Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Санкт-Петербургское отделение Математического института
имени В. А. Стеклова Российской академии наук

На правах рукописи

Власова Надежда Юрьевна

О СТЯГИВАЕМЫХ ПОДГРАФАХ ТРЁХСВЯЗНОГО ГРАФА

1.1.5. — Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2024

Оглавление

Введение

Актуальность темы диссертации

Теория графов – обширный и активно развивающийся раздел дискретной математики. Вершинная связность графов – один из подразделов теории графов. Основоположником исследований по вершинной связности является Менгер. В дальнейшем исследования продолжили Уитни, Татт, Форд и Фалкерсон, Дирак, Халин, Мадер и другие. Особенно много работ по этому разделу появилось в 60-80 годы XX века.

Диссертация посвящена исследованию 5-вершинных стягиваемых множеств в трехсвязных графах. *Стягиваемое множество* R в n-связном графе G — это такое подмножество вершин G, что индуцированный подграф на множестве вершин R связен, а $\kappa(G-R) \geqslant n-1$, где $\kappa(H)$ — вершинная связность графа H.

Вопросом удаления множеств вершин с сохранением высокой связности активно интересовался В. Мадер. В [5] он доказал следующую теорему про удаление множеств вершин (удаляется произвольное множество вершин, необязательно такое, что индуцированный подграф на нём связен).

Теорема 1 (W.Mader)**.** *Для всех n, $k \in \mathbb{N}$ существует натуральное число $h_n(k)$ такое, что каждый n-связный конечный граф G с $v(G) \geqslant h_n(k)$ содержит множество $W \subset V(G)$ такое, что $|W| = k+1$ и $\kappa(G-W) \geqslant n-2$.*

В [5] В. Мадер также доказал, что при $n \geqslant 4$ существуют n-связные графы сколь угодно больших размеров, в которых $\kappa(G - W) \leqslant n - 2$ для всех множеств $W \subset V(G)$ с $|W| \geqslant 2$. Из чего очевидно следует, что при $n \geqslant 4$ существует бесконечно много графов, в которых нет стягиваемых множеств.

Касаемо удаления связных подгафов, В. Мадер доказал в [5], что для каждого $n \geqslant 18$ существуют n-связные конечные графы G сколь угодно большого размера, которые не содержат связного подграфа H, удовлетворяющего условиям $v(H) = 3$ и $\kappa(G - V(H)) \geqslant n - 2$. А также в [5] В. Мадер доказал, что в каждом n-связном графе достаточно большого размера существует связный подграф H на 4 вершинах такой, что $\kappa(G - V(H)) \geqslant n - 3$.

В статье [4] В. Мадер делает обзор результатов, относящихся к вопросу удаления множеств вершин с сохранением высокой связности. И упоминает в этом обзоре в том числе и задачу о поиске стягиваемых множеств. Как уже было сказано выше, при $n \geqslant 4$ существует бесконечно много n-связных графов, в которых нет стягиваемых множеств. А исследование стягиваемых множеств в трёхсвязных графах берёт своё начало из следующей гипотезы, сформулированной в 1994 г.

Гипотеза (W. McCuaig, K. Ota)**.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда существует такое n, что любой трёхсвязный граф G с не менее чем n вершинами имеет стягиваемое множество из m вершин.*

Для $m = 1$ утверждение гипотезы очевидно, для $m = 2$ также достаточно несложно и широко известно. Случай $m = 3$ доказан авторами гипотезы [3], случай $m = 4$ доказал в 2000 году М. Криселл [1] (и это доказательство является весьма технически сложным). Ни для какого $m > 5$ на настоящий момент гипотеза не доказана и не опровергнута.

В работе Д.В.Карпова [16] доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $m \geqslant 5$ — натуральное число, а G — трёхсвязный граф с $v(G) \geqslant 2m+1$. Тогда G имеет стягиваемое множество W с $m \leqslant |W| \leqslant 2m-4$.*

Тем самым, доказано, что любой трехсвязный граф на хотя бы 11 вершинах содержит стягиваемое подмножество на 5 или 6 вершинах.

В дальнейшем стягиваемое множество на 4, 5 и т.д. вершинах будем называть стягиваемой четверкой, пятеркой и т.д.

В работе М.Криселла [2] исследуются стягиваемые пятерки в графах с маленькой средней степенью. В этой работе доказана следующая теорема.

Теорема 3. [2, Следствие 2] *Любой трёхсвязный граф на хотя бы* 13 *вершинах и средней степенью меньше, чем* $3 + 1/132$, *содержит стягиваемую пятерку.*

Только в 2022 году диссертантом была завершена работа по доказательству существования стягиваемой пятерки в трехсвязном графе с не менее чем 13 вершинами. Это доказательство намного сложнее и разнообразнее, чем нахождение стягиваемого множества с меньшим числом вершин.

Цели диссертации

Основные цели диссертации:

— изучить структуру нерасширямых стягиваемых множеств в трёхсвязных графах;

— доказать, что всякий трехсвязный граф на достаточно большом количестве вершин имеет стягиваемое множество на 5 вершинах;

— найти точную нижнюю оценку на количество вершин в трехсвязном графе, необходимое для существования стягиваемой пятерки.

Основные положения и результаты, выносимые на защиту

1. Доказано, что в любом трехсвязном графе с не менее чем 13 вершинами найдется стягиваемое множество на 5 вершинах.
2. Построен пример трехсвязного граф на 12 вершинах, в котором нет стягиваемого множества на 5 вершинах.

Методы исследований

В работе использовались как классические методы работы с k-связными графами, так и довольно новые. Одной из наиболее существенных методик изучения структуры трехсвязного графа с нерасширяемым стягиваемым множеством на 4 вершинах в работе является понятие *дерева разбиения* двусвязного графа набором разделяющих множеств, разработанное Д.В. Карповым в работе [14].

Ключевым инструментом в поиске стягиваемого множества в графе в работах М. Криселла и Д.В. Карпова являются крайние части разбиения, соответствующие листьям дерева разбиения. Новые стягиваемые множества строятся из вершин стягиваемого множества меньшего размера и вершин одной из крайних частей графа, получаемого удалением из исходного графа вершин этого стягиваемого множества. В диссертации доказательство, в целом, проходит по тому же плану, что и поиск стягиваемой четверки у М. Криселла, но увеличение размера стягиваемого множества многократно увеличивает сложность этого пути. Диссертантом были разработаны новые методы, позволяющие строить стягиваемые множества, задействующие одновременно вершины нескольких крайних частей графа, а также вершины границ этих крайних частей. Кроме того, в отличие от работы М. Криселла, диссертант использует не только свойства крайних частей двусвязного графа, но и всю структуру дерева разбиения двусвязного графа независимыми разделяющими двувершинными множествами.

Ещё одним новым методом диссертации является выделение *подозрительных четверок*. Для этих четверок не удается сразу найти стягиваемое множество большего размера, используя только вершины крайних частей. После изучения остальных случаев, в главе 5 изучаются графы, содержащие стягиваемые множества на 4 вершинах только определенного вида (подозрительные четверки), и в каждом случае находится 5-вершинное стягиваемое множество.

Подробнее о результатах диссертации и применяемых методах написано в разделе “Содержание диссертации”.

Новизна, степень достоверности и апробация результатов

Все результаты, изложенные в диссертации, являются новыми, достоверными, математически строго доказанными фактами. Результаты диссертации докладывались на семинарах по дискретной математике в ПОМИ РАН, а также на международной конференции “Conference on Graphs, Networks and their Applications” (Москва, МФТИ, май 2019).

Результаты и материалы диссертации опубликованы в работах [9] и [10].

Теоретическая значимость диссертации

Работа носит теоретический характер. Методы, разработанные в диссертации, могут быть использованы для поиска стягиваемых множеств больших размеров. Доказанные в диссертации новые утверждения о крайних частях двусвязного графа могут быть полезны и в других разделах теории связности, а так же других областях теории графов. Новый метод выделения подозрительных четверок может помочь найти в достаточно больших трехсвязных графах стягиваемые m-вершинные множества при $m > 5$.

Далее следуют основные обозначения и более подробный рассказ о результатах диссертации и используемых в диссертации методах.

Обозначения

В диссертации рассматриваются неориентированные графы без петель и кратных рёбер. Мы будем применять стандартные обозначения.

Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, а их количество — через $v(G)$. Множество рёбер графа G мы будем обозначать через $E(G)$.

Степень вершины x в графе G мы будем обозначать через $d_G(x)$, а минимальную степень вершины графа G будем обозначать через $\delta(G)$.

Окрестность вершины x в графе G (то есть, множество всех вершин, смежных с x) мы будем обозначать через $\mathrm{N}_G(x)$.

Для множества вершин $U \subset V(G)$ будем обозначать через $G(U)$ *индуцированный подграф* графа G на множестве U. Назовем множество U *связным*, если граф $G(U)$ связен.

Определение 1. 1) Пусть $R \subset V(G)$. За $G - R$ мы обозначим граф, получаемый из G удалением всех вершин R и всех ребер, инцидентных вершинам R. Множество R называется *разделяющим*, если $G - R$ несвязен.

2) Граф G называется *k-связным*, если $|V(G)| > k$ и G не содержит вершинного разделяющего множества размера меньше, чем k.

3) Пусть G — трехсвязный граф. Множество $R \subset V(G)$ назовем *стягиваемым*, если $G(R)$ связен и $G - R$ двусвязен.

4) Стягиваемое множество R назовем *нерасширяемым*, если оно не содержится ни в каком стягиваемом множестве размера $|R|+1$.

5) Мы будем говорить, что вершина $u \in V(G)$ *смежна* с множеством $W \subset V(G)$, если $u \notin W$ и множество W содержит вершину, смежную с u. Про два непересекающихся множества $U, W \subset V(G)$ будем говорить, что они *смежны*, если существуют смежные вершины $u \in U$ и $w \in W$.

6) Пусть $X \not\subset R$, $Y \not\subset R$. Будем говорить, что R разделяет множества X и Y (или, что то же самое, отделяет множества X и Y друг от друга), если никакие две вершины $v_x \in X$ и $v_y \in Y$ не окажутся в одной компоненте связности графа $G - R$.

7) Пусть $X \not\subset R$. Будем говорить, что R разделяет X, если R разделяет какие-то две вершины X.

Разбиение графа набором разделяющих множеств

Перед описанием результатов диссертации определим необходимые нам понятия. В диссертации для работы с нерасширяемыми стягиваемыми множествами используется структура разбиения двусвязного графа разделяющими множествами из 2 вершин. Для наших целей удобнее будет определить не структуру из книги Татта [7], а в целом аналогичную структуру — *дерево блоков* из работы [14]. Начнём с понятия *разбиения графа набором разделяющих множеств*, определенного в [12].

Отметим, что мы используем не совсем классическое определение *компоненты связности* — для удобства в нашей работе это не максимальный по включению связный подграф, а множество его вершин.

В этом разделе $k \geqslant 2$, а G — k-связный граф. Обозначим через $\mathfrak{R}_k(G)$ множество из всех k-вершинных разделяющих множеств G.

Определение 2. Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.

1) Множество $A \subset V(G)$ назовем *частью разбиения* графа G набором $\mathfrak{S}$, если никакие две вершины из A нельзя разделить никаким множеством из $\mathfrak{S}$, но любая другая вершина графа G отделена от множества A хотя бы одним из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Множество всех частей разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ мы будем обозначать через $\mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})$.

2) Вершины части $A \in \mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})$ назовем *внутренними*, если они не входят ни в одно из множеств набора $\mathfrak{S}$. Множество таких вершин назовем *внутренностью* части A и будем обозначать через $\mathrm{Int}(A)$.

