В частности, $|\varphi^*| < 1$ σ_n-п.в.

Отметим, что условие $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$ в теореме 3 является точным.

Результаты **главы 3** показывают, что обратные оценки в классическом пространстве Блоха $\mathcal{B}(B_m)$ (т.е. теорема 2 для $\alpha = 0$) оказываются действенным инструментом при решении задачи об описании тех регулярных символов φ, для которых оператор C_φ переводит $\mathcal{B}(B_m)$ в пространство Харди $H^p(B_n)$ для заданного параметра $p > 0$. Отметим, что при $m = 1$ соответствующие описания известны и могут быть получены иными методами. В частности, при $m = 1$ Е. Г. Квон решил рассматриваемую задачу в терминах гиперболических классов Харди H^p_h. Для n, $m \in \mathbb{N}$ и $p > 0$ гиперболический класс Харди $H^p_h = H^p_h(B_n, B_m)$ по определению состоит из голоморфных отображений $\varphi : B_n \to B_m$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \int\limits_{\partial B_n} \beta^p_m(\varphi(r\zeta), 0)\, d\sigma_n(\zeta) < \infty,$$

где β_m обозначает метрику Бергмана на единичном шаре B_m.

При $m \geqslant 2$ задача об операторах композиции между пространствами Блоха и Харди существенно усложняется (соответствующие трудности подробно обсуждаются в работе [4], где исследуется смежный вопрос об операторах композиции между пространствами Блоха и BMOA). В диссертации рассматриваемая задача полностью решена для регулярных символов φ.

По определению голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ называется *регулярным*, если существуют константы $s \in (0, 1)$ и $\tau > 0$, такие что

$$|\langle \mathcal{R}\varphi(z), \varphi(z)\rangle| \geqslant \tau |\mathcal{R}\varphi(z)||\varphi(z)| \quad \text{при } s < |\varphi(z)| < 1.$$

Теорема 4 (теорема 3.4.10). *Пусть $0 < p \leqslant 1$ и голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ является регулярным. Тогда следующие свойства* *равносильны:*

(11) $$\int\limits_{\partial B_n} \left(\int\limits_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi(r\zeta)|^2}{(1-|\varphi(r\zeta)|^2)^2}(1-r)\,dr \right)^p d\sigma_n(\zeta) < \infty;$$

(12) *оператор* $C_\varphi : \mathcal{B}(B_m) \to H^{2p}(B_n)$ *ограничен;*

(13) $\varphi \in H^p_h(B_n, B_m)$.

Отметим, что в работе [4] также рассматриваются регулярные символы φ при изучении ограниченных и компактных операторов композиции $C_\varphi : \mathcal{B}(B_m) \to \mathrm{BMOA}(B_n)$, n, $m \in \mathbb{N}$. Однако доказательство теоремы 4 построено по совершенно иной схеме: используются обратные оценки и формула Грина. Именно такая схема приводит к явному условию (13), т.е. к описанию в терминах гиперболических классов Харди $H^p_h = H^p_h(B_n, B_m)$.

Утверждения, сходные с теоремой 4, получены в главе 3 для всех $p > 0$, а также для операторов композиции $C_\varphi : \mathcal{B}(B_m) \to A^{2p}_v(B_n)$, где $A^{2p}_v(B_n)$ — это достаточно малое весовое пространство Бергмана.

Для произвольного параметра $p > 0$ понятие регулярности будет модифицировано следующим образом:

голоморфное отображение $\varphi : B_n \to B_m$ называется ∇-*регулярным,* если существуют константы $s \in (0,1)$ и $\tau > 0$ такие, что

$$\left(\sum_{j=1}^n \left| \langle \frac{\partial\varphi}{\partial z_j}(z), \varphi(z) \rangle \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geqslant \tau |\nabla\varphi(z)||\varphi(z)| \quad \text{при} \quad s < |\varphi(z)| < 1.$$

Безусловно, все голоморфные отображения $\varphi : B_n \to B_1$ являются ∇-регулярными. Также отметим, что голоморфное отображение $\varphi : B_1 \to B_m$ является ∇-регулярным тогда и только тогда, когда оно регулярно.

Следующий результат обобщает теорему 4.

Теорема 5 (теорема 3.4.13). *Пусть* $0 < p < \infty$ *и* $\varphi : B_n \to B_m$ *является* ∇*-регулярным голоморфным отображением. Тогда* (11)$\Leftrightarrow$ (12) $\Leftrightarrow$(13).

Естественным продолжением главы 3 является заключительная **глава 4**, в которой рассматривается смежный вопрос об операторах композиции, действующих из пространств роста $\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)$ в пространства Харди и Бергмана.

