ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА

о диссертации Цилевич Наталии Владимировны «Асимптотическая теория унитарных представлений симметрических групп и ее приложения», представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Предметом диссертационной работы является решение ряда задач теории бесконечномерных представлений. А именно, изучаются различные классы представлений бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ и рассматриваются их приложения к другим областям, прежде всего к задачам математической физики. Важную роль в работе играет, с одной стороны, индуктивный подход к изучению бесконечномерных объектов, а с другой — пространство Фока и его различные реализации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы.

Асимптотическая теория представлений бесконечных групп и бесконечномерных алгебр — важная область современной теории представлений, бурно развивающаяся на протяжении последних десятилетий и обладающая, в частности, множеством глубоких и красивых связей с другими областями математики, такими как математическая физика и теория вероятностей. С другой стороны, пространство Фока есть чрезвычайно важный объект, который в квантовой механике служит для описания пространства состояний системы, состоящей из переменного числа элементарных частиц; значение его для математики заключается прежде всего в том, что в нём каноническим образом реализуются представления многих бесконечномерных алгебр, таких как алгебры Каца–Муди, алгебра Гейзенберга, алгебра Клиффорда, алгебра Вирасоро и т.п. Кроме того, пространство Фока обладает множеством важных связей с теорией случайных процессов, теорией симметрических функций и др.

В первой главе диссертации изучаются различные классы представлений бесконечной симметрической группы. Среди множества результатов, полученных в этой главе, я хотел бы подробнее остановиться на результатах, изложенных в первых двух параграфах. Первый параграф посвящен распространению классической двойственности Шура–Вейля на бесконечномерный случай. Классическая двойственность Шура–Вейля, которая устанавливает связь между неприводимыми представлениями общей линейной группы $GL(l,\mathbb{C})$ и симметрической группы $\mathfrak{S}_N$ в пространстве $(\mathbb{C}^l)^{\otimes N}$, является одним из исторически первых примеров связей между теорией представлений симметрических групп и теорией представлений групп и алгебр, играющих важную роль в физических приложениях. Новизна предлагаемого в диссертации подхода состоит в том, что, следуя общей идеологии асимптотической теории представлений, рассматривается не одна схема Шура–Вейля с фиксированными параметрами l и N, а соотношения между такими схемами с различными N, что позволяет впоследствии рассмотреть предел при $N \to \infty$ и получить двойственность между представлениями алгебры $\mathfrak{sl}_2$ и бесконечной симметрической группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$. В работе вводится и изучается класс представлений группы $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, возникающих в рамках этой схемы и названных представлениями Шура–Вейля, описывается их структура, находятся их спектральные меры относительно алгебры Гельфанда–Цетлина, приводятся примеры их применений.

В частности, одно важное и интересное применение представлено во втором параграфе. А именно, там доказывается, что одно из представлений Шура–Вейля, названное серпантинным представлением, тесно связано с представлениями бесконечномерных алгебр, играющих важную роль в квантовой теории поля: базисным представлением аффинной алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{sl}_2}$ и представлениями алгебры Вирасоро с центральным зарядом 1. Следует отметить, что в недавнее время в математической и физической литературе (И. Френкель, Ю. Салер и др.) появились гипотезы об аппроксимации представлений алгебры Вирасоро представлениями алгебры Темперли–Либа (которые в рассматриваемом случае по существу совпадают с представлениями симметрических групп). Полученные в диссертации результаты являются одними из первых строгих результатов в этом направлении.

Во второй главе диссертации исследуются связи теории представлений с теорией вероятностей. В первом параграфе доказана квазиинвариантность общего гамма-процесса относительно группы умножений на функции с суммируемым логарифмом. Этот факт тесно связан с теорией представлений групп токов и позволяет получить множество интересных следствий. Во втором параграфе изучаются т.н. гильбертовы факторизации в пространствах квадратично интегрируемых функционалов над общими процессами с независимыми значениями, т.е. структура непрерывного тензорного произведения в этих пространствах, идея которого восходит к классическим работам Дж. фон Неймана. В бозонном пространстве Фока такая структура строится естественным образом, а классический результат И. Сигала дает реализацию пространства Фока как пространства квадратично интегрируемых функционалов над гауссовским белым шумом; таким образом, структура фоковской факторизации возникает в пространстве L^2 над белым шумом. Основной результат второй главы диссертации состоит в том, что структурой фоковской факторизации обладают пространства L^2 над произвольным процессом с независимыми значениями, причём единственным инвариантом относительно естественным образом определяемого изоморфизма факторизаций является мощность носителя меры Леви процесса. Полученные явные формулы для изоморфизма факторизаций в некотором смысле являются аналогами классического бозон-фермионного соответствия, так как они также описывают изоморфизм между различными моделями фоковского пространства.