Вершины части A, входящие в какие-либо множества набора $\mathfrak{S}$, мы будем называть *граничными*, а все их множество — *границей* и обозначать через $\mathrm{Bound}(A)$.

Нетрудно понять, что если две части $\mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})$ имеют непустое пересечение, то их пересечение — подмножество одного из множеств набора $\mathfrak{S}$.

Замечание 1. Нетрудно доказать (см., например, [13]), что для $A \in \mathrm{Part}(G;\mathfrak{S})$ граница $\mathrm{Bound}(A)$ сотоит из всех вершин части A, имеющих смежные вне A. Если $\mathrm{Int}(A) \neq \varnothing$, то $\mathrm{Bound}(A)$ отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от остальных вершин графа.

Рассмотрим простейший и самый нужный нам пример — разбиение двусвязного графа G одним множеством $S \in \mathfrak{R}_2(G)$. Пусть $\mathrm{Part}(G;S) = \{A_1,\dots,A_k\}$. Тогда $\mathrm{Int}(A_1)$, $\dots$, $\mathrm{Int}(A_k)$ — все компоненты связности графа $G-S$, а каждая вершина $x \in S$ смежна со всеми этими компонентами (если x не смежна с $\mathrm{Int}(A_i)$, то эта компонента выделяется и одновершинным множеством $S \setminus \{x\}$, что противоречит двусвязности графа G).

Определение 3. Два множества $S,T \in \mathfrak{R}_k(G)$ называются *независимыми*, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае мы будем называть эти множества *зависимыми*.

В работе [11] доказано, что для k-связного графа G и множеств $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ возможны два варианта: либо S и T независимы, либо каждое из них разделяет другое. Доказательство этого факта — очень простое.

Разбиение двусвязного графа и его свойства

В этом разделе граф G — двусвязный.

Определение 4. 1) Множество $S \in \mathfrak{R}_2(G)$ называется *одиночным*, если S независимо со всеми остальными множествами из $\mathfrak{R}_2(G)$. Обозначим через $\mathfrak{O}(G)$ набор из всех одиночных множеств графа G.

2) Вместо $\mathrm{Part}(G; \mathfrak{O}(G))$ мы будем писать просто $\mathrm{Part}(G)$, а части этого разбиения будем называть *частями* графа G.

Определение 5. *Дерево разбиения* двусвязного графа G — это двудольный граф $\mathrm{BT}(G)$, вершины которого соответствуют одиночным множествам и частям графа G. Вершины $S \in \mathfrak{O}(G)$ и $A \in \mathrm{Part}(G)$ смежны в $\mathrm{BT}(G)$, если и только если $S \subset A$. Других рёбер в $\mathrm{BT}(G)$ нет.

Следующая лемма — это частный случай теоремы 1 из статьи [14].

Лемма 1. *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) $\mathrm{BT}(G)$ *— это дерево, все висячие вершины дерева* $\mathrm{BT}(G)$ *соответствуют частям* $\mathrm{Part}(G)$.

2) *Для каждого множества $S \in \mathfrak{O}(G)$ выполняется равенство* $d_{\mathrm{BT}(G)}(S) = |\mathrm{Part}(G; S)|$. *Более того, для каждой части* $A \in \mathrm{Part}(G; S)$ *существует ровно одна такая часть* $B \in \mathrm{Part}(G)$, *что $B \subset A$ и B смежна с S в* $\mathrm{BT}(G)$.

3) *Множество $S \in \mathfrak{O}(G)$ отделяет друг от друга в графе G части B,* $B' \in \mathrm{Part}(G)$, *если и только если S отделяет B от B' в* $\mathrm{BT}(G)$.

Определение 6. Часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ назовем *крайней*, если она соответствует висячей вершине дерева разбиения $\mathrm{BT}(G)$.

Замечание 2. 1) Если $A \in \mathrm{Part}(G)$ — крайняя часть, то $\mathrm{Bound}(A)$ — одиночное множество графа G.

2) Внутренности двух различных частей $\mathrm{Part}(G)$ не пересекаются.

Определение 7. 1) Обозначим через G' граф, полученный из двусвязного графа G добавлением всех отсутствующих в G рёбер множества $\{xy : \{x, y\} \in \mathfrak{O}(G)\}$.

2) Назовём часть A *циклом*, если граф $G'(A)$ — простой цикл и *3-блоком*, если граф $G'(A)$ трёхсвязен. Если часть A — цикл, то мы будем называть $|A|$ *длиной* цикла A.

Лемма 2. [15, Лемма 2] *Для двусвязного графа G выполняются следующие утверждения.*

1) *Каждая часть из $\mathrm{Part}(G)$ — либо цикл, либо 3-блок.*

2) *Если часть $A \in \mathrm{Part}(G)$ — цикл, то все вершины из $\mathrm{Int}(A)$ имеют степень 2 в графе G. При $\delta(G) \geqslant 3$ все крайние части $\mathrm{Part}(G)$ — 3-блоки.*

3) *Пусть $A \in \mathrm{Part}(G)$ — цикл длины хотя бы 4. Тогда любая пара его несоседних вершин образует неодиночное разделяющее множество графа G и других неодиночных разделяющих множеств в графе G нет.*

Лемма 3. [15, Лемма 4]

Пусть S — одиночное множество двусвязного графа G, а $x \in S$. Тогда выполняются следующие утверждения.

1) Если одиночное множество S имеет степень d в $\mathrm{BT}(G)$, то $d_G(x) \geqslant d$. Если $d_G(x) = d$, то вершины множества S несмежны.

2) $d_G(x) \geqslant 3$.

Стягиваемые множества в трехсвязном графе

В этом разделе граф G — трехсвязный. Очевидно, можно считать, что G — минимальный трехсвязный граф, то есть, что G перестает быть трех-связным при удалении любого его ребра. А тогда выполнена следующая теорема.

Теорема 4. (R. Halin, 1969.) [8] *Пусть G — минимальный k-связный граф, где $k \in \{2, 3\}$. Тогда любой цикл в графе G содержит хотя бы две вершины степени k.*

Лемма 4. [16, Лемма 4] *Пусть G — трехсвязный граф, $H \subset V(G)$ — нерасширяемое стягиваемое множество, такое что граф $G - H$ не является простым циклом. Тогда выполнены следующие утверждения.*

1) Множество H смежно со всеми внутренними вершинами частей-циклов $G - H$.

2) Есть хотя бы две крайние части $\mathrm{Part}(G - H)$, все эти крайние части — циклы длины хотя бы 4. Граница каждой крайней части — одиночное разделяющее множество $G - H$.

3) Пусть $A \in \mathrm{Part}(G - H)$ — крайняя часть. Тогда граф $G - H - \mathrm{Int}(A)$ — двусвязный.

На самом деле в пункте 3 леммы 4 не требуется условие, что множество H — нерасширяемое. Приведем доказательство этого факта, чтобы убедиться в этом.

Лемма 5. *Пусть G — двусвязный граф. Пусть $A \in \mathrm{Part}(G)$ — крайняя часть-цикл. Тогда граф $G - \mathrm{Int}(A)$ — двусвязный.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Bound}(A) = \{x, x'\}$. Так как A — часть-цикл, вершины множества $\mathrm{Int}(A)$ образуют простой xx'-путь в G. Предположим, что граф $G' = G - \mathrm{Int}(A)$ — недвусвязный. Так как G' становится двусвязным после добавления xx'-пути, существует точка сочленения G', отделяющая x от x'. С другой стороны, $\mathrm{Bound}(A) = \{x, x'\}$ — одиночное множество в G. По теореме Менгера в G существуют три xx'-пути, не пересекающихся по внутренним вершинам. Не более одного из этих путей проходит по вершинам $\mathrm{Int}(A)$. Следовательно, хотя бы два из этих путей лежат в G'. То есть не может существовать точка сочленения, отделяющая x от x' в $G - \mathrm{Int}(A)$. Полученное противоречие доказывает, что граф G' — двусвязный. $\square$

Замечание 3. Из замечания 1 следует, что если A_1 и A_2 — две части $\mathrm{Part}(G - H)$, то их внутренности несмежны друг с другом.

Очевидным следствием из предыдущих лемм является следующая лемма. В других обозначениях её утверждения содержатся в леммах 3 и 4 из [1].

Лемма 6. *Пусть G — трехсвязный граф, $H \subset V(G)$ — нерасширяемое стягиваемое множество и граф $G - H$ не является простым циклом. Пусть $A_1, A_2 \in \mathrm{Part}(G - H)$ — две крайние части $G - H$, $W_i = \mathrm{Int}(A_i)$. Тогда $G(W_1)$ и $G(W_2)$ — простые пути, удовлетворяющие следующим условиям.*

1) $|W_1| \geqslant 2$, $|W_2| \geqslant 2$.

2) Все вершины $W_1 \cup W_2$ имеют степень 2 в $G - H$.

3) $N_G(W_1) \cap V(W_2) = \varnothing$, $N_G(W_2) \cap V(W_1) = \varnothing$.

4) Графы $G - H - W_1$ и $G - H - W_2$ двусвязны.

Определение 8. Если F — двусвязный подграф G, то через $h_G(F)$ мы будем обозначать максимальный по включению двусвязный подграф G, содержащий F.

Определение 9. В обозначениях леммы 6 пусть

$$H_1 = V(h_{G-W_2}(G - H - W_2)) \cap H, \qquad H_2 = V(h_{G-W_1}(G - H - W_1)) \cap H,$$
$$H_1^\star = H_1 \setminus H_2, \qquad H_2^\star = H_2 \setminus H_1.$$

Лемма 7. [1, Лемма 5] *Пусть G — трехсвязный граф, $H \subset V(G)$ — нерасширяемое стягиваемое множество и граф $G - H$ не является простым циклом. Тогда для множеств W_1 и W_2 из леммы 6 выполнены следующие утверждения:*

1) $N_G(G - H - W_2) \cap H \subset H_1$ и $N_G(G - H - W_1) \cap H \subset H_2$.

2) $H = H_1 \cup H_2$. Каждая компонента связности $G(H_1^\star)$ и $G(H_2^\star)$ имеет ровно одного соседа в H_2 и H_1, соответственно.

3) Предположим, что W — подпуть $G(W_1)$ такой, что $N_G(H_1^\star) \cap W_1 \subset V(W)$. Тогда множество $H_1^\star \cup V(W)$ стягиваемо.

4) Если $H_1^\star = \varnothing$, то множество вершин любого подпути $G(W_1)$ стягиваемо.

5) Предположим, что G не содержит стягиваемого подграфа на $|H|+1$ вершине. Если $|H_1^\star| = 1$, то выполнено одно из двух условий:
(1) $|W_1| \leqslant |H| - 1$.
(2) $|W_1| = |H| + 1$, *обе конечные вершины $G(W_1)$ смежны с $H_1^\star$ и множество вершин любого подпути $G(W_1)$ стягиваемо.*

Содержание диссертации

В первой главе диссертации мы докажем две вспомогательные леммы, усиливающие утверждения лемм 6 и 7. Эти леммы позволяют искать стягиваемую пятерку не только на множестве вершин нерасширяемой четверки H и одной крайней части $G-H$, но и использовать одновременно вершины нескольких крайних частей $G - H$, и даже вершины границ этих крайних частей.

Лемма 8. *В обозначениях леммы* 6 *пусть $S_i = \mathrm{Bound}(A_i)$. Тогда*

1) граф $G - H - W_1 - W_2$ связен;

2) если вершины S_i смежны хотя бы для одного $i \in \{1, 2\}$, то граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен или содержит ровно две вершины.

