

“УТВЕРЖДАЮ”

Проректор МГУ – начальник

управления научной политики и

организации научных исследований

доктор физ.-мат. наук, профессор



А. А. Федянин

«30» марта 2015г.

### ОТЗЫВ

Ведущей организации на диссертационную работу Степанова Алексея Васильевича «Предельные теоремы и статистические процедуры для величин, связанных с рекордами и экстремальными порядковыми статистиками», выдвинутой на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика.

#### **Общая характеристика работы. Структура и содержание.**

Представленная соискателем, А. В. Степановым, диссертационная работа выполнена на кафедре прикладной математики института прикладной математики и информационных технологий Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта». Поступивший на механико-математический факультет Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» экземпляр рукописи содержит 260 страниц. Список цитированной автором литературы содержит 228 наименований. Работа состоит из восьми глав и списка цитируемой литературы. Первая глава является введением. Работа написана грамотным русским языком, по своему внешнему оформлению она отвечает требованиям ВАК.

**Актуальность темы** работы определяется важностью развития методов исследования распределений экстремальных порядковых статистик случайных последовательностей, рекордов, и индуцированных ими других случайных величин, что

вносит существенный вклад в общее развитие методов теории вероятностей и математической статистики. Также актуальность темы связана с высоким интересом к экстремальным порядковым статистикам и рекордам в приложениях, возникающих в различных областях техники, медицины, финансовых и актуарных расчетах, биостатистике, теории надежности.

Теория порядковых статистик берет свое начало в XVIII-XIX веках. Она получает дальнейшее развитие в двадцатом веке благодаря исследованию асимптотических свойств экстремальных порядковых статистик, проведенному в работах фон Мизеса, Типпета, Фреше, Гнеденко, де Хаана и др. Порядковые статистики также активно используются для характеристики распределений, в задачах оценивания параметров и проверки статистических гипотез. В середине прошлого века появляются первые работы по теории рекордов. Теория рекордов явилась естественным продолжением теории экстремальных порядковых статистик. Она бурно развивается и насчитывает в настоящее время значительное количество публикаций. Так же, как и порядковые статистики, рекорды интересны асимптотическими результатами, статистическими приложениями, характеристиками.

В настоящей работе диссертант анализирует и систематизирует новые методы, подходы и приложения, появившиеся в последние годы в теории экстремальных порядковых статистик и рекордов. Акцент в этом анализе делается на исследовании предельных теорем и построении статистических критериев.

Все вышесказанное позволяет заключить, что тема данной диссертационной работы **является актуальной.**

### **Перейдем к рассмотрению содержания диссертации.**

**Первая глава** диссертации является введением. Описывается структура работы, вводятся обозначения, используемые в дальнейшем в диссертации, и кратко излагается содержание работы.

**Во второй главе** работы диссертант рассматривает обобщения леммы Бореля–Кантелли. После обзора известных результатов этой тематики, полученных Чангом и Эрдошом, Эрдошом и Реньи, Ламперти, Спитцером, Мори и Шекели, Петровым, Барндорфом-Нильсоном и др., автор представляет свои результаты. Так лемма 2.2.3 является обобщением первой части леммы Бореля–Кантелли и представляет собой своеобразное дополнение известного результата Барндорфа-Нильсона. Леммы 2.2.3-2.2.7 позволяют находить необходимые и достаточные условия для сильной сходимости последовательностей, образующих цепи Маркова. Обобщения, предложенные автором в этой главе, впоследствии

используются в работе для получения сильных предельных теорем для рекордов и верхних порядковых статистик.

**В главе 3** рассматриваются предельные теоремы для слабых рекордов и рекордов с подтверждением. Автором предложен метод исследований асимптотических свойств слабых рекордных величин, основанный на лемме 3.2.4 и представлении 3.2.1. Самостоятельный интерес слабые рекорды представляют при рассмотрении дискретных распределений и распределений, имеющих атомы. Вместо зависимых слабых рекордных величин в предложенном автором методе рассматриваются суммы независимых слагаемых. Теория правильно меняющихся функций используется диссертантом в данной главе для исследования асимптотических свойств отношений слабых рекордных величин. В этой главе также выводятся предельные теоремы для рекордов с подтверждением. Отметим, что рекорды с подтверждением были предложены Невзоровым (2012).

