

ОТЗЫВ

официального оппонента о диссертационной работе Иванисвили Пааты "Функция Беллмана, аппроксимация, исправления", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Актуальность. Аппарат функций Беллмана зарекомендовал себя надежным и удобным средством получения точных оценок в важных неравенствах гармонического анализа, для оценок сингулярных интегралов, при описании пространства ВМО, весов Макенхаупта и многих других. Основные результаты в данной области принадлежат Вольбергу, Назарову, Треиллю и Васюнину, которые в основном завершили первый этап применения функций Беллмана для получения точных неравенств. В настоящее время (2008-2014) наступил этап систематизации и формализации результатов исследований, накопленных о функции Беллмана. Работа в данной области, в конечном счете, привела диссертанта к геометрическим построениям, как например, к исследованию минимальных вогнутых поверхностей с заданными граничными условиями. Такой геометрический подход к функции Беллмана и, вообще, к экстремальным задачам, связанным с исследованием, прежде всего, однородного уравнения Монжа-Ампера, существенно расширил область приложений вплоть до сложных мартингаловых неравенств Буркхольдера, что и определяет актуальность темы диссертации.

Теория интерполяционных пространств представлена в диссертации исследованием J -замкнутости наборов подпространств типа Харди в банаховых решетках. Подобные рассуждения о K -замкнутости (Кисляков, Кругляк, Q. Xu) пар пространств аналитических функций типа Харди в общих банаховых решетках имеет большое количество приложений как при исследовании самих пространств Харди, так и в теории операторов в этих пространствах. Поэтому сравнение двух видов замкнутости представляется актуальной задачей.

Последняя часть диссертации представляет собой вариации известной теоремы Меньшова об исправлении. Получение новых теорем об исправлении для компактных групп для различных видов редких спектров и различных видов равномерной сходимости актуально, поскольку является обобщением результатов Кислякова, Арутюняна.

Основные результаты. В первой части диссертации в п. 2.1 автор доказывает, что многие экстремальные задачи (например, предьявленная в пунктах 2.1.2 задача о вычислении констант равномерной выпуклости) сводятся к вопросам геометрического характера. Поэтому предварительно автор исследует общие свойства минимально вогнутых поверхностей, удовлетворяющих дифференциальному уравнению Монжа-Ампера. В пунктах 2.2.1-2.2.2 развивается аппарат для исследования такого рода поверхностей (постоянных вдоль семейства прямых), в частности, вводится удобное понятие фолиации, представляющее собой заполнение области определения семейством хорд со специальными свойствами.

Главным приложением развитой техники является вычисление точных оценок для квадратичных возмущений мартингалных преобразований. Заметив в пункте 2.3.3, что данная задача имеет геометрический характер, автор начинает кропотливое построение соответствующей функции Беллмана. Полуэмпирические наблюдения с использованием техники п.2.2 позволяют в п. 2.4 получить кандидата на истинную функцию Беллмана, после чего в п. 2.5 доказываем, что найденная функция и является требуемой. В п.2.6. автор доказывает теорему о точных оценках мартингалных преобразований Буркхольдера, заполняя все оставшиеся лакуны значений параметров. Отметим, что доказанная теорема имеет более общий характер. В п.2.7. автор предъявляет функцию Беллмана для задачи о равномерной выпуклости из п.2.2.2, как следствие даются точные оценки модуля равномерной выпуклости.

В п.3 автор исследует понятие J -замкнутости для подпространств типа Харди для банаховых решеток. Аналогичный результат относительно K -замкнутости известен. В п. 3.1. автор сравнивает два вида замкнутости для общих банаховых решеток. В последующих пунктах автор дает три различных доказательства для J -замкнутости пространств типа Харди в случае ВМО-регулярности соответствующих банаховых решеток. В п.3.1 (Лемма 3.1) автор доказывает «почти» эквивалентность двух видов замкнутости, на основании чего получает первое доказательство J -замкнутости наборов пространств типа Харди. В п.3.2. исследуется интересное свойство частичной ретракции, а в п.3.3. рассуждения используют двойственность.

Техника работы в направлении обобщений теоремы Меньшова начинается в п. 4.3.1. с определения специальных шаблонов для будущего построения редких множеств спектра исправленной функции, а также в п.4.3.2-4.3.3 базисов сходимости, исчерпывающих всю группу. В п.4.3.4. определяется важное условие согласованности шаблонов и базисов. Доказательство основной теоремы вначале в п.4.4.2. осуществляется для тригонометрических полиномов, а затем уже в п.4.4.4 завершается для произвольных функций.

Научная и практическая значимость. В диссертации доказаны следующие основные результаты:

- характеристика минимальных вогнутых функций, удовлетворяющих однородному уравнению Монжа-Ампера;
- построение функции Беллмана для экстремальных задач о возмущении квадратичного мартингалного преобразования Буркхольдера и равномерной выпуклости с вычислением точных оценок;
- доказательство J -замкнутости для подпространств типа Харди для ВМО-регулярных банаховых решеток;
- распространение теоремы Меньшова об исправлении на компактные группы для различных видов редких спектров и различных видов равномерной сходимости рядов Фурье.

Развитый в диссертации метод построения минимальных вогнутых функций имеет независимый интерес и найдет приложения для исследования экстремальных задач в теории сингулярных интегралов и мартингалных неравенств. Все построения автора проиллюстрированы на конкретных

примерах известных неравенств и оригинальных неравенств, доказанных автором. В частности, теорема 2.4 является обобщением известных результатов Васюнина, Вольберга, Boros, Janakiraman. В теореме 5.1 об исправлении допускаются не симметричные множества спектра для исправленной функции. Возможность различных выборов систем конечных множеств для равномерной сходимости из доказательства теоремы об исправлении важно для прикладных вопросов теории рядов Фурье.

Результаты, полученные диссертантом, являются новыми и достоверными, выводы и заключения обоснованы и отражены в 3 печатных работах автора в рецензируемых научных изданиях и в 4 препринтах, и неоднократно обсуждались на различных конференциях.

Диссертация и автореферат написаны хорошим, грамотным языком и аккуратно оформлены. Автореферат соответствует основному содержанию диссертации.

Замечания. Существенных недостатков в диссертации нет. Отметим лишь следующее:

1. Утверждается, что соображение, приведенное на с. 102, является основой доказательства эквивалентности интерполяционных J - и K -методов, что не является вполне правильным.
2. Неоднократно, например, на с. 31 автор предлагает читателю самому построить функцию Беллмана.

Недостатки не влияют на общую положительную оценку диссертации, которая является законченным научным исследованием.

Заключение. Таким образом, рецензируемая диссертация содержит новые научно обоснованные теоретические результаты, совокупность которых имеет важное значение для развития вещественного, комплексного и функционального анализа, и представляет завершённую научную работу. На основании вышеизложенного считаю, что работа “Функция Беллмана, аппроксимация, исправления” удовлетворяет всем критериям Положения ВАК о порядке присуждения ученых степеней к кандидатским диссертациям по математике, а ее автор, Иванисвили Паата, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Доцент кафедры прикладной математики Государственного университета морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова, кандидат физ.-мат. наук, доцент

Васин А.В.