Лемма 9. *В обозначениях леммы* 6 *пусть $\{p, q\} = \mathrm{Bound}(A_i)$ для некоторого $i \in \{1, 2\}$. Пусть $|H| \leqslant 4$.*

Предположим, что в множестве $W_i \cup H$ нашлась стягиваемая четверка H', и граф $G - H'$ не является циклом. Для графа $G - H'$ также *выполнены все утверждения леммы 4. Пусть A — крайняя часть графа $G - H'$, $W = \mathrm{Int}(A)$. Тогда*

1) вершина из H не может соседствовать в $G(W)$ с вершиной из $V(G - H - W_i)$.

2) Если $N_G(H') \subset \{p, q\} \cup H$, то $\{p, q\}$ — внутренность одной из крайних частей графа $G - H'$. В частности, $pq \in E(G)$.

Во второй главе диссертации мы докажем, что если для какой-то стягиваемой четверки H граф $G - H$ оказался простым циклом, то в графе G есть стягиваемая пятерка. Простой цикл отличается от остальных двусвязных графов тем, что не содержит одиночных разделяющих множеств, и следовательно его дерево разбиения состоит всего лишь из одной части. Поэтому случай с циклом приходится разбирать отдельно. Во второй главе доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть в трехсвязном графе G хотя бы 13 вершин, и $H \subset V(G)$ — стягиваемое множество из четырех вершин, такое что граф $G - H$ является простым циклом. Тогда в G есть стягиваемая пятерка.*

В третьей главе диссертации мы разберем стягиваемые четверки, для которых $H_i^\star$ непустое при $i = 1$ или 2. Используя леммы 6, 7, 8 мы изучаем, каким может быть граф $G(H)$, с какими вершинами $G - H$ могут быть смежны вершины H, и какого размера могут быть крайние части графа $G - H$. Почти всегда получается доказать, что в графе G есть стягиваемая пятерка, за исключением одного случая — первой подозрительной четверки. Разбор этой четверки завершится только в четвертой главе.

В четвертой главе разбираются стягиваемые четверки, для которых $H_1^\star = H_2^\star = \varnothing$. В этом случае любые подпути в W_1 и W_2 стягиваемы по пункту 4 леммы 7 и $|W_1|, |W_2| \in \{2, 3, 4\}$. Сначала разбирается случай, когда размер одной из этих крайних частей равен 4. И в этом случае строится пример трехсвязного графа на 12 вершинах, в котором нет стягиваемой пятерки. Далее мы завершаем разбор первой подозрительной четверки и доказываем, что в графе с первой подозрительной четверкой есть стягиваемая пятерка. Основные этапы нахождения этой пятерки можно увидеть в формулировке доказываемой в работе леммы.

Лемма 11. *В обозначениях леммы* 6 *пусть* $\{p, q\} = \mathrm{Bound}(A_i)$ *для некоторого* $i \in \{1, 2\}$ *и* $\mathrm{Int}(A_i) = \{u_1, u_2, u_3\}$, *где* u_1 *смежна с* p, *а* u_3 *— с* q. *Предположим, что ровно одна вершина* $x \in H$ *смежна с* $\mathrm{Int}(A_i)$. *Тогда*

1) множество $H' = \{p, u_1, u_2\}$ *стягиваемо;*

2) если x *смежна хотя бы с двумя вершинами* H, *то множество* H' *расширяемо некоторой вершиной* v, *причем* $v \neq x$, $v \neq q$.

3) если в дополнение к пункту 2 выполнено, что $d_{G-H'}(x) \geqslant 4$ *или оба соседа* x *в графе* $G(H)$ *несмежны с* p, *то в* G *есть стягиваемая пятерка.*

Далее мы продолжаем разбирать четверки, для которых $H_1^\star = H_2^\star = \varnothing$. В ходе исследования четверок, для которых размеры крайних частей равны 2 или 3, выделяются ещё четыре типа подозрительных четверок 2, 3, 4, 5, и доказывается, что если в графе G, есть стягиваемая четверка H, не являющаяся подозрительной четверкой типа 2, 3, 4, 5, то в графе G есть также стягиваемая пятерка.

При доказательстве последнего утверждения, исследуются не только две крайние части графа $G - H$, но и вся структура дерева разбиения $\mathrm{BT}(G - H)$. Доказываются следующие леммы.

Лемма 12. *Если стягиваемая четверка* H *не является подозрительной четверкой типа 2-5, то в графе* $G - H$ *ровно две крайние части. Границы* $\{p, q\}$ *и* $\{r, s\}$ *этих крайних частей не совпадают.*

Из леммы 12 следует, что граф $\mathrm{BT}(G - H)$ является простым путем.

Лемма 13. *Пусть стягиваемая четверка* H *не является подозрительной четверкой типа 2-5. Предположим, что границы* $\{p, q\}$ *и* $\{r, s\}$ *крайних частей графа* $G - H$ *пересекаются. Тогда выполнено одно из двух утверждений:*

(1) вершина, лежащая в пересечении этих границ, имеет степень больше 3 в $G - H$.

(2) pq, $rs \notin E(G)$, в графе $G - H$ ровно три части, причем та часть, которая не является крайней, — 3-блок.

Лемма 14. *Пусть стягиваемая четверка H не является подозрительной четверкой типа 2-5. Пусть $\{p, q\}$ — граница крайней части A_1. Тогда если $pq \notin E(G)$, то хотя бы один из графов $G - H - W_1 - p$ или $G - H - W_1 - q$ двусвязен.*

Наконец, в пятой главе доказывается, что если в графе есть только стягиваемые подозрительные четверки типов 2-5, то есть и стягиваемая пятерка. Рассуждения в этой главе строятся на исследовании структуры всего двусвязного графа, получаемого при удалении стягиваемых множеств. Доказывается новая лемма об этой структуре, которая затем применяется для стягиваемых множеств размера не только четыре, но и три.

Лемма 15. *Пусть G — трехсвязный граф и H — стягиваемое множество в G такое, что граф $G - H$ не является простым циклом. Тогда для любой вершины $x \in \mathrm{N}_G(H)$ существует множество $U \subset \mathrm{N}_G(H) \setminus \{x\}$ такое, что множество $H \cup U$ стягиваемо. Причем, если $|U| > 1$, то $(G - H)(U)$ будет являться простым путем.*

При помощи этой леммы в графе с подозрительными четверками находятся новые стягиваемые четверки, которые уже не являются подозрительными, а этот случай уже разобран в главе 4.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения.

В первой главе доказываются новые факты о свойствах нерасширямых множеств в двусвязных графах.

Во второй главе изучается случай, когда при удалении стягиваемой четверки H остается простой цикл.

В третьей главе разбираются стягиваемые четверки, для которых $H_i^\star$ непустое при $i = 1$ или 2.

В четвертой главе разбираются стягиваемые четверки, для которых $H_1^\star = H_2^\star = \varnothing$. При этом выделяются подозрительные четверки, для которых сразу не удаётся найти стягиваемую пятерку в графе. Строится пример трехсвязного графа на 12 вершинах, в котором нет стягиваемой пятерки.

В пятой главе доказывается, что если в графе есть только стягиваемые подозрительный четверки типов 2-5, то есть и стягиваемая пятерка.

Нумерация определений, теорем, лемм, замечаний, рисунков и формул в диссертации — сквозная для всех главы.

Глава 1

Новые свойства нерасширяемых множеств

Лемма 8. *В обозначениях леммы* 6 *пусть* $S_i = \mathrm{Bound}(A_i)$. *Тогда*

1) граф $G - H - W_1 - W_2$ *связен;*

2) если вершины S_i *смежны хотя бы для одного* $i \in \{1, 2\}$, *то граф* $G - H - W_1 - W_2$ *двусвязен или содержит ровно две вершины.*

Доказательство. 1) По пункту 3 леммы 4 граф $G - H - W_1$ двусвязен. Так как $G(W_2)$ — путь между вершинами S_2, граф $G - H - W_1 - W_2$ связен.

2) Пусть смежны вершины s_1 и $s_2 \in S_1$. Граф $G - H - W_2$ двусвязен. Предположим, что при удалении вершин W_1 остается более двух вершин и двусвязность теряется. Это означает, что между какими-то двумя вершинами $G - H - W_1 - W_2$ не существует двух не пересекающихся по внутренним вершинам путей. Это могут быть только вершины s_1 и s_2, так как для любых других двух вершин проход по пути W_1 можно заменить на проход по ребру s_1s_2. Следовательно, граф $G-H-W_1-W_2-s_1s_2$ несвязен и состоит из двух компонент связности $B_1 \ni s_1$, $B_2 \ni s_2$. Так как $v(G - H - W_1 - W_2 - s_1s_2) > 2$, одна из компонент B_1, B_2 содержит хотя бы две вершины (пусть, например, B_1). Но тогда в графе $G - H - W_2$

вершина s_1 отделяет $B_1 \setminus \{s_1\}$ от $B_2 \cup W_1$, что противоречит двусвязности этого графа. $\square$

Лемма 9. *В обозначениях леммы 6 пусть* $\{p, q\} = \mathrm{Bound}(A_i)$ *для некоторого* $i \in \{1, 2\}$. *Пусть* $|H| \leqslant 4$.

Предположим, что в множестве $W_i \cup H$ *нашлась стягиваемая четверка* H', *и граф* $G - H'$ *не является циклом. Для графа* $G - H'$ *также выполнены все утверждения леммы 4. Пусть* A *— крайняя часть графа* $G - H'$, $W = \mathrm{Int}(A)$. *Тогда*

1) вершина из H *не может соседствовать в* $G(W)$ *с вершиной из* $V(G - H - W_i)$.

2) Если $N_G(H') \subset \{p, q\} \cup H$, *то* $\{p, q\}$ *— внутренность одной из крайних частей графа* $G - H'$. *В частности,* $pq \in E(G)$.

Доказательство. 1) Предположим, что вершина $x \in H \cap W$ соседствует в $G(W)$ с вершиной $f \in V(G - H - W_i)$. Граф $G - H - W_i$ двусвязен, поэтому вершина f имеет в нем степень хотя бы 2. Так как $x \in W$, то $x \notin H'$, кроме того $fx \in E(G)$. Следовательно, $d_{G-H'}(f) \geqslant 3$, что невозможно, если f — внутренняя вершина части-цикла из $\mathrm{Part}(G - H')$.

2) По пункту 1) внутренность крайней части $W \in \mathrm{Part}(G - H')$ не может содержать одновременно вершины множества $\{p, q\}$ и вершины множества H, так как иначе какая-то вершина из множества $\{p, q\}$ будет смежна с вершиной множества H в $G(W)$. Значит, если $\{p, q\}$ не является внутренностью одной из частей, то внутренности всех крайних частей $G - H'$ лежат в H. В $G - H'$ хотя бы две крайние части и во внутренности каждой хотя бы две вершины, и при этом $|H| \leqslant 4$. Следовательно, H в точности состоит из внутренностей двух крайних частей $G - H'$. Но внутренности разных частей несмежны друг с другом, поэтому, $G(H)$ несвязен. Противоречие.

$\square$

Глава 2

Граф $G - H$ — простой цикл

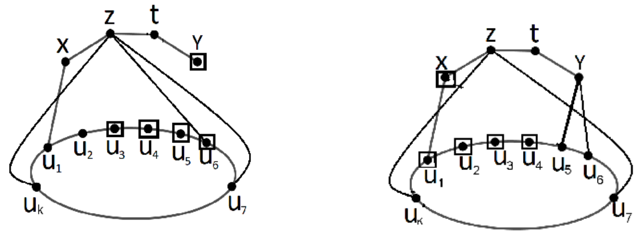
Теорема 5. *Пусть в трехсвязном графе G хотя бы 13 вершин, и $H \subset V(G)$ — стягиваемое множество из четырех вершин, такое что граф $G - H$ является простым циклом. Тогда в G есть стягиваемая пятерка.*

Предположим, что в G нет стягиваемого подмножества на 5 вершинах. Обозначим через C граф $G - H$. Разберем два случая.