В отечественной литературе уделено большое внимание вероятностной теории рекордов и экстремумов, в то время как вопросам статистических методов, основанных на использовании экстремальных значений обычных выборок и выборок, состоящих из рекордов, несмотря на их огромное значение, отечественные исследователи уделяют не так много внимания. В этой связи важным положительным качеством диссертации и несомненной заслугой диссертанта является рассмотрение статистических процедур, основанных на рекордных величинах и порядковых статистиках статистической выборки и изучение их свойств. При этом приводятся многочисленные примеры, с рекомендациями по применению предлагаемых процедур, делающими изложение методов приятным и увлекательным. **В главе 4** диссертантом рассматриваются критерии проверки гипотезы однородности, основанные на рекордных величинах. Некоторые из этих критериев аналогичны известным критериям Вилкоксона (1945), основанным на порядковых статистиках. В главе 4 также исследуется информация Фишера, содержащаяся в верхних и нижних рекордных величинах и временах (Теорема 4.3.1). Автором предложен статистический критерий, основанный на рекордных временах с подтверждением и исследованы его свойства (параграф 4.4). Критерий позволяет определять, есть ли в выборке нетипичные наблюдения, что наглядно проиллюстрировано примером 4.4.1.

**В пятой главе** рассматривается асимптотическая теория числа величин, регистрируемых около порядковых статистик и рекордных величин. Числа величин, регистрируемых около порядковых статистик, впервые изучались в работах Пэйкса и Стьютла (1997) и Хмаладзе, Надарешвили и Никабадзе (1997). Аналогичные исследования для рекордов впервые проводились в работе Балакришнана, Пэйкса и Степанова (2005).

Впоследствии числа величин, регистрируемых около порядковых статистик и рекордов, обсуждались во многих работах. Отметим, что данная тематика имеет интересные приложения, связанные с теорией страхования. Такие приложения впервые рассматривались в статьях Хашорвы (2003, 2004) и Хашорвы и Хюслера (2002, 2005). В главе 5 диссертантом получено значительное количество асимптотических результатов. Для вывода отдельных результатов главы 5 опять привлекается теория правильно меняющихся функций.

**В главе 6** обсуждаются предельные теоремы и некоторые статистические критерии для серий, основанных на порядковых статистиках и рекордах. Термин «серия» был, по-видимому, впервые использован при описании испытаний Бернулли. Серии, основанные на порядковых статистиках и рекордах, были предложены в недавних работах Ерилмаза и Степанова (2007, 2011). Они могут использоваться для исследования форм вероятностных распределений и в статистических приложениях. Также в этой главе вводятся понятия спейсингов порядковых статистики и рекордных величин и также предлагается статистический критерий, основанный на спейсингах.

**В седьмой главе** автором изучаются асимптотические свойства конкомитант порядковых статистик и рекордов. Конкомитанты порядковых статистик были предложены в работах Дэйвида (1973) и Бхаттачарии (1974). Конкомитанты рекордных величин впервые рассматривались в работе Хоученза (1984). Интерес к конкомитантам порядковых статистик и рекордов проявляется в страховом бизнесе, теории надежности, биостатистике и некоторых других областях. Отметим, что, несмотря на то, что конкомитанты изучались во многих публикациях, работ, в которых рассматривались бы сильные предельные теоремы для конкомитантов порядковых статистик или рекордов, было немного. Диссертант устраняет этот пробел и выводит сильные предельные теоремы для конкомитантов рекордов и верхних порядковых статистик. Для исследования асимптотических свойств конкомитантов автором была предложена классификация двумерных распределений. В главе 7 также рассматриваются методы генерирования конкомитантов верхних порядковых статистик и рекордов.

**В главе 8** рассмотрена очень популярная и важная в теории вероятностей задача характеристики распределений различными их свойствами. Имеется огромное число важных и глубоких характеристик распределений. Автор внес достойный вклад в эту коллекцию характеристик. Известно, что порядковые и рекордные статистики также давно используются для характеристики распределений. Подобные характеристики были получены Фергюсоном, Хуангом, Каминским, Нельсоном, Шекели, Мори, Нагараджи и др. В этой главе автор, наряду с известными характеристиками, предлагает и свои характеристические

результаты. Один из них – теорема 8.2.1 явилась первым результатом, использующим свойствами слабых рекордов для характеристики распределений. В параграфе 8.4 даны характеристики, основанные на второй рекордной величине и минимуме выборки (Теорема 8.4.1)

В целом диссертация заслуживает высокой оценки. Однако же она несвободна от некоторых недостатков, относящихся к стилю изложения, а не к сути полученных результатов, их наличие не влияет на общую оценку работы.

