ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
о диссертации Д.М. Столярова "Дифференциальные операторы и анализ Фурье: теоремы вложения с предельным показателем и их приложения" на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

В тематике работы можно выделить три сюжета, тесно связанные друг с другом (во втором и третьем применяются результаты первого). Первый сюжет – развитие соболевских теорем вложения. Классическая однородная теорема вложения Соболева утверждает, что пространство Соболева $W_p^l(\mathbb{R}^d)$ вкладывается в $L_q(\mathbb{R}^d)$ при $p \in (1, \frac{d}{l})$ и $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{l}{d}$. Развитию этого результата посвящена обширная литература. В частности, рассматривались классы функций с производными "нецелого порядка", анизотропные аналоги пространства Соболева, вложения в пространства, отличные от L_q, теорема распространялась на случай предельного показателя $p = 1$ (С.М. Никольский, Ильин, Бесов, Гальярдо, Ниренберг, Слободецкий, Солонников, Коляда и другие). Важный шаг в дальнейшем развитии теории был сделан Бургейном и Брезисом (2002), рассмотревшим свойства решений уравнения $\operatorname{div} u = f$, $f \in L_d(\mathbb{R}^d)$. В терминах теорем вложений это означает, что (при $p = 1$) функции заменяются векторными полями, а частные производные – некоторыми дифференциальными операторами. В настоящее время эта тематика активно разрабатывается многими авторами. Поэтому актуальность предпринятого Д.М. Столяровым исследования не вызывает сомнений.

Один из основных результатов диссертации – теорема 1.2.1 – утверждает, что уравнение $Af = \mu$ имеет единственное решение $f = (f_1, \ldots, f_N)$, а также дает оценку соболевских норм функций $f_1, \ldots, f_N$. Здесь A – определенный в теореме 1.2.1 анизотропно однородный дифференциальный оператор и μ – заданная векторная мера, компоненты которой удовлетворяют некоторым условиям. Оператор A и соболевская норма зависят от параметров k и l. Этот результат лежит на пересечении исследований ван Шафтингена и Солонникова. Ван Шафтинген охарактеризовал однородные дифференциальные операторы, для которых упомянутая оценка норм имеет место. Но его результат покрывает теорему 1.2.1 лишь при $k = l$. Теорема Солонникова дает теорему 1.2.1 лишь при $N = 1$. В общем случае теорема 1.2.1 является оригинальным важным результатом, не сводящимся к ранее известным. Автор уделяет большое внимание развитию методов доказательств не только потому, что его рассуждение на ряде этапов существенно отличается от аргументов предшествующих авторов. Он рассматривает теорему 1.2.1 как этап большого проекта: в общем случае совместить упомянутые выше исследования ван Шафтингена и точность теорем вложения Солонникова и Коляды, доказанные ими при $N = 1$. Доказательство теоремы 1.2.1 проводится в максимально общем виде. Полученная в §2.2 общая теорема 2.2.1 позволяет вывести теорему 1.2.1, а также применяется в главе 3 при изучении изоморфности банаховых пространств. Отметим, что идеи и техника доказательств убедительно свидетельствуют о таланте и математической зрелости автора.

Одним из средств, позволивших Гальярдо и Ниренбергу еще в 1959 г. распространить теоремы вложения Соболева на случай предельного показателя $p = 1$, были билинейные неравенства. Этот инструмент применялся и другими авторами. Поэтому совершенно понятен интерес автора к далеко идущим обобщениям неравенства Гальярдо-Ниренберга – см. неравенство (1.2.3), зависящее от шести параметров $k, l, \alpha, \beta, \sigma, \tau$. В §§ 2.3, 2.4 предпринято впечатляющее исследование вопроса о том, при каких значениях параметров неравенство (1.2.3) имеет место. При определенных дополнительных предположениях относительно k, l, σ, τ ("эллиптический случай") получены необходимые и достаточные условия (теорема 1.2.4), а без этих условий – как положительные (теорема 1.2.5), так и отрицательные (лемма 2.4.6). Рассматриваются и некоторые смежные вопросы, например, ослабленный аналог неравенства (1.2.3) (квадратичное неравенство (2.5.1)), аналог теоремы 1.2.1 для тора (теорема 2.5.10)) и другие.

Описанных выше результатов, а также навыков и эрудиции, проявленных при их доказательстве, уже с лихвой бы хватило для присуждения автору искомой ученой степени. Но в рассматриваемой работе это лишь первый из трех основных сюжетов.

Второй сюжет относится к классической проблематике об изоморфности банаховых пространств; более конкретно, о неизоморфности банахова пространства $C^P(\mathbb{T}^d)$ – пополнения множества тригонометрических полиномов на d-мерном торе $\mathbb{T}^d$ по равномерной норме, порожденной семейством P дифференциальных полиномов – пространству $C(K)$. Еще в 1975 г. С.В. Кисляков установил связь между теоремами такого типа и соболевскими теоремами вложения с предельным показателем $p = 1$. Но во всех предыдущих работах рассматривались лишь очень специальные семейства P. В диссертации проводится обстоятельное исследование вопроса о том, для каких семейств P пространство $C^P(\mathbb{T}^d)$ не вкладывается дополняемо в $C(K)$ (и, следовательно, указанный изоморфизм не имеет места). Отметим, что обстоятельность исследования и изложения – характерная черта всей диссертации в целом. Описательно говоря, теорема 1.2.9 и ее более общий аналог теорема 3.1.3 утверждают, что если среди полиномов P_j из P в определенном смысле нет старшего, то нет и указанного выше вложения (и изоморфизма). В теореме 3.3.9 даются достаточные условия, при которых изоморфизм пространств $C^P(\mathbb{T}^d)$ и $C(\mathbb{T}^d)$ имеет место. И хотя проведенное глубокое исследование нельзя назвать исчерпывающим (имеются семейства P, не подпадающие ни под теорему 1.2.9, ни под теорему 3.3.9), оно дает много новой информации для понимания существа вопроса. Впечатляет набор средств, использованный автором: помимо теоремы 2.2.1 (ранее примененной для вывода теоремы 1.2.1), здесь широкий спектр понятий, результатов и методов теории банаховых пространств и теории операторов.

Наконец, третий сюжет – о хаусдорфовой размерности векторных мер на $\mathbb{R}^d$. Полученный здесь основной результат – теорема 1.2.11 – является далеко идущим анизотропным обобщением следующего известного факта: если векторная мера есть градиент функции ограниченной вариации в $\mathbb{R}^d$, то ее размерность больше либо равна $d-1$. Отметим здесь полезное обобщение (лемма 4.1.1) леммы Фростмана о размерности меры (леммы 1.4.1), распространяющее лемму Фростмана на комплекснозначные меры.

Хотя автор скромно называет второй и третий сюжет приложениями теоремы 1.2.1 и ее аналогов, на самом деле это самостоятельные исследования, требующие привлечения широкого круга дополнительных идей, понятий и методов; теоремы вложения здесь – лишь один из ингредиентов доказательств.

Полученные в диссертации результаты, а также развитые при их доказательстве методы представляют значительный научный интерес. Все выносимые на защиту результаты являются новыми.

Перед нами работа талантливого эрудированного ученого, владеющего средствами комплексного, гармонического, функционального анализа, теории банаховых пространств, теории меры. Диссертация Д.М. Столярова "с большим запасом" удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01.

Доктор физ.-мат. наук профессор В.Я. Эйдерман

Подпись руки В.Я. Эйдермана

УДОСТОВЕРЯЮ

Помощник директора

ПОМИ РАН А.Н. Антонова

12 2014 г.