2.1 В $G(H)$ можно выбрать путь $xzty$ из четырёх вершин

Докажем, что этот путь можно выбрать так, чтобы оба его конца были смежны с C. Предположим, что x несмежна с C. В силу трехсвязности G вершина x смежна с y, z, t (иначе x можно отделить от остального графа, удалив не более двух вершин), и вершины y, z, t смежны с C (иначе две вершины H, не смежные с C, можно отделить от C двумя другими вершинами H). А тогда можно рассмотреть путь $zxty$. Далее считаем, что x и y смежны с C.

Выберем в C путь из пяти вершин. Пусть W — множество вершин этого пути. Множество W нестягиваемо, тогда либо $N_G(x) \cap V(C) \subset W$, либо $N_G(y) \cap V(C) \subset W$. Не умаляя общности будем считать, что реализован



(a) (b)

Рис. 1: *стягиваемые пятерки в разделе 2.1.*

первый вариант. Очевидно, что W можно выбрать таким образом, чтобы вершина x была смежна хотя бы с одним из концов пути $G(W)$. Обозначим вершины цикла последовательно u_1, ..., u_k, где $W = \{u_1, \ldots, u_5\}$ и вершина x смежна с u_1. Множество $W' = \{u_2, u_3, \ldots, u_6\}$ также нестягиваемо, поэтому $N_G(y) \subset W'$.

Так как $v(G) \geqslant 13$, цикл C содержит хотя бы 9 вершин. Рассмотрим множество $W'' = \{u_5, u_6, \ldots, u_9\}$, оно опять же нестягиваемо, значит $N_G(y) \cap V(C) \subset W' \cap W'' = \{u_5, u_6\}$. Аналогично, вершина x может быть смежна или только с одной или с двумя соседними вершинами C. По нашему предположению $N_G(x) \cap V(C) \subset W$ и x смежна с u_1. Следовательно, $N_G(x) \cap V(C) \subset \{u_1, u_2\}$.

Так как пятерка $\{u_3, u_4, u_5, u_6, y\}$ нестягиваема (см. Рис 1a), при ее удалении остается недвусвязный граф. Это возможно, только когда $N_G(t) \cap V(C) \subset \{u_3, u_4, u_5, u_6\}$. Следовательно, с вершинами u_7, ..., u_k может быть смежна только z. Вершины u_5, u_6 смежны с $\{z, t, y\}$, так как x несмежна с ними, и y смежна с $\{u_5, u_6\}$, а тогда стягиваема пятерка $\{x, u_1, u_2, u_3, u_4\}$ (один из возможных примеров на Рис 1b).

2.2 В $G(H)$ нет пути из четырёх вершин

Следовательно, вершины H можно обозначить так, что x, y, z смежны в $G(H)$ с t и только с ней. Кроме того, при таких обозначениях каждая вершина x, y, z имеет хотя бы двух соседей в C. Аналогично рассуждениям предыдущего пункта можно выбрать одну из вершин множества $H \backslash \{t\}$ (не умаляя общности, x) и пронумеровать вершины цикла C так, чтобы для множества $W = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ выполнялось условие $\mathrm{N}_G(x) \cap V(C) \subset W$ и вершина x была смежна с u_1.

2.2.1 Вершины x и u_5 несмежны.

Попробуем тогда удалить подграф $G(\{x, u_1, u_2, u_3, u_4\})$. Оставшийся граф может быть недвусвязным только в том случае, когда хотя бы у одной из вершин y, z все соседи в C лежат в множестве $W' = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$. Не умаляя общности будем считать, что у y. Если z смежна хотя бы с одной вершиной в $C-W$, то пятерка $\{y, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ стягиваема (см. Рис 2, при $i \geqslant 6$ вершина u_i смежна с z или t).

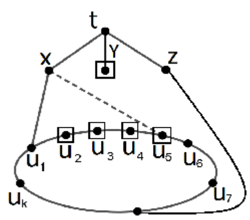


Рис. 2: *пятерка* $\{y, u_2, u_3, u_4, u_5\}$

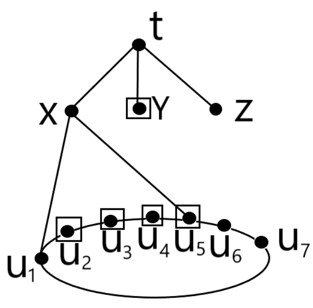
Значит, с $C-W$ смежна только t. Так как $k \geqslant 9$, пятерка $W'' = \{u_1, u_k, u_{k-1}, u_{k-2}, u_{k-3}\}$ будет стягиваема. Действительно, вершины u_2 и u_{k-4} смежны с H и каждая из вершин x, y, z имеет хотя бы по одному соседу в $C - W''$.

2.2.2 Вершина x смежна с u_1 и u_5

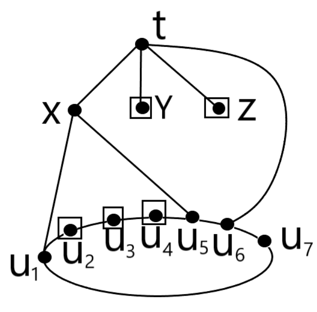
Множество $\{u_2, u_3, \dots, u_6\}$ нестягиваемо, поэтому, не умаляя, общности у y все соседи в C лежат в этом множестве. Если z смежна с u_6, то пятерка $\{y, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ стягиваема, так как y имеет хотя бы два соседа в C (см. Рис 3a).

Если t смежна с u_6, то пятерка $\{y, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ не стягиваема только в том случае, если все соседи z из C лежат в множестве $\{u_2, u_3, u_4, u_5\}$, но тогда, как легко видеть, пятерка $\{y, z, u_2, u_3, u_4\}$ стягиваема (см. Рис 3b).

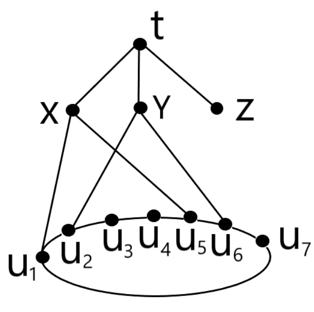
Значит, y смежна с u_6. Повторяя рассуждения раздела 2.2.1 для вершины y и пятерки $\{u_6, u_5, u_4, u_3, u_2\}$, получаем, что y также смежна и с u_2 (см. Рис 3c). Если z смежна с хотя бы одной вершиной из u_2, u_3, u_4, u_5, то пятерка $\{z, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ стягиваема. Также выше доказано, что z несмежна с u_6 и по симметричным причинам с u_1. Откуда немедленно следует, что пятерка $\{u_4, u_3, u_2, u_1, u_k\}$ стягиваема, так так все вершины x, y, z имеют соседей в C вне этой пятерки.



(a)



(b)



(c)

Рис. 3: *стягиваемые пятерки в разделе 2.2.2*

Глава 3

Одно из множество $H_i^\star$ — непустое.

3.1 Доказательство того, что $|H_i^\star| \neq 1$

Теперь разберемся со случаем, когда при удалении любой стягиваемой четверки остается не цикл. Тогда верны леммы 6 и 7.

Докажем, что $|H_1^\star| \neq 1$, $|H_2^\star| \neq 1$.

Предположим, что $H_1^\star = \{x\}$. Тогда $H_2 = H \setminus \{x\} = \{y, z, t\}$.

По пункту 2 леммы 7 вершина x смежна ровно с одной вершиной H_2 и по пункту 1 этой же леммы x несмежна с W_2. Так как G трехсвязен, $d_G(x) \geqslant 3$. Следовательно, x смежна хотя бы с двумя вершинами множества $V(G - H - W_2)$. По пункту 4 леммы 6 граф $G - H - W_2$ двусязен, а тогда двусвязен и граф $G - H_2 - W_2$, так как получается добавлением к $G - H - W_2$ вершины x, смежной хотя бы с двумя вершинами. Как уже было сказано, x — висячая вершина в $G(H)$, поэтому граф $G(H_2)$ связен. Очевидно, H_2 смежно с W_2. Таким образом, множество $H_2 \cup W_2$ стягиваемо. Так как $|W_2| \geqslant 2$, и, по нашему предположению, в G нет стягиваемой пятерки, выполнено $|W_2| \geqslant 3$.

По пункту 5 леммы 7 $|W_1| \leqslant 3$ или $|W_1| = 5$.

3.1.1 $|W_1| = 2$, $G(W_1) = uv$.

По пункту 2 леммы 7 вершина x имеет ровно одного соседа в H_2 (не умаляя общности, y), и по пункту 1 этой же леммы в $G - H$ вершина x смежна только с вершинами W_1. Так как $d_G(x) \geqslant 3$, $N_G(x) = \{y, u, v\}$.

Также будем считать, что y смежна с вершиной z. Тогда t имеет не более одного соседа в $G - H - W_1$, иначе пятерка $\{u, v, x, y, z\}$ будет стягиваема (граф $G - \{u, v, x, y, z\}$ получается добавлением к двусвязному графу $G - H - W_1$ вершины t, смежной с двумя вершинами).

Разберем несколько случаев.

Случай 1. *Вершина t смежна с W_1.*

Можно считать, что t смежна с u. Пятерка $\{u, v, x, y, t\}$ нестягиваема, поэтому у z не более одного соседа в $G - H - W_1$. Так как $d_G(z) \geqslant 3$, вершина z должна быть смежна с множеством $\{t, u, v\}$. Пятерка $\{x, u, v, z, t\}$ не стягиваема, значит у y тоже не более одного соседа в $G - H - W_1$.

Из пункта 1 леммы 4 и пункта 1 леммы 7 следует, что каждая вершина W_2 смежна хотя бы с одной вершиной H_2, а из каждой вершины H_2 выходит не более одного ребра в W_2, поэтому $|W_2| \leqslant 3$. Ранее было доказано, что $|W_2| \geqslant 3$. Тогда $|W_2| = 3$, между W_2 и H_2 идёт 3 независимых ребра, и других ребер из H_2 в $V(G - H - W_1)$ не идёт. Пусть $G(W_2) = pqr$.

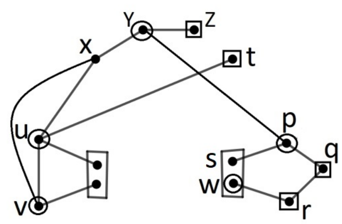


Рис. 4: *четверка $\{z, t, q, r\}$ и ее окрестность*

Предположим, что y смежна с одной из крайних вершин W_2, не умаляя общности, с p. Докажем, что четверка $\{z, t, q, r\}$ стягиваема и расширяема (см. Рис 4). Во-первых, она связна, так как между множествами $\{z,t\}$ и $\{q,r\}$ идёт два независимых ребра, и вершины q и r смежны. Во-вторых, граф $G-\{z,t,q,r\}$ получается из двусвязного графа $G-H-W_2$ добавлением пути $uxyps$, где s — сосед p в множестве $V(G-H-W_2)$. Заметим, что $u \neq s$ по пункту 3 леммы 6, поэтому присоединение такого пути действительно сохраняет двусвязность. Таким образом, четверка $\{z,t,q,r\}$ стягиваема. Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{u,v,y,p,w\}$ (как было доказано выше, множество $\{x\}\cup V(G-H-W_1-\{q,r\})$ несмежно с $\{z,t\}$), где w — сосед r в $G-H-W_2$. Но u и v имеют степень 3 в графе $G-\{z,t,q,r\}$, поэтому не могут входить в пути, удовлетворяющие лемме 6. Тогда в пути могут входить только три вершины $\{y,p,w\}$, но из трёх путей не составить два пути из не менее чем двух вершин в каждом. Противоречие.

