

"Утверждаю"

Проректор МГУ
имени М.В. Ломоносова

профессор А.А. Федянин



**ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ
о диссертации А.А. Воротова
"Свойства времени пребывания для
дискретных марковских процессов",**
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности 01.01.05 —
теория вероятностей и математическая статистика

Под дискретными марковскими процессами в диссертации А.А. Воротова понимаются марковские процессы с конечным или счетным множеством состояний, часто называемые, как и процессы с дискретным временем, цепями Маркова. Понятие времени пребывания служит для них аналогом локального времени Леви, введенного 75 лет назад для броуновского движения. Несмотря на то, что определение времени пребывания, в отличие от определения локального времени, можно сказать, лежит на поверхности, последнее стало предметом серьезных математических исследований существенно раньше, чем первое. Возможно, это отчасти объясняется тем, что при перенесении на времена пребывания классических результатов, касающихся локальных времен, часто возникает необходимость в неочевидной модификации самих формулировок. Это можно увидеть и в рецензируемой диссертации.

Работа А.А. Воротова состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Введение представляет собой вариант автореферата и содержит соответствующую информацию. Главы 1 и 2 также носят вводный характер: в них подробно описывается проблематика, касающаяся времен пребывания (в главе 1 — для цепей Маркова с дискретным временем, в главе 2 — с непрерывным временем) и формулируются известные результаты в этой области, используемые автором в последующих главах. Значительная часть этих результатов принадлежит его научному руководителю С.С. Валландеру, предпринявшему в 80-е годы прошлого века, по-видимому, первое систематическое исследование времен пребывания. Стоит заметить, что диссертант не всегда ограничивается формулировками, а изредка приводит и доказательства. В одних случаях это объясняется тем, что в дальнейшем он использует и промежуточные результаты, в других — тем, что доказательства отсутствуют в литературе и получены диссертантом самостоятельно.

Основное содержание диссертации сосредоточено в главах 3 – 5. Несколько огрубляя ситуацию, можно сказать, что в них рассматривается один и тот же объект — суммарная продолжительность пребывания цепи Маркова в некотором множестве состояний на отрезке времени от нуля до момента θ , который, как правило, является независимой от цепи случайной величиной с показательным распределением. Аналогичным образом описывалось локальное время для броуновского движения в ряде классических работ, и стремление по возможности сохранить это описание в работах С.С. Валландера и продолжающего его

исследования А.А. Воротова кажется вполне естественным, а решаемые в рецензируемой диссертации задачи представляются вполне актуальными.

Время пребывания $\tau(v)$ в каждом состоянии v рассматриваемой цепи Маркова является случайной величиной, так что совокупность этих величин образует случайное поле на множестве состояний. В диссертации главным образом решается вопрос о марковском свойстве этого поля для цепей Маркова с непрерывным временем (как показал С.С. Валландер, в случае цепей с дискретным временем это свойство отсутствует). Ответ существенно зависит от избранного определения (и часто оказывается, что ни при каком естественном определении этого свойства нет), а главным инструментом исследования служит функция Грина исходного процесса. Определение марковского свойства нельзя буквально заимствовать из работ, посвященных локальному времени, так как, в отличие от классического случая броуновского движения, пространство состояний процесса не является естественным образом упорядоченным. Эта трудность была в значительной мере преодолена в уже упомянутых работах С.С. Валландера, и диссертант пользуется предложенными там определениями, но он решает новые задачи, касающиеся новых, как правило, более общих ситуаций, поэтому иногда ему приходится и заново давать определение марковского свойства. Но в любом случае это свойство рассматривается не по отношению к исходной вероятностной мере — тогда его просто нет, а (в простейшем варианте) по отношению к мере \mathbf{P}_{ab} , которая определяется как условная мера при условии, что в начальный момент исходная цепь Маркова находится в состоянии a , а в "конечный" момент θ — в состоянии b .

В главе 3 доказывается марковское свойство поля времен пребывания для цепей с непрерывным временем. До работ диссертанта подобные результаты были известны лишь в случае цепей Маркова, у которых граф переходов (по определению, его ребра отвечают ненулевым интенсивностям) представляет собой дерево. А.А. Воротов пытается воспользоваться наивной на первый взгляд идеей получить произвольный граф переходов путем добавления новых ребер к дереву. Накладывая на интенсивности переходов естественные ограничения, он начинает с вопроса о том, как изменится функция Грина, если добавить конечное число новых ребер. На этот вопрос отвечает теорема 1, дающая явное выражение новой функции Грина через старую. Уже при доказательстве этой теоремы автору пришлось преодолеть некоторые трудности, в частности, обобщить известное тождество Доджсона из теории матриц. Однако для получения произвольного графа переходов требуется добавить бесконечное число новых ребер, поэтому предложенный подход кажется бесперспективным. Диссертанту удалось тем не менее найти остроумный выход из положения, заменив добавление новых ребер увеличением значений функции k на множестве вершин, с помощью которой формулируется марковское свойство. Результат сформулирован в виде теоремы 2, утверждающей, что если граф переходов связан и содержит вместе с каждым своим ребром (a, b) также и ребро (b, a) , то в каждой необходимой вершине v этого графа поле времен пребывания является марковским (необходимой называется вершина, после удаления которой граф переходов распадается на несколько компонент связности, а марковость в необходимой вершине v понимается как условная независимость поведения поля на этих компонентах при условии, что задано его значение в точке v , которое понимается как "настоящее").