Для $\beta > 0$ пространство роста $\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)$ по определению состоит из функций $f \in H(B_m)$, удовлетворяющих условию

$$\|f\|_{\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)} = \sup_{w \in B_m} |f(w)|(1 - |w|^2)^\beta < \infty.$$

В определённом смысле пространство Блоха $\mathcal{B}(B_m)$ можно считать продолжением шкалы $\{\mathcal{A}^{-\beta}(B_m)\}_{\beta > 0}$ в крайнюю точку $\beta = 0$.

В частности, в главе 4 доказан следующий аналог теоремы 4.

Предложение 6 (предложение 4.1.8). *Пусть* $\beta > 0$, $0 < p \leqslant 1$ *и голоморфное отображение* $\varphi : B_n \to B_m$ *является регулярным. Тогда следующие свойства равносильны:*

$$\int_0^1 \frac{|\mathcal{R}\varphi(r\zeta)|^2}{(1 - |\varphi(r\zeta)|^2)^{2\beta+2}} (1 - r)\, dr \in L^p(\partial B_n);$$

оператор $C_\varphi : \mathcal{A}^{-\beta}(B_m) \to H^{2p}(B_n)$ *ограничен*;

$$\sup_{0 \leqslant r < 1} \int_{\partial B_n} \left(\frac{1}{1 - |\varphi(r\zeta)|^2} \right)^{2p\beta} d\sigma_n(\zeta) < \infty.$$

Среди результатов главы 4 отдельно отметим одно интересное следствие о голоморфных отображениях в круг.

Следствие 7 (следствие 4.2.3). *Пусть K, $\alpha > 0$ и отображение $\varphi : B_n \to B_1$ голоморфно. Тогда справедливость свойства*

$$\int\limits_{B_n} \frac{|\mathcal{R}\varphi(z)|^\delta (1-|z|^2)^{\delta+\alpha-1}}{(1-|\varphi(z)|^2)^{\delta+K}}\, d\nu_n(z) < \infty \tag{14}$$

не зависит от параметра $\delta \geqslant 0$.

Иными словами, следствие 7 гарантирует совпадение гиперболических классов Бергмана, задаваемых условием (14) при различных $\delta \geqslant 0$.

Список литературы

[1] E. Abakumov and E. Doubtsov, *Reverse estimates in growth spaces,* Math. Z. **271** (2012), no. 1-2, 399–413.

[2] P. Ahern and W. Rudin, *Bloch functions, BMO, and boundary zeros,* Indiana Univ. Math. J. **36** (1987), no. 1, 131–148.

[3] A. B. Aleksandrov, J. M. Anderson, and A. Nicolau, *Inner functions, Bloch spaces and symmetric measures,* Proc. London Math. Soc. (3) **79** (1999), no. 2, 318–352.

[4] O. Blasco, M. Lindström, and J. Taskinen, *Bloch-to-BMOA compositions in several complex variables,* Complex Var. Theory Appl. **50** (2005), no. 14, 1061–1080.

[5] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions,* Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[6] P. M. Gauthier and J. Xiao, *BiBloch-type maps: existence and beyond,* Complex Var. Theory Appl. **47** (2002), no. 8, 667–678.

[7] M. J. González and A. Nicolau, *Multiplicative square functions,* Rev. Mat. Iberoamericana **20** (2004), no. 3, 673–736.

[8] E. G. Kwon and M. Pavlović, *BiBloch mappings and composition operators from Bloch type spaces to BMOA,* J. Math. Anal. Appl. **382** (2011), no. 1, 303–313.

[9] J. E. Littlewood, *On inequalities in the theory of functions,* Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1925), 481–519.

[10] W. Ramey and D. Ullrich, *Bounded mean oscillation of Bloch pull-backs.* Math. Ann. **291** (1991), no. 4, 591–606.

[11] J. H. Shapiro, *The essential norm of a composition operator,* Ann. of Math. (2) **127** (1987), 375–404.

[12] W. Smith, *Inner functions in the hyperbolic little Bloch class,* Michigan Math. J. **45** (1998), no. 1, 103–114.

Публикации автора по теме диссертации

[П1] А. Н. Петров, *Интегральные обратные оценки для логарифмических пространств Блоха в шаре,* Зап. научн. семин. ПОМИ **416** (2013), 124–135.

[П2] A. N. Petrov, *Reverse estimates in logarithmic Bloch spaces,* Arch. Math. (Basel) **100** (2013), no. 6, 551–560.

[П3] E. Doubtsov, A. N. Petrov, *Bloch-to-Hardy composition operators,* Cent. Eur. J. Math. **11** (2013), no. 6, 985–1003.