Получаем, что y смежна с q. Можно считать, что t смежна с p, а z — с r. Тогда стягиваема пятерка $\{q,r,x,y,z\}$ (см. Рис. 5).

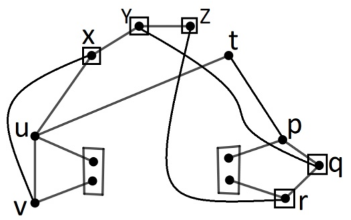


Рис. 5: *стягиваемая пятерка* $\{q,r,x,y,z\}$

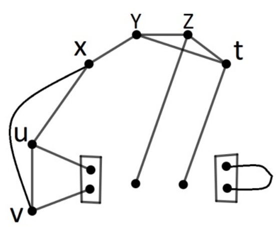


Рис. 6: *в H только вершина y смежна с W_2*

Случай 2. *Вершина t несмежна с W_1.*

Но $d_G(t) \geqslant 3$ и t имеет не более одного соседа в $G-H-W_1$, поэтому она смежна с y и z. Теперь мы можем повторить рассуждения случая 1, поменяв местами z и t, так как t смежна с y. Получим, что вершина z также несмежна с W_1 и имеет ровно одного соседа в $G-H-W_1$. Кроме того, соседи z и t, лежащие в $G - H$, должны быть различны в силу трехсвязности графа G.

Покажем, что хотя бы одна из вершин z, t должна быть смежна с W_2. Пусть это не так и с W_2 смежна только y (см. Рис 6). Но тогда, если
а) $|W_2| = 3$, то пятерка $W_2 \cup \{x, y\}$ стягиваема,
б) $|W_2| \geqslant 4$. Заметим, что граф $G - W_2$ двусвязен, так как он получается присоединением к двусвязному графу $G - H - W_2$ сначала пути xyz, причем x и z смежны с разными вершинами $G - H - W_2$, а затем вершины t, которая смежна с z и ещё одной вершиной. Следовательно, $H_1 = H$, $H_2^\star = \varnothing$, поэтому по пункту 4 леммы 7 любой подпуть из четырёх вершин в W_2 стягиваем. Подпуть также расширяем, так как имеет всего три вершины в окрестности (из трёх вершин не составить два пути, удовлетворяющие лемме 6).

Далее будем считать, что t смежна с W_2. Мы уже доказали, что $|W_2| \geqslant 3$. Разберем два подслучая.

Подслучай 2.1. $|W_2| \geqslant 4$.

Если в $G(W_2)$ можно выделить такой подпуть W из четырёх вершин, что t с ним смежна, а z — нет (или наоборот), то этот подпуть в объединении с t (с z) будет стягиваемым. Действительно, пусть t смежна с W. Тогда все вершины $W_2 \setminus W$ представляются в виде объединения не более двух подпутей: $w_1 \dots w_k$ и $w_i \dots w_m$. Вершины w_k и w_m смежны с y или z. Поэтому если мы к двусвязному графу $G - H - W_2$ присоединим сначала путь $xy(z)w_k \dots w_1$, затем $(z)w_i \dots w_m$ (z мы добавляем в том случае, если w_k или w_i соответственно смежна с z), а затем, если нужно, вершину z, смежную хотя бы с двумя вершинами в полученном графе, то новый граф будет тоже двусвязен. Новый граф — это в точности граф $G - W - \{t\}$. Следовательно, пятерка $W \cup \{t\}$ стягиваема.

Если в W_2 можно выделить такой подпуть из трёх вершин, что z и t с ним смежны, то этот подпуть в объединении с $\{z, t\}$ будет стягиваемым, так как, в W_2 есть вершины, не входящие в этот подпуть, и все они смежны с y (в начале пункта мы доказали, что z и t имеют ровно одного соседа в $G-H$).

Значит ни одного такого подпути нет. Тогда $|W_2|=4$, а вершины z и t смежны с разными крайними вершинами W_2. Пусть t смежна с p. Тогда четверка $\{z\}\cup W_2\setminus\{p\}$ стягиваема и расширяема, ведь в ее окрестности всего 4 вершины, одна из которых смежна с двумя другими (см. Рис 7).

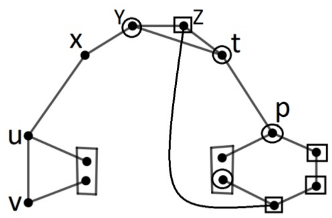


Рис. 7: *четверка* $\{z\}\cup W_2\setminus\{p\}$ *и ее окрестность*

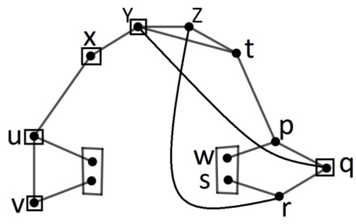


Рис. 8: *стягиваемая пятерка* $\{u,v,x,y,q\}$

Подслучай 2.2. $|W_2|=3$.

Пусть $G(W_2)=pqr$. Также обозначим соседей p и r в $G-H-W_2$ через w и s, соответственно.

Если z и t соединены двумя независимыми ребрами с p и r, то y смежна с q и пятерка $\{u,v,x,y,q\}$ стягиваема (см. Рис. 8). Поэтому можно выбрать одну из крайних вершин W_2 (не умаляя общности, p) так, что y с ней смежна, а z и t — нет.

Напомним, что ранее мы доказали, что t смежна с W_2. Четверка $H'=\{z,t,r,q\}$ стягиваема и нерасширяема, в ее окрестности лежат вершины y, p, s и, возможно, какая-то вершина, являющаяся соседом z. Чтобы в $G-H'$ существовали пути, удовлетворяющие лемме 6, необходимо, чтобы z имела соседа в $G-H-W_2$ (см. Рис. 9).

Четверка $H''=\{p,q,r,t\}$ стягиваема и нерасширяема. Ее окрестность

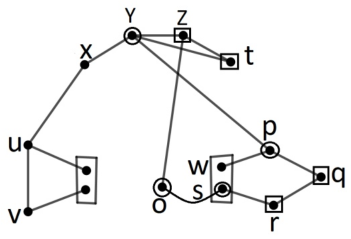


Рис. 9: *четверка {z,t,r,q} и ее окрестность*

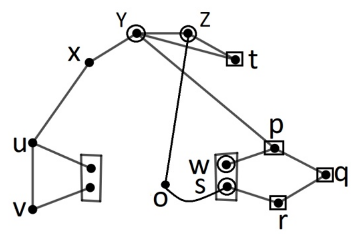


Рис. 10: *четверка {p,q,r,t} и ее окрестность*

состоит из вершин $\{y, z, w, s\}$ (см. Рис. 10). Вершины y и z смежны, поэтому, вершины w и s образуют второй путь. Из леммы 6 следует, что граф $G - H'' - \{w, s\}$ двусвязен, но к нему можно добавить t и двусвязность сохранится. Получаем, что пятерка $\{p, q, r, w, s\}$ стягиваема.

3.1.2 $|W_1| = 3$, $G(W_1) = u_1u_2u_3$.

Пусть $G(W_2) = w_1w_2 \dots w_k$, w_1 смежна в $G - H$ с r и w_2, а w_k — с s и w_{k-1}. Кроме того, обозначим соседей W_1 в $G - H - W_1$ за p и q так, что $pu_1, qu_3 \in E(G)$.

По пункту 2 леммы 7 вершина x имеет ровно одного соседа в H_2, пусть это будет y. Так как $d_G(x) \geqslant 3$, вершина x смежна хотя бы с двумя вершинами W_1.

Предположим, что $N_G(\{z, t\}) \cap W_1 = \varnothing$. Тогда либо z и t несмежны и имеют хотя бы по два соседа в $G-H-W_1$, либо z и t смежны и имеют хотя бы по одному соседу в $G-H-W_1$, причем этих соседей можно выбрать так, что они не совпадут, ведь если у них только один общий сосед, то он и y отделяют $\{z, t\}$ от остальных вершин G, что противоречит трехсвязности G. В обоих случаях пятерка $\{x, y\} \cup W_1$ будет стягиваемой.

Значит, $N_G(\{z, t\}) \cap W_1 \neq \varnothing$. Не умаляя общности, z смежна с W_1, тогда $z \in H_1$, $z \notin H_2^\star$ (по пунктам 1 и 1 леммы 7). Могут ли y и t одновременно принадлежать $H_2^\star$? Пусть так. Воспользуемся пунктом 2 леммы 7. Вершина y смежна не более чем с одной вершиной H_1, поэтому y несмежна с z.

Если y смежна с t, то y и t входят в одну компоненту связности $H_2^\star$. Вершина y из этой компоненты уже смежна с $x \in H_1$, поэтому y и t не могут быть смежны с $z \in H_1$. Но тогда z не смежна ни с одной вершиной $G(H)$.

Если же y и t несмежны, то $\{x, y\}$ несмежно с $\{z, t\}$.

Получаем, что $|H_2^\star| \leqslant 1$, то есть, по лемме 7 (пункты 4 и 5), $|W_2| \leqslant 5$.

Четверка $W_1 \cup \{x\}$ стягиваема по пункту 3 леммы 7 и нерасширяема, поэтому в ее окрестности есть два пути из леммы 6. По лемме 9 одним из путей является pq. Вторым путем не может быть $G(\{y, z, t\})$. Действительно, в этом случае от H к W_2 идет не более двух рёбер. Но в W_2 не менее трёх вершин (это было доказано в начале раздела 3.1) и все они должны иметь степень не менее 3 в G.

Выделим отдельно несколько утверждений, которые мы сейчас доказали и которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Утверждение 1. *1) Вершина x смежна только с y и W_1, причем в W_1 смежна хотя бы с двумя вершинами.*

2) $|H_2^\star| \leqslant 1$ и $3 \leqslant |W_2| \leqslant 5$.

3) Четверка $W_1 \cup \{x\}$ стягиваема. Одним из путей для нее является pq, а второй образован ровно двумя вершинами из множества $\{y, z, t\}$.

4) Вершины p и q смежны. Значит, по лемме 8 граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен или содержит ровно две вершины.

3.1.2.1 $|W_2| = 3$.

Так как мы предположили, что $v(G) \geqslant 13$, то $v(G - H - W_1 - W_2) \geqslant 13 - 4 - 3 - 3 = 3$, то есть граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен.

Разберем два случая:

Случай 1. *Вершины z и t несмежны.*

Тогда они смежны с y.

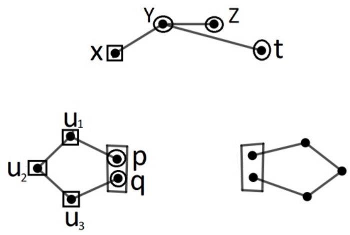


Рис. 11: *четверка $W_1 \cup \{x\}$ и ее окрестность*

Путями для четверки $W_1 \cup \{x\}$ должны быть pq и yz или yt. Та из вершин z, t, которая входит в путь, должна быть смежна с W_1. Ранее мы обозначили вершины так, что z смежна с W_1. Следовательно, если t несмежна с W_1, то путем точно является yz, а если смежна, то вершины z и t равноправны и, не умаляя общности, можно предположить, что путем будет yz.

