

ОТЗЫВ

о диссертации Алексея Александровича Воротова на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук на тему: "Свойства времён пребывания для дискретных марковских процессов "

Работа А.А. Воротова посвящена исследованию проблем теории марковских процессов с дискретным множеством состояний, связанных с временами пребывания в различных фиксированных состояниях.

Надо отметить, что именно задачи о временах пребывания стимулируют интенсивные исследования последних лет в области случайных процессов. Большая выборка статей на эту тему приведена в списке литературы к материалу диссертации. Интерес к этой теме возрос после работ П. Леви по изучению асимптотики времени пребывания одномерного броуновского движения в малой окрестности начальной точки траектории. Первый член асимптотики, названный локальным временем, стал предметом активного изучения и многочисленных приложений. Непосредственным поводом к исследованию, составляющему главную тему настоящей диссертации, явилось найденное Д. Рэем марковское свойство локального времени относительно пространственного параметра. Научный руководитель соискателя Сергей Сергеевич Валландер предложил исследовать марковские процессы с дискретным множеством состояний, надеясь обнаружить для них свойство, аналогичное свойству локального времени, открытого Рэем, в терминах времён пребывания процесса в фиксированных состояниях. И действительно, это свойство было обнаружено у марковских процессов с дискретным множеством состояний A и с непрерывным временем $t \geq 0$.

Диссертант кратко излагает постановку задачи, методы исследования и известные результаты по теории процессов пребывания. Основной объект исследования — процесс времени пребывания — связан с исходным марковским процессом, рассматриваемым на интервале от начального момента времени до момента θ — случайного момента времени, не зависящего от исходного процесса. Каждой траектории процесса на этом интервале сопоставляются суммарные времена $\tau(v)$ нахождения во всех возможных состояниях $v \in A$. Таким образом возникает случайная функция, которую при наличии линейной упорядоченности в A естественно назвать случайным процессом — процессом времён пребывания. В общем случае линейная упорядоченность не предполагается, что порождает специальные методы исследования и необходимость в опре-

делении специальных классов таких случайных функций. Исследование ведётся в терминах так называемых функций Грина — прямых аналогов классических функций Грина. У функции Грина, определённой для разностного уравнения, оказалось удивительно много свойств классического "однофамильца" в задачах о первом выходе из множества.

В общем случае отношение порядка порождается графом переходов исходного марковского процесса, который представляет собой множество достижимых состояний процесса, снабжённых интенсивностями переходов между состояниями. Основные результаты диссертации связаны с блужданием по этому графу. На мой взгляд, остроумным техническим приёмом при анализе процесса времени пребывания является построение на базе исходного процесса семейство процессов с обрывом, каждый из которых задаётся некоторой функцией κ , где $0 < \kappa(a) < 1$ при $a \in A$, которая интерпретируется как вероятность обрыва в состоянии a . Красота этого приёма состоит в том, что для марковских процессов с обрывом построение функции Грина не вызывает затруднений и в большинстве случаев сводится к появлению в различных функционалах добавочного множителя $\exp(-\int_0^\theta \kappa(X(s))ds)$. С другой стороны, введение этого множителя позволяет доказать марковость процесса времени пребывания. Для случая, когда отношение порядка порождается графом переходов, нужно было сначала определить, что такое марковость на графе. Для этого было определено понятие "необходимая" вершина графа. Это — вершина, устранение которой делает граф несвязным — превращает его в множество $N > 1$ отдельных графов. Марковское свойство определяется для такой необходимой вершины графа относительно меры P_{ab} исходного процесса при фиксированных a — начальной точка и b — значение процесса в момент θ . А именно, условное распределение N событий, каждое из которых связано с соответствующей компонентой разбиения, по определению марковского свойства равно произведению N условных распределений этих событий, где условие состоит в том, что фиксируется значение $\tau(v)$, где v — необходимая вершина. Приведённый выше добавочный множитель легко разбивается на сомножители, зависящие только от соответствующих компонент разбиения графа. Благодаря произвольности выбираемых функций κ марковость процесса τ в необходимой вершине может быть доказана в терминах этих сомножителей, когда θ имеет экспоненциальное распределение.