Глава 4 посвящена вопросу о возможности обобщения результатов предыдущей главы на случай, когда "настоящее" понимается как значение поля не в одной вершине, а в нескольких. Вначале диссертант проводит кропотливое исследование функции Грина, показывая, что если граф переходов отличен от дерева, то приемлемых с точки зрения применения к упомянутому вопросу о марковости явных формул для этой функции, вообще говоря, не су-

ществует. Что касается самого марковского свойства поля времен пребывания в множестве вершин, то ранее было известно, что оно имеет место, если одна из этих вершин необходима. Вопрос о необходимости самого этого условия оставался открытым, хотя существовали примеры отсутствия марковского свойства. Ответ на этот вопрос дает теорема 3, согласно которой даже в случае двух вершин, которые являются необходимыми в совокупности, марковское свойство поля времен пребывания имеет место только тогда, когда одна из этих вершин необходима.

Глава 4 содержит и ряд других интересных результатов, касающихся, в частности, конкретных примеров (один из них — граф переходов типа "лестницы", другой — простейший пример случайного блуждания в случайной среде), отсутствия в сколько-нибудь общем случае марковского свойства у поля переходов даже при возможной модификации определения этого свойства, а также несколько полезных замечаний.

Заключительная глава 5, как и некоторые из предыдущих разделов диссертации, посвящена доказательству "теорем единственности", утверждающих, что марковское свойство поля времен пребывания может иметь место лишь при единственном из некоторой совокупности возможных предположений об исходной цепи Маркова или единственном понимании этого свойства. Но название главы, говорящее о неоднородных цепях, не полностью соответствует ее содержанию: в параграфе 5.1 получен интересный результат, касающийся однородных цепей с непрерывным временем. Он состоит в том, что показательное распределение случайной величины θ — "времени наблюдения" — необходимо для наличия у поля времен пребывания марковского свойства даже при традиционном понимании "настоящего" как значения поля в отдельной вершине.

Неоднородные цепи Маркова рассматриваются в параграфе 5.2. Здесь доказано отсутствие марковского свойства у поля времен пребывания для цепи Маркова с непрерывным временем, интенсивности которой принимают одни значения (не зависящие от времени) до некоторого неслучайного момента T и другие значения после T . Нет оснований полагать, что в более общей ситуации марковское свойство может появиться.

Приведенный краткий обзор диссертации показывает, что в ней решено несколько трудных задач в классической области теории вероятностей, где на протяжении десятилетий работали сильные отечественные и зарубежные исследователи. Тем не менее эти задачи, несмотря на вполне естественную постановку по крайней мере части из них, оставались нерешенными. Диссертант в совершенстве овладел существующими методами исследования и внес вклад в их развитие. При этом он проявил "аналитическое бесстрашие" при проведении большого числа громоздких вычислений (причем в ряде случаев реальные вычисления существенно сложнее, чем то, что можно увидеть на страницах диссертации, где часто сообщается лишь результат).

Текст работы написан аккуратно и хорошим языком, хотя изредка все же встречаются фразы, допускающие двойное толкование, языковые погрешности и опечатки. В некоторых местах лаконичность кажется излишней. С другой стороны, наличие заключения, содержащего список результатов, можно только приветствовать.

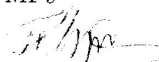
Оценивая диссертационную работу А.А. Воротова в целом, следует констатировать, что она представляет собой законченное математическое исследование, значимость которого для теории цепей Маркова несомненна. Изложенные результаты являются новыми, а иногда неожиданными, и все они снабжены строгими доказательствами. Эти результаты опубликованы в трех статьях в журналах из списка ВАК. Работа А.А. Воротова полностью

удовлетворяет требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.05, и ее автор заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Автореферат диссертации полно и правильно отражает ее содержание.

Было бы целесообразно использовать и продолжать эти исследования в Санкт-Петербургском государственном университете, МГУ им. М.В. Ломоносова, Новосибирском государственном университете, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН и его Санкт-Петербургском отделении, Институте проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН.

Доктор физ-мат наук профессор кафедры математической статистики и случайных процессов механико-математического факультета МГУ

 Гуревич Борис Маркович

Адрес: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы.

Телефон: 84959392090

Отзыв обсужден и одобрен на заседании кафедры математической статистики и случайных процессов мех-мат ф-та МГУ (протокол № 07 от 5 марта 2011 г.)

Ученый секретарь кафедры математической статистики и случайных процессов
доцент

 Прохоров А.В.

Лучинский Гуревичам Т.И. и
Тихомирову А.В. заверено:

Секретарь мех-мат ф-та МГУ,
/ Зависимо