Так как yz — путь, удовлетверяющий лемме 6 для графа $G - W_1 - x$, вершина y смежна только с x, z, t, и, быть может, вершинами из W_1, а у z максимум один сосед в $G - H - W_1$, поэтому t смежна хотя бы с двумя вершинами W_2.

Если W_2 смежно только с t, то пятерка $W_2 \cup \{t, y\}$ стягиваема, так как z имеет хотя бы два соседа из $G - H - W_2$ (мы сейчас рассматриваем случай, когда z несмежна с t).

Следовательно, z смежна с одной вершиной в W_2. Тогда y несмежна с W_1, иначе пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$ будет стягиваемой.

Если z смежна с крайней вершиной W_2, например, с w_3, то стягиваема пятерка $\{x, y, t, w_1, w_2\}$ (напомним, что ранее было доказано, что z смежна с W_1) (см. Рис. 12). Если t смежна с крайней вершиной W_1, например, с u_3, то стягиваема пятерка $\{x, y, z, u_1, u_2\}$ (см. Рис. 13).

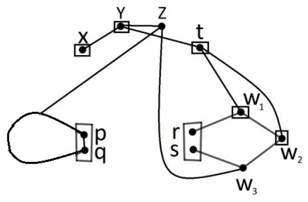


Рис. 12: *стягиваемая пятерка* $\{x, y, t, w_1, w_2\}$

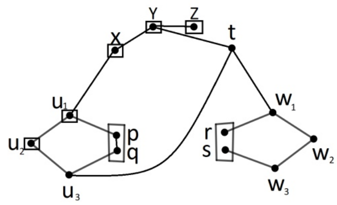


Рис. 13: *стягиваемая пятерка* $\{x, y, z, u_1, u_2\}$

Вершина z смежна с W_2, но не с крайними вершинами, то есть — с w_2. Тогда с w_1 и w_3 смежна t. В двух предыдущих абзацах было доказано, что y несмежна с W_1, а t несмежна с крайними вершинами W_1. Следовательно в W_1 можно выбрать две соседние вершины, одна из которых смежна с z так, что невыбранная смежна с x. Действительно, если z несмежна с какой-то из крайних вершин, например, u_1, то u_1 может быть смежна только с x, а z тогда смежна с $\{u_2, u_3\}$. Если же z смежна и с u_1, и с u_3, то с одной из них смежна и x (ведь x смежна хотя бы с двумя вершинами W_1). Тогда невыбранной можно оставить любую из крайних вершин, смежных с x. Не умаляя общности, выбраны вершины u_2, u_3.

Вершина p не совпадает хотя бы с одной вершиной из множества $\{r, s\}$, пусть $p \neq r$. Тогда, в силу двусвязности графа $G - H - W_1 - W_2$, пятерка $\{z, u_2, u_3, w_2, w_3\}$ стягиваема (см. Рис. 14).

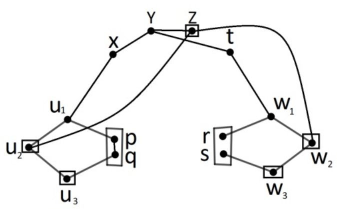


Рис. 14: *стягиваемая пятерка* $\{z, u_2, u_3, w_2, w_3\}$

Случай 2. *Вершины z и t смежны.*

Одним из путей для четверки $W_1 \cup \{x\}$ будет pq, а вторым путем для четверки $W_1 \cup \{x\}$ может быть yz, yt или zt.

`Предположим, что` zt `- второй путь для четверки` $W_1 \cup \{x\}$.

Обе вершины z и t смежны с W_1. Так как y смежна с $\{z, t\}$, не умаляя общности считаем, что смежны y и z. Тогда z не имеет соседей в W_2, t имеет максимум одного, а y — хотя бы 2. Если t смежна с y, то t несмежна с $G - H - W_1$ и граф $G - W_1 - x$ недвусвязнен (вершина y является точкой сочленения). И если t несмежна с W_2, то она смежна хотя бы с двумя вершинами $G - H - W_2$ и пятерка $W_2 \cup \{y, z\}$ стягиваема. Значит, t смежна с W_2.

Пусть t смежна с крайней вершиной W_2, например, с w_1. Тогда пятерка $\{w_2, w_3, x, y, z\}$ стягиваема, так как t смежна и с W_1 (см. Рис 15).

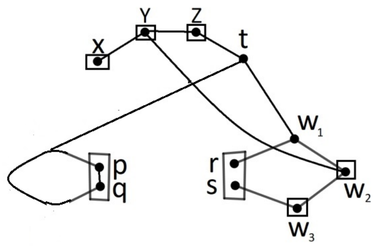


Рис. 15: *стягиваемая пятерка* $\{w_2, w_3, x, y, z\}$

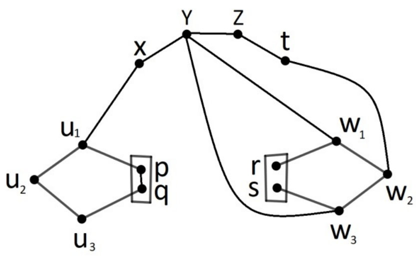


Рис. 16: t *смежна с* w_2, x *смежна с* u_1

Значит, t смежна с w_2, а y — с w_1 и w_3.

Вершина x смежна хотя бы с одной крайней вершиной W_1. Пусть с u_1 (см. Рис 16). Если множество $\{z, t\}$ смежно с $\{u_2, u_3\}$, то пятерка $\{u_2, u_3, z, t, w_2\}$ стягиваема. Значит, и z, и t смежны с u_1.

Вершина q не совпадает хотя бы с одной вершиной из множества $\{r, s\}$, пусть $q \neq s$. Тогда, в силу двусвязности $G - H - W_1 - W_2$, пятерка $\{z, t, u_1, w_1, w_2\}$ стягиваема (см. Рис 17).

`Поэтому` yz `(или` yt`) будет вторым путем для четверки` $W_1 \cup \{x\}$.

Не умаляя общности, yz. Опять же, z не имеет соседей в W_2 (так как мы рассматриваем случай, когда z смежна с t), а y должна иметь в W_2 одного соседа и не иметь соседей в $G - H - W_2$, так как иначе пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$ будет стягиваемой. Не умаляя общности, y смежна с одной из вершин w_1, w_2, тогда w_3 смежна с t.

Если t смежна с $G - H - W_2 - s$, то пятерка $\{x, y, z, w_1, w_2\}$ стягиваема (см. Рис 18).

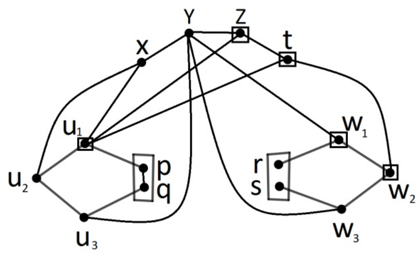


Рис. 17: *стягиваемая пятерка* $\{z, t, u_1, w_1, w_2\}$

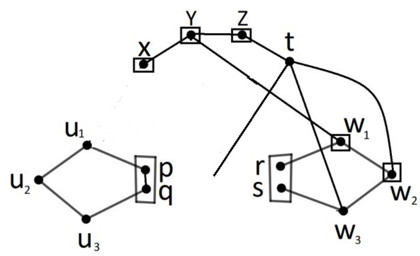


Рис. 18: *стягиваемая пятерка* $\{x, y, z, w_1, w_2\}$

Значит, с W_1 смежны только x и z. Причем, z смежна с W_1, так как она входит в путь для четверки $W_1 \cup \{x\}$ и несмежна с x. Вершина z имеет ровно одного соседа в $G - H - W_2$, иначе пятерка $\{y, t\} \cup W_2$ будет стягиваемой.

Утверждение 2. *В рассматриваемом случае* $\{p, q\} \neq \{r, s\}$.

Доказательство. Пусть $\{p, q\} = \{r, s\}$. Заметим, что в графе $G - H$ должны быть вершины, отличные от $W_1 \cup W_2 \cup \{p, q\}$, так как $v(G) \geqslant 13$. Следовательно, одиночное множество $\{p, q\} = \{r, s\}$ имеет степень не менее 3 в $\mathrm{BT}(G - H)$. Значит, в $G - H$ должна быть еще одна крайняя часть, отличная от $W_1 \cup \{p, q\}$ и $W_2 \cup \{p, q\}$. По лемме 4 эта крайняя часть — цикл длины хотя бы 4, причем все ее внутренние вершины смежны с H. Но ранее мы доказали, что ни одна вершина H не может быть смежна с вершинами $G - H - W_1 - W_2 - s$. Противоречие. $\square$

Напомним, что W_2 смежно в H только с y и t, а W_1 — только с x и z, причем y смежна ровно с одной вершиной W_2. Рассмотрим два случая.

Подслучай 2.1. *Вершина y смежна с w_2.*

Тогда t смежна с w_1 и w_3.

Если z смежна с крайней вершиной W_1, например, с u_1, то пятерка $\{u_2, u_3, x, y, w_2\}$ стягиваема (см. Рис 19).

Значит, z смежна с u_2, а x смежна с u_1 и u_3. Не умаляя общности можно предположить, что $p \neq r$. Пятерка $\{u_2, u_3, z, t, w_3\}$ стягиваема, так как граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен (см. Рис 20).

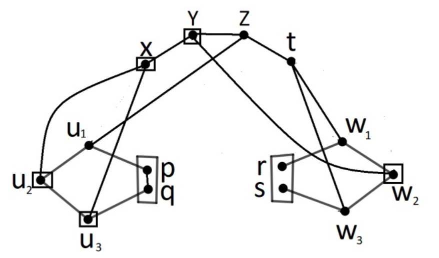


Рис. 19: *стягиваемая пятерка* $\{u_2, u_3, x, y, w_2\}$

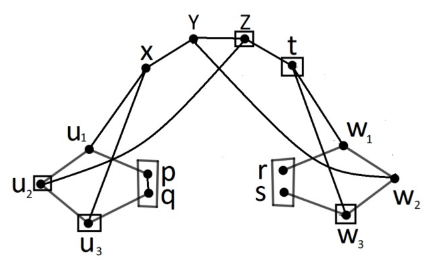
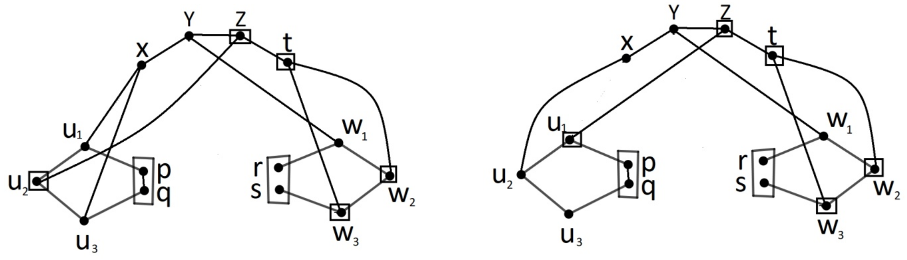


Рис. 20: *стягиваемая пятерка* $\{u_2, u_3, z, t, w_3\}$

Подслучай 2.2. *Вершина y смежна с крайней вершиной W_2.*

Можно считать, что y смежна с w_1.

Рассмотрим пятерку $\{z, t, w_2, w_3, u_i\}$, где u_i — сосед z в W_1. Если $i = 2$, то рассматриваемая пятерка стягиваема (см. Рис. 21(a)). Если же $i \in \{1, 3\}$, например, $i = 1$, то рассматриваемая пятерка нестягиваема, только если $q = r$ (см. Рис. 21(b)). Аналогично, пятерка $\{u_2, u_3, x, y, w_1\}$ нестягиваема, только если $p = s$. Но мы доказали, что $\{p, q\} \neq \{r, s\}$. Следовательно, одна из рассмотренных выше пятерок стягиваема.