1. В главе 2 диссертации рассматриваются обобщения леммы Бореля-Кантелли. Многие результаты, полученные автором в данной главе, доказываются достаточно просто. Следует отметить, что не смотря на простоту доказательств, эти результаты крайне полезны для вывода сильных предельных теорем для цепей Маркова.
2. В работе имеются некоторые опiski и опечатки. Так, например, на стр. 64 написано, что по признаку Дини  $\sum_{i=0}^n (1 - \beta_i) = \infty$ . Здесь, по-видимому, имелся в виду ряд. Далее написано, что ряд в (3.3.5) сходится. Однако там снова стоит конечная сумма. На стр. 69 во второй строке упущен модуль. В третьей строке той же страницы в оценке  $g$  следует заменить в знаменателе плюс на минус и  $s$  на  $d$ .
3. В параграфе 4.2 нечетко сформулирована альтернатива (4.2.2).
4. Во введении главы 5 сказано, что теория числа величин, регистрируемых в непрерывном случае около верхних порядковых статистик и рекордов, берет начало от своего дискретного аналога, т. е. от теории числа совпадений максимумов в дискретном случае. Здесь было бы интересно для сравнения привести некоторые результаты для дискретного случая.
5. Доказательства, приводимые в разделе 5.6.2, представляются громоздкими. Соответствующие результаты не являются важными и знаковыми. Их можно было бы не включать в диссертацию.

**Таким образом,** представленная работа посвящена исследованию асимптотических свойств рекордов, экстремальных порядковых статистик и индуцированных ими случайных величин. Выводятся характеристические теоремы для рекордов и экстремальных порядковых статистик. На основе нового метода, основанного на связи слабых рекордов с суммами независимых случайных величин, разработана асимптотическая теория слабых рекордов.

В работе проводится анализ статистических гипотез, основанных на рекордных статистиках, в частности, вычислена информация Фишера, содержащаяся в рекордных

значениях и временах рекордов. Предложены новые методы генерирования конкомитантов рекордов и верхних порядковых статистик.

Основные результаты диссертации являются новыми и получены соискателем лично. Многие результаты работы оригинальны, интересны и говорят о высоком математическом уровне диссертанта.

Диссертация носит преимущественно теоретический характер. Работа также имеет и практическую ценность, состоящую в новых методах генерации конкомитантов рекордов и верхних порядковых статистик, а также в возможности использования результатов работы в актуарной математике.

По теме диссертации автором опубликовано 42 статьи, из них 33 статьи опубликованы в рецензируемых российских и международных журналах, входящих в список журналов ВАК.

Результаты диссертации докладывались на различных международных конференциях и научных семинарах. Автор диссертации три раза успешно выступал с докладами в ведущей организации: два раза на большом семинаре кафедры теории вероятностей МГУ и один раз на семинаре лаборатории теории вероятностей кафедры теории вероятностей МГУ. Автореферат полно и достаточно правильно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации можно рекомендовать к использованию в исследованиях, проводимых в МГУ им. М.В. Ломоносова, СПбГУ, ПОМИ РАН им. В.А. Стеклова, БФУ им. И. Канта.

### **Заключение**

Диссертация Степанова Алексея Васильевича «Предельные теоремы и статистические процедуры для величин, связанных с рекордами и экстремальными порядковыми статистиками» представляет собой завершённую научно-исследовательскую работу на актуальную тему. Новые научные результаты, полученные диссертантом, имеют большое научное и практическое значение. Выводы достаточно обоснованы. Работа отвечает требованиям пунктов 9-14 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного Постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г., №842, предъявляемым к докторским диссертациям, а ее автор, А. В. Степанов заслуживает присуждения ученой степени с доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика.

Диссертация и отзыв обсуждены на заседании кафедры теории вероятностей МГУ им. М. В. Ломоносова 25 марта 2015 года. Присутствовали и высказывали свои точки зрения

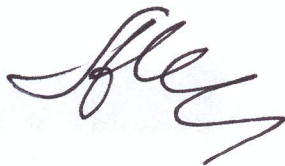
доктора физико-математических наук Булинский А. В. и Питербарг В. И. и кандидаты физико-математических наук Лебедев А. В. и Родионов И. В.

Зав. лабораторией теории вероятностей  
Главный научный сотрудник  
Профессор д.ф.-м.н.



Питербарг В. И.

Зав. кафедрой теории вероятностей  
Академик РАН



Ширяев А. Н.

Зам. декана по науке механико-математического ф-та  
Профессор, д. ф.-м. н.



Сергеев И. Н.