Третья глава диссертации посвящена приложениям теории представлений симметрических групп и теории симметрических функций к исследованию интегрируемых моделей. Изучение связей квантовых интегрируемых моделей с перечислительной комбинаторикой — актуальная область, привлекающая значительный интерес на протяжении последних десятилетий. Одним из богатых источников таких связей является квантовый метод обратной задачи (КМОЗ) — мощный метод для исследования интегрируемых моделей квантовой теории поля и статистической физики, разработанный Л. Д. Фаддеевым и его школой. В диссертации дано математически строгое описание реализации КМОЗ для фазовой и q-бозонной модели в алгебре симметрических функций. Полученная реализация позволяет выразить волновые функции указанных моделей через симметрические функции Шура и Холла–Литлвуда соответственно, получить представления операторов рождения и уничтожения в пределе, когда число узлов решетки стремится к бесконечности, в виде вертексных операторов, установить их связь с операторами, использующимися для вычисления корреляционных функций трехмерных диаграмм Юнга, и др. Эти результаты устанавливают важные связи между КМОЗ для данных моделей с одной стороны и теорией симметрических функций/комбинаторикой диаграмм Юнга с другой стороны, которые могут эффективно использоваться в обоих направлениях.

Во втором параграфе третьей главы рассматривается другая интегрируемая модель — классическая изотропная цепочка Гейзенберга. Предлагаемый подход опять основан на использовании двойственности Шура–Вейля, которая позволяет выразить гамильтониан этой модели через специальный элемент групповой алгебры симметрической группы — т.н. оператор Кокстера–Лапласа — и применять теорию представлений симметрических групп для исследования асимптотических спектральных свойств этого оператора. Среди полученных результатов отмечу следующий. Известно, что при $N \to \infty$ максимальное собственное число антиферромагнитной изотропной цепочки Гейзенберга на N узлах растёт линейно с известным коэффициентом $c_{\max}$, однако интересной задачей является «актуализация» этого предела, т.е. нахождение предельной модели с собственным числом $c_{\max}$. В диссертации показано, что с помощью обобщенных вложений Шура–Вейля, введенных в первой главе, можно построить модель с собственным числом, сколь угодно близким к $c_{\max}$.

Несколько мелких замечаний.

- В формулировке леммы 3.2 на стр. 167 используется не совсем стандартный термин «оператор рождения свободного бозона».
- В определении 3.1 на стр. 178 вместо «будем называть оператор» лучше было бы написать «будем называть элемент групповой алгебры».
- Формально не дано определение «основного состояния» цепочки Гейзенберга, что в математической работе стоило бы сделать.
- На стр. 189 говорится о «тождественном представлении», в то время как ранее использовался термин «единичное представление».
- Последние два замечания представляют собой скорее пожелания относительно дальнейшей работы. Во-первых, было бы очень интересно посмотреть, в какой степени результаты §§ 1.1, 1.2 распространяются на случай $n > 2$.
- Во-вторых, при взгляде на серию результатов относительно слабых пределов нормализованных операторов Кокстера–Лапласа в различных представлениях (предложения 3.5–3.8), напрашивается идея попробовать установить какой-нибудь общий результат подобного рода о скалярности предельного оператора при некоторых условиях на цепочку представлений.

Однако указанные замечания носят чисто редакционный характер и не влияют на общую положительную оценку диссертации.

Говоря о диссертации в целом, хочется дополнительно отметить широту применяемых методов и идей, которую демонстрирует автор: хотя центральную роль в работе занимает асимптотическая теория представлений и ее инструменты, автор также активно использует технику теории случайных процессов, теории интегрируемых систем и других областей, устанавливая важные и интересные взаимосвязи между ними.

Диссертация ясно и хорошо написана. Все основные результаты являются новыми, достоверными научными фактами и снабжены математически строгими доказательствами. Они полностью и своевременно опубликованы в рецензируемых научных журналах, индексируемых в международной реферативной базе данных MathSciNet (14 публикаций), неоднократно докладывались на российских и международных семинарах и конференциях. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы как в самой асимптотической теории представлений, так и в других затронутых областях, таких как теория процессов с независимыми значениями или теория интегрируемых систем.

Заключение. Диссертационная работа «Асимптотическая теория унитарных представлений симметрических групп и ее приложения» Цилевич Наталии Владимировны представляет собой законченное научное исследование на актуальную тему, которое можно квалифицировать как существенный вклад в теорию представлений, и удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к докторской диссертации, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ.

ведущий научный сотрудник
ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский
национальный исследовательский университет
информационных технологий, механики и оптики»,
профессор математического факультета
Калифорнийского университета (Беркли, США)

доктор физ.-мат. наук Николай Юрьевич Решетихин

Почтовый адрес:
Международная лаборатория
«Современные коммуникационные технологии
и их приложения в экономике и финансах»
ФГАОУ ВО «СПбНИУ ИТМО»
199034, г. Санкт-Петербург, Биржевая лин., д. 16.
Телефон: +7(812)457-18-21,
Электронная почта: reshetik@math.berkeley.edu

Подпись
удостоверяю
Специалист ОК
Университета И