(a) (b)

Рис. 21: *стягиваемые пятерки в случае y смежна с W_1, слева z смежна с внутренней вершиной W_1, справа — с крайней*

3.1.2.2 $|W_2| = 4$.

Предположим, что вершина y входит во второй путь для четверки $W_1 \cup \{x\}$. Если t несмежна с W_1, то этим путем может быть только yz. Если же t смежна с W_1, то z и t симметричны относительно доказанных о них утверждений, поэтому, не умаляя общности можно положить, что путь — это yz. Тогда t точно смежна с W_2, а значит, пятерка $W_2 \cup \{t\}$ стягиваема, так как x смежна хотя бы с двумя вершинами W_1, а z — хотя бы с одной.

Получаем, что вторым путем будет zt. Вершины z и t смежны с W_1, так как входят в пути для четверки $W_1 \cup \{x\}$ и несмежны с x. Снова z и t стали симметричны относительно доказанных утверждений. Не умаляя общности, z смежна с y. Также, z и t имеют степень 2 в $G - W_1 - \{x\}$ по пункту 2 леммы 6, поэтому z смежна в этом графе только с y и t, а t смежна с z и еще одной вершиной v. Причем, $v \neq y$, так как иначе y отделяла бы $\{z, t\}$ от остальных вершин двусвязного графа $G - W_1 - \{x\}$.

Если $v \in W_2$, то пятерка $W_2 \cup \{t\}$ стягиваема (опять же, x смежна хотя бы с двумя вершинами W_1, а z — хотя бы с одной) (см. Рис. 22). Значит, t несмежна с W_2 и имеет хотя бы двух соседей в $G - H - W_2$, z — хотя бы одного в W_1, а все вершины W_2 смежны с y. Следовательно, пятерка $W_2 \cup \{y\}$ стягиваема (см. Рис. 23).

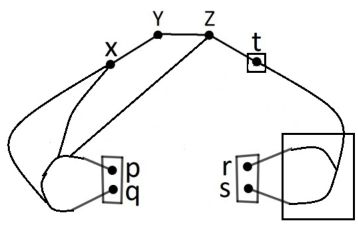


Рис. 22: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{t\}$

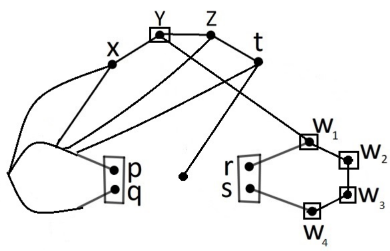


Рис. 23: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{y\}$

3.1.2.3 $|W_2| = 5$.

По утверждению 1, $|H_2^\star| \leqslant 1$. Если $|H_2^\star| = 0$, W_2 — стягиваемая пятерка. Случай $|H_2^\star| = 1$ подходит под условие следующего пункта, поэтому достаточно разобрать только следующий пункт.

3.1.3 $|W_1| = 5$, $G(W_1) = u_1u_2u_3u_4u_5$.

Напомним, что мы разбираем случай $H_1^\star = \{x\}$, $H_2 = \{y, z, t\}$. По пункту 5 леммы 7 вершины u_1 и u_5 смежны с x, и каждый подпуть W_1 стягиваем. Ни одна из вершин u_1, u_5 не может быть смежна с H_2. Действительно, если, например, u_5 смежна с H_2, то пятерка $W_1 \setminus \{u_5\} \cup \{x\}$ стягиваема.

3.1.3.1 u_2 смежна с x.

Если $\{u_3, u_4\}$ смежно с $H_2 = \{y, z, t\}$, то пятерка $\{u_3, u_4\} \cup H_2$ стягиваема (см. Рис. 24).

Значит u_3, u_4 смежны в H только с x, аналогично и u_2 смежна в H только с x. Тогда $N_G(\{u_2, u_3, u_4, u_5\}) = \{x, u_1, s\}$, где s — вершина, смежная с u_5 в $G-(W_1 \cup H)$ (см. Рис. 25). То есть четверка $H' = \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$ стягиваема и расширяема по лемме 6.

Получили, что u_2 и u_4 несмежны с x. Так как граф $G(H)$ связен и x

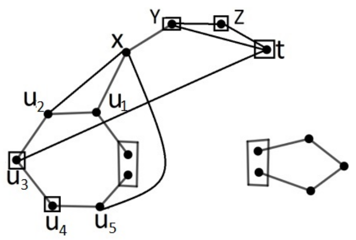


Рис. 24: *стягиваемая пятерка* $\{u_3, u_4\} \cup H_2$

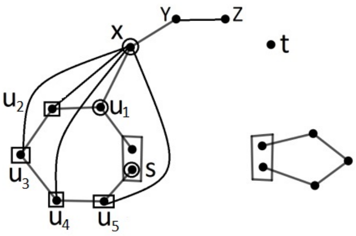


Рис. 25: *стягиваемая четверка* $\{u_2, u_3, u_4, u_5\}$ *и ее окрестность*

несмежна с $\{z, t\}$, будем считать, что y смежна с x и z.

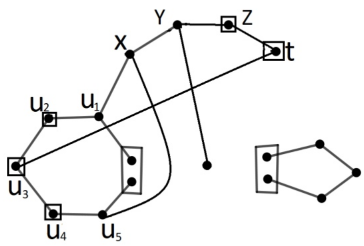


Рис. 26: *стягиваемая пятерка* $\{u_2, u_3, u_4, z, t\}$

3.1.3.2 Вершина t смежна с $\{u_2, u_3, u_4\}$.

Но пятерки $\{u_2, u_3, u_4, u_5, t\}$, $\{u_1, u_2, u_3, u_4, t\}$ нестягиваемы. Следовательно, z смежна в $G - H$ только с $\{u_2, u_3, u_4\}$ (мы уже показали, что с крайними вершинами W_1 ни одна вершина H_2 не смежна). При этом $H_2 = \{y, z, t\}$, а по определению H_2 граф $G - W_1 - x$ двусвязен. Значит y имеет соседа в $G - H - W_1$, а z смежна с t. Легко видеть, что пятерка $\{u_2, u_3, u_4, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 26).

3.1.3.3 С вершинами u_2, u_4 смежны только y или z.

Пусть $s', r' \in G - W_1 - H$ смежны с u_1 и u_5, соответственно.

Пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$ нестягиваема. Это возможно только если t смежна с y, z и ровно одной вершиной в $G - H - W_1$.

Предположим, что z смежна с u_2, u_3 или u_4. Вершина t смежна ровно с одной вершиной $G - H - W_1$, поэтому не умаляя общности можно считать, что t несмежна с r'. Тогда пятерка $\{u_1, u_2, u_3, u_4, z\}$ стягиваема (см. Рис. 27, из трех пунктирных рёбер хотя бы одно существует, ребро от t идёт к одной из вершин $G - H - W_1$).

Следовательно, y смежна с u_2 и u_4.

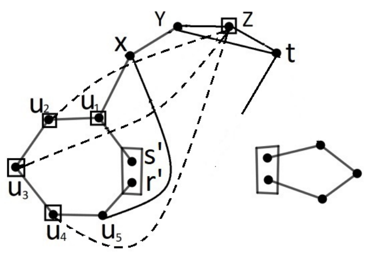


Рис. 27: *стягиваемая пятерка* $\{u_1, u_2, u_3, u_4, z\}$

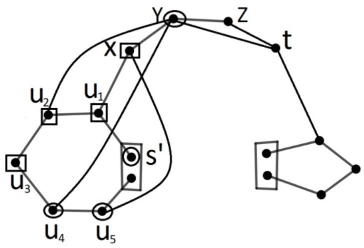


Рис. 28: *четверка* $\{u_1, u_2, u_3, x\}$ *и ее окрестность*

Из всего вышеперечисленного следует, что $N_G(\{u_1, u_2, u_3, x\}) = \{s', y, u_4, u_5\}$. Эта четверка стягиваема и расширяема, так как при ее удалении не образуются два пути, удовлетворяющие лемме 6 (см. Рис. 28). Действительно, вершина u_4 смежна и с y, и с u_5, поэтому из четырех вершин $\{s', y, u_4, u_5\}$ нельзя составить два пути так, чтобы один из них не пересекал окрестность другого.

3.2 Доказательство того, что $|H_i^\star| \neq 3$

Далее будем изучать случаи, когда $|H_i^\star| \neq 1$. При этом некоторые случаи разберутся сразу, а некоторые останутся под подозрением. Их разбор мы закончим только после того, как выявим все *подозрительные* четверки.

Докажем, что $|H_1^\star| \neq 3$. Пусть равно. Тогда $|H_2^\star| \leqslant 1$, Случай $|H_2^\star| = 1$ уже разобран, поэтому можно считать, что $H_2^\star = \varnothing$. Из пункта 4 леммы 7 следует, что $|W_2| \leqslant 4$.

Обозначим $H_1^\star = \{x, y, z\}$, $H_2 = \{t\}$. Не умаляя общности, t смежна с z. По пункту 1 леммы 7 вершины $H_1^\star$ смежны в $G - H$ только с вершинами W_1.

3.2.1 $|W_2| = 4$.

Так как $H_2^\star = \varnothing$, то $H = H_1$, а следовательно четверка W_2 стягиваема. По пункту 1 леммы 7 в окрестности этой четверки лежат ровно три вершины (t и две вершины в $G - H$), поэтому четверка W_2 расширяема по лемме 6.

3.2.2 $|W_2| = 3$.

По пункту 1 леммы 7 с W_2 смежна только t. Следовательно, множество $W_1 \cup \{x, y, z\}$ стягиваемо. Поэтому $|W_1| \geqslant 3$.

Предположим, что вершина t смежна в H только с z.

Из двух предыдущих абзацев следует, что либо x и y несмежны и у них хотя бы по два соседа в $G - H - W_2$, либо они смежны, у них хотя бы по одному соседу в $G - H - W_2$, причем, в силу трехсвязности G, этих соседей можно выбрать так, чтобы они были различны. В любом случае множество $W_2 \cup \{z, t\}$ стягиваемо (см. Рис. 29).

Следовательно, вершина t смежна в H хотя бы с двумя вершинами. По пункту 1 леммы 7 вершины $H_1^\star = \{x, y, z\}$ смежны в $G - H$ только с вершинами W_1.

`Это будет наша первая подозрительная четверка (см. Рис. 30).` Еще раз сформулируем ее свойства: внутренность одной из крайних частей $G - H$ имеет размер 3 и со всеми внутренними вершинами этой крайней части смежна только одна из вершин H, причем эта вершина смежна хо-

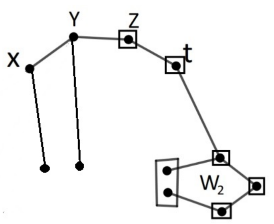


Рис. 29: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{z, t\}$

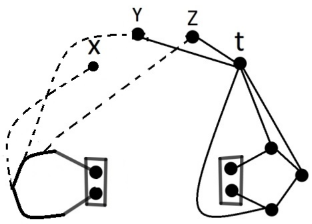


Рис. 30: *первая подозрительная четверка*

тя бы с двумя вершинами H. А три другие вершины H смежны только с внутренними вершинами другой крайней части.

3.2.3 $|W_2| = 2.$

Пусть ℓ — лист остовного дерева H. Если $\ell \in H_1^\star$, то ℓ имеет не более одного соседа в W_1, иначе пятерка $V(H) \setminus \{\ell\} \cup W_2$ стягиваема. Следовательно, любой лист из $H_1^\star$ имеет хотя бы двух соседей в H, откуда получаем, что в H есть цикл.

Выясним, как может выглядеть $G(H)$.

а) Вершины x, y, z образуют цикл.

Предположим, что хотя бы две вершины из $H_1^\star$ смежны с t, например, y и z. Тогда по теореме 4 из трех вершин y, z, t, образующих треугольник, две должны иметь степень 3 в G. Так как t смежна с вершинами W_2, это могут быть только y и z. Но тогда множество $\{x, t\}$ отделяет множество $\{y, z\}$ от остальных вершин графа G, что противоречит его трехсвязности.

Значит, t смежна только с z (см. Рис. 31а).

б) Вершины x, y, z не образуют цикл.

Но каждая из них имеет степень хотя бы 2 в $G(H)$. Тогда в графе $G(\{x, y, z\})$ каждая вершина имеет степень хотя бы 1. Следовательно, можно считать, что $G(\{x, y, z\})$ — это путь xyz. Вершины x и z обязательно смежны с t, а y может быть как смежна, так и несмежна с t (см. Рис. 31б,в).

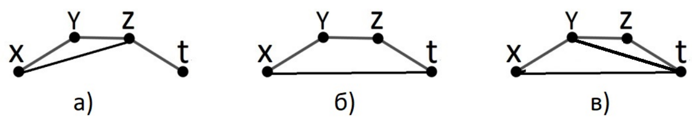


Рис. 31: *Три возможных варианта графа H*

3.2.3.1 $G(H)$ — цикл $xyzt$ или цикл xyz с добавленным ребром zt

Это графы а) и б) на рисунке 31.

По пункту 1 леммы 7 вершины $H_1^\star = \{x, y, z\}$ смежны в $G - H$ только с вершинами W_1. Пятерки $\{y, z, t\} \cup W_2$ и $\{x, z, t\} \cup W_2$ нестягиваемы, следовательно, x и y имеют ровно по одному соседу в W_1. Обозначим этих соседей через u и v, соответственно. Из трехсвязности графа G следует, что $u \neq v$.

Разбор этого случая следует из леммы 10.

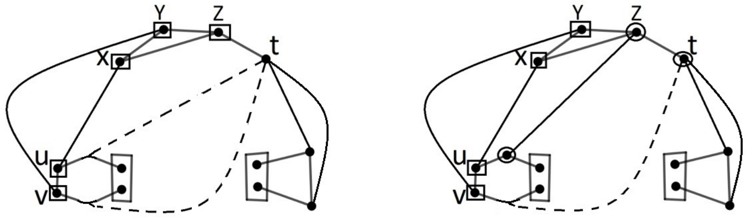
Лемма 10. *Пусть $G(H)$ — либо треугольник xyz и ведущее из него ребро zt, либо индуцированный цикл $xyzt$. Известно, что*
1) вершины x и y имеют в W_1 ровно по одному соседу u и v, соответственно, (причем, $u \neq v$), и несмежны с остальными вершинами $G-H$;
2) t смежна хотя бы с двумя вершинами $G - H - W_1$;
3) $|W_2| = 2$.

Тогда в G найдется стягиваемая пятерка.

Доказательство. Разберем несколько случаев.

`Вершины` u `и` v `смежны.`

Тогда, если z не имеет соседей в W_1, кроме быть может u и v, то пятерка $\{u, v, x, y, z\}$ стягиваема (см. Рис. 32(a), пунктирные ребра ведут к вершинам, которых может не быть в G).



(a) (b)

Рис. 32: *стягиваемые пятерки в случае* $|W_2| = 2$

Если же z имеет в $W_1 \setminus \{u, v\}$ хотя бы одного соседа, то стягиваема четверка $H' = \{u, v, x, y\}$ (см. Рис. 32(b) пунктирное ребро ведёт к вершине, которой может не быть в G). В окрестности этой четверки не более четырех вершин — это могут быть z, t и два соседа $\{u, v\}$ в графе $G - H$. Вершина t имеет степень минимум три в $G - H'$, то есть эта четверка расширяема по лемме 6.

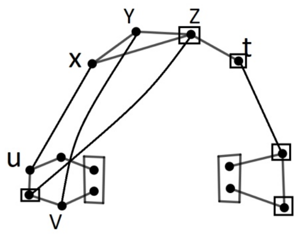


Рис. 33: *стягиваемая пятерка* $\{z, t\} \cup W_2$

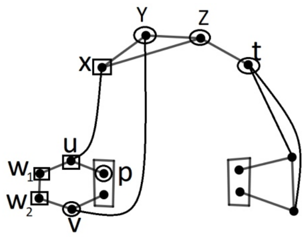


Рис. 34: *четверка* $\{w_1, w_2, u, x\}$ *и ее окрестность*

`Расстояние между` u `и` v `в` W_1 `равно 2.`

Тогда вершина между u и v смежна с $\{z, t\}$ и потому в объединении с $\{z, t\} \cup W_2$ дает стягиваемую пятерку (см. Рис. 33).

`Расстояние между` u `и` v `в` W_1 `хотя бы 3.`

Если в W_1 есть подпуть W на четырех вершинах, содержащий u, но не содержащий v, то пятерка $W \cup \{x\}$ стягиваема. Следовательно, $W_1 = uw_1w_2v\ldots$.

Четверка $\{w_1, w_2, u, x\}$ — стягиваема, но нерасширяемая, то есть в ее окрестности должны содержаться два пути, удовлетворяющие лемме 6 (см. Рис. 34). Окрестность этой вершины содержится в множестве $\{p, v, y, z, t\}$, где p — второй сосед вершины u в графе $G-H$. Вершина t не может входить в пути, так как у нее степень больше 2 в графе $G - \{w_1, w_2, u, x\}$. А вершина y смежна и с z, и с v, поэтому не найдутся два пути таких, что один не пересекается с окрестностью второго.

$\square$

3.2.3.2 $G(H)$ — цикл $xyzt$ с диагональю yt

Этот граф изображен на рисунке 31в.

Вершины x, y, t и z, y, t образуют треугольники. По теореме 4 в каждой этой тройке должно быть хотя бы две вершины степени 3 в G. Так как $d_G(t) \geqslant 5$, степени 3 имеют вершины x, y и z. Тогда y несмежна с $G - H$.

Вершины x и z имеют ровно по одному соседу в W_1 (напомним, x, $z \in H_1^\star$), причем их соседи различны в силу трехсвязности G. Пусть x смежна с $u \in W_1$, z смежна с $v \in W_1$.

`Расстояние между` u `и` v `равно 1.`

Тогда стягиваема пятерка $\{x, y, z, u, v\}$ (см. Рис. 35).

`Расстояние между` u `и` v `хотя бы 2.`

Обозначим через w соседа u, лежащего в W_1 между u и v. Четверка $\{x, y, u, w\}$ стягиваема и расширяема, так как в ее окрестности всего четыре вершины, одна из которых — t, имеющая большую степень (см. Рис. 36).

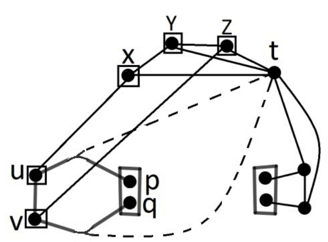


Рис. 35: *стягиваемая пятерка* $\{x, y, z, u, v\}$

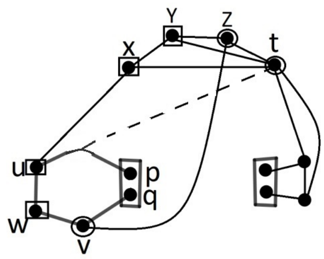


Рис. 36: *четверка* $\{x, y, u, w\}$ *и ее окрестность*

3.3 Доказательство того, что $|H_i^\star| \neq 2$

Докажем, что $|H_1^\star| \neq 2$. Пусть так, тогда, исходя из доказанного выше, $|H_2^\star| = 2$ или $|H_2^\star| = 0$.

Обозначим вершины H так, что $\{x, y\} = H_1^\star$, $\{z, t\} = H_2$. По пункту 1 леммы 7 вершины x и y смежны в $G - H$ только с вершинами W_1.

Пусть $G(W_1) = u_1 \dots u_k$, $G(W_2) = w_1 \dots w_\ell$.

По пункту 2 леммы 7 каждая из вершин x, y может быть смежна только с одной из вершин z, t. Причем, если x и y смежны, то они могут быть смежны только с одной и той же вершиной из $\{z, t\}$. В любом случае, чтобы граф $G(H)$ был связен, необходимо, чтобы z и t были смежны.

3.3.1 $|H_2^\star| = 0$.

То есть $H_1 = H$.

По пункту 4 леммы 7 каждый подпуть W_2 — стягиваемый, следовательно, $|W_2| \leqslant 4$.

3.3.1.1 $|W_2| = 4$.

Обозначим через p и q вершины, смежные с W_2 в $G - H$, тогда $N_G(W_2) \subset \{z, t, p, q\}$. Четверка W_2 стягиваема, но не расширяема, поэтому вершины $\{z, t, p, q\}$ должны образовывать два пути, удовлетворяющие лемме 6. Из леммы 9 следует, что это пути zt и pq. Значит, вершины z и t смежны, имеют степень 2 в графе $G - W_2$ и каждая из них смежна с W_2. Кроме того, по лемме 6 $\{p, q\}$ не смежно с $\{z, t\}$.

`Пусть` x `и` y `несмежны.`

Так как граф $G(H)$ связен, $d_{G-W_2}(z) \leqslant 2$ и $d_{G-W_2}(t) \leqslant 2$, одна из вершин x и y смежна с z (скажем, y), а другая (x) — с t. У каждой из вершин x и y есть по два соседа в W_1 (два в силу трехсвязности G и в W_1 по пункту 1 леммы 7). Из вершин z, t можно выбрать одну так, чтобы выбранная вершина была смежна хотя бы с одной крайней вершиной в W_2, а невыбранная была смежна хотя бы с одной из трех оставшихся вершин W_2. Пусть выбранная вершина — t, смежную с ней крайнюю вершину назовем u. Тогда пятерка $\{y, z\} \cup (W_2 \setminus \{u\})$ стягиваема (см. Рис. 37).

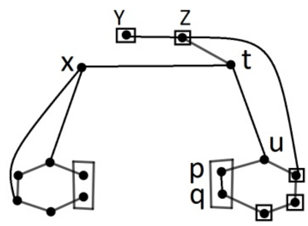


Рис. 37: *стягиваемая пятерка* $\{y, z\} \cup (W_2 - u)$

`Значит,` x `и` y `смежны.`

Можно считать, что y смежна с z. Тогда по пункту 2 леммы 7 x, y не могут быть смежны с t. Кроме того, x не может быть смежна с z, так как $d_{G-W_2}(z) = 2$. Мы доказали, что граф $G(H)$ является простым путем $xyzt$.

Тогда у x есть хотя бы два соседа в W_1, у y — хотя бы один (так как они имеют степень 3 в G и лежат в $H_1^\star$). В начале раздела 3.3.1 сказано, что мы разбираем случай $H_1 = H$. При этом $G(H)$ — это путь $xyzt$, и z смежна только с y и t в $G - W_2$. Но, по определению H_1, граф $G - W_2$ двусвязен. Это возможно только если у t есть сосед в $G - H - W_2$. Напомним, что в начале раздела 3.3.1.1 мы доказали, что этим соседом не является ни p, ни q.

Предположим, что t смежна с крайней вершиной u пути W_2 (см. Рис. 38). Пятерка $\{y, z\} \cup (W_2 \setminus \{u\})$ нестягиваема, хотя z смежна