ОТЗЫВ
НАУЧНОГО РУКОВОДИТЕЛЯ

о диссертации Анны Владимировны Гладкой
“Экстремальные задачи теории приближения
целыми функциями конечной степени и сплайнами”,

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

В диссертации А. В. Гладкой решено несколько экстремальных задач теории приближения функций, заданных на вещественной оси. Как правило, задачи нахождения точных констант в неравенствах теории приближения непросты и требуют новых подходов к исследованию глубоко лежащих свойств функций. Именно это присутствует в представленной диссертации. В ней получены новые важные результаты. Все неравенства доказаны с константами, точными или меньшими, чем было известно ранее.

Прежде чем перейти к описанию конкретных результатов диссертации, я укажу на одну трудность, общую для многих задач рассматриваемого типа. Доказательства точных неравенств для периодических функций часто основаны на подсчете количества нулей или перемен знака некоторых ядер. В конечномерной ситуации удается воспользоваться тем, что системы полиномов и сплайнов являются чебышевскими. В бесконечномерном же случае, например, для целых функций конечной степени или непериодических сплайнов прямой подсчет количества нулей неприменим и приходится искать обходные пути. В разных задачах работают разные способы преодоления этих трудностей. Так, в первой главе диссертации удалось воспользоваться теоремой о плотности нулей целых функций определенного класса, а во второй и третьей главах — получить результат предельным переходом из результата периодической задачи.

В первой главе диссертации решены задачи о целых функциях конечной степени, наименее уклоняющихся от нуля в равномерной и интегральной метриках с некоторым весом. Эти вопросы ведут свою историю от исследований П. Л. Чебышева о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля, и с этой точки зрения построенные целые функции можно считать обобщениями многочленов Чебышева. Заменой переменной задача об алгебраических многочленов сводится к задаче о тригонометрических многочленах. В некоторых весовых пространствах последняя была решена С. Н. Бернштейном. Эти классические результаты вошли в известную книгу Н. И. Ахиезера “Лекции по теории апроксимации”.

При переходе с периода на ось аналогами тригонометрических многочленов выступают целые функциии конечной степени. Однако здесь была не вполне ясна естественная постановка задачи. Во-первых, не было изначально понятно, на какие веса удастся распространить результаты. Таким образом диссертантка пришла к классу Картрайт. Во-вторых, задача в интегральной метрике потребовала такой постановки, которая включила бы случай несуммируемых функций. И такая изящная постановка была найдена. Для периодического веса и равномерной нормы результаты, конечно, совпадают с классическими.

Отмечу одну особенность этой главы. Хотя само понятие целой функции относится к комплексному анализу, обычно рассматриваемые задачи теории приближений такими функциями решаются средствами анализа вещественного. Здесь же пришлось существенно использовать некоторые специфические факты комплексного анализа, что было для меня довольно неожиданно.

Результаты второй главы восходят к классическим работам Ж. Фавара, Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна 1937 года, в которых были найдены верхние грани (точные константы) наилучших приближений тригонометрическими многочленами на классах гладких функций. При этом точные константы реализуются линейными методами, которые получили название операторов или сумм Ахиезера – Крейна – Фавара. Впоследствии усилиями многих математиков эти результаты были распространены на приближения различных классов функций тригонометрическими многочленами, целыми функциями конечной степени и сплайнами.

В диссертации построены линейные операторы (аналоги операторов Ахиезера – Крейна – Фавара), реализующие при $p = +\infty$ и $p = 1$ точные константы в оценках наилучших приближений функций классов $W_p^{(r)}$ на оси сплайнами по равномерному разбиению порядка $m \geqslant r$. Как известно, при $m = r - 1$ эту задачу решают интерполяционные сплайны. Ранее мне удалось построить такие операторы в периодическом случае.

Построение этих операторов и доказательство нужной знакорегулярности связанных с ними ядер встретило серьезные трудности как технического, так и идейного плана. Некоторые из эти трудности порождены тем, что, в отличие от периодического случая, соболевские классы на оси не представляются как классы сверток с суммируемым ядром. В конце концов удалось провести периодизацию и воспользоваться результатами для периодического случая.

В третьей главе диссертации результаты второй главы применяются к доказательству неравенств типа Джексона для приближений сплайнами, то есть оценок приближений через модули непрерывности функции и ее производных.

Здесь получено две серии результатов. В § 2, следуя известной схеме Жука — Лигуна, диссертантка построила линейные методы, с помощью которых установила неравенства для первого модуля непрерывности нечетных производных. При шаге, равном расстоянию между узлами сплайна, неравенство точное, даже если заменить левую часть на наилучшее приближение. Само применение схемы имеет технический характер, но здесь есть изюминка: доказательство того, что при данном шаге операторы, построенные по схеме Жука — Лигуна, совпадают с построенными в главе 2. Для этого снова удалось свести задачу к периодической.

В последнем параграфе устанавливаются оценки приближений через модули непрерывности высоких порядков самой функции. Задача о точных константах для модулей непрерывности высоких порядков, как правило, очень трудна. Поэтому представляет интерес разработка методов получения таких неравенств по возможности с небольшими константами. Попытки получения таких неравенств связаны с использованием тех или иных линейных комбинаций функций Стеклова в качестве промежуточных приближений. Современный этап исследования этой темы начинается с работы С. Фукара, Ю. В. Крякина и А. Ю. Шадрина 2009 года, в которой был предложен новый метод (для приближений тригонометрическими многочленами), основанный на теореме Банаха о разложении обратного оператора в сумму геметрической прогрессии. Затем в работах О. Л. Виноградова и В. В. Жука этот метод был усовершенствован и распространен на приближения целыми функциями конечной степени и периоодическими сплайнами.

Пользуясь этой схемой и результатами второй главы, диссертантка установила серию оценок приближений сплайнами непериодических функций. Все оценки снова устанавливаются линейными методами приближения. Подчеркну, что ранее оценки отклонений линейных сплайновых методов приближения через модули непрерывности высоких порядков с какими бы то ни было явно указанными константами были известны лишь в периодическом случае.

Неравенства третьей главы получаются точными еще в двух случаях. Оценки снизу реализуются на периодических функциях и были известны ранее; здесь же оценки сверху распространены на непериодические функции с сохранением констант.

Работа показывает, что ее автор А. В. Гладкая владеет методами вещественного, комплексного и функционального анализа, теории приближения функций, теории экстремальных задач. Она продемонстрировала высокую технику, настойчивось в решении трудных задач и хорошее знание научной литературы. Считаю, что А. В. Гладкая достойна присуждения ей степени кандидата физико-математических наук.

доктор физико-математических наук, доцент, профессор СПбГУ 03.03.2016 Виноградов О.Л.

Личную подпись О.Л. Виноградова заверяю. Документ подготовлен в порядке исполнения трудовых обязанностей

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ * ИНН 7801002274 «Санкт-Петербургский государственный университет» (СПбГУ)

[illegible] К.М.
Начальник отдела кадров №3
03.03.2016 г.