Реализация этого плана сравнительно просто проходит для целочисленных симметричных марковских цепей и для цепей, граф переходов которых является деревом. Для произвольных графов перехода прямое обобщение использованных при этом методов сталкивается с существенными трудностями. Для их преодоления диссертант использовал оригинальные

нальный метод получения произвольного связного графа из дерева путём добавления к этому дереву некоторых рёбер. Добавление новых рёбер означает допущение для исходного марковского процесса новых переходов с заданными интенсивностями. При этом меняется функция Грина данной задачи. Результат этого преобразования удаётся получить в виде компактной формулы в терминах исходной функции Грина и добавленных интенсивностей переходов. Применяя полученную таким способом формулу Грина для марковской цепи общего вида со связным графом переходов, автор доказывает марковское свойство времени пребывания для любой необходимой вершины этого графа.

Дальнейшие обобщения этого приёма связано с графами, для которых нет необходимых вершин по отдельности но есть необходимые конечные подмножества вершин. Типичным примером такого графа является так называемая лестница — подобие устройства, состоящего из двух горизонтальных брусьев с параллельными перекладинами. Удаление одной вершины не разбивает граф — для разбиения необходимо удалить подмножество вершин, состоящее не менее, чем из двух вершин, составляющих "ступеньку" лестницы. В такой ситуации получается неожиданное следствие марковского свойства (если оно есть) такого необходимого множества вершин. Оказывается, для этого нужно, чтобы хотя бы одна из вершин этого подмножества была необходимой (чего нет у графа-лестницы). Исследуются также другие функции, определённые на траекториях процесса, в частности, так называемое поле переходов, когда считается число переходов марковского процесса в заданное состояние $v \in A$ на интервале $[0, \theta]$. Интересные результаты получены для неоднородного марковского процесса, когда исходный процесс имеет различные матрицы интенсивностей перехода до и после некоторого $T > 0$. Для этого случая некоторые из использованных ранее в диссертации методов становятся непригодными или слишком громоздкими. Ревизии подвергается основной рабочий инструмент — функция Грина. Доказано, что для данного марковского процесса с двумя различными матрицами интенсивностей его процесс времён пребывания не обладает марковским свойством в необходимых вершинах графа переходов, за исключением некоторых специальных случаев. Отсутствие марковского свойства доказано также для однородного марковского процесса, но со случайным моментом остановки θ , обладающим любым другим распределением кроме экспоненциального.

Диссертация А.А. Воротова производит впечатление серьезного и цельного исследования. Автор проявил большую эрудицию и изобретательность, умение преодолевать значительные аналитические трудности, умение ставить и решать содержательные математические задачи. Ограни-

чиваясь в основном анализом функционалов, полученных в результате комбинации значений функции Грина модифицированного уравнения теплопроводности, автор находит достаточно богатое поле исследования, где по некоторым направлениям получает исчерпывающие результаты. Работа написана аккуратно и грамотно. Опечаток очень мало (с.12, 13)

К числу недостатков следует отнести некоторую схематичность изложения, отсутствие некоторых важных определений (отсутствует определение марковости на графе, не связанное с рассматриваемым частным случаем), некоторая небрежность в обозначениях (перегружен значениями символ P — это и переходная функция, и переходной оператор, и вероятностная мера; опущен второй аргумент у функции u в "уравнении теплопроводности"(с.11)). Все это не уменьшает общего хорошего впечатления о диссертации.

Все основные результаты диссертации опубликованы в установленные сроки. Автореферат правильно отражает содержание диссертации и обосновывает научную новизну работы, которая следует из описания основных полученных результатов.

Работа А.А. Воротова заслуживает дальнейшего развития и применения. С результатами диссертации рекомендуется ознакомиться специалистам по теории случайных процессов в Математическом институте им. В.А.Стеклова РАН и его Санкт-Петербургском отделении, в математико-механическом факультете СПбГУ, в Политехническом Университете и др.

Диссертация Алексея Александровича Воротова "Свойства времени пребывания для дискретных марковских процессов" удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор заслуживает присуждения ему искомой степени.

Алекс
6.06.2014

Заведующий лабораторией
Института проблем машиноведения РАН
доктор физ.-мат. наук Б.П.Харламов



Харламова Б.П.
УДОСТОВЕРЯЮ: Помощник Директора
ИМШ РАН
Серого Е.В.

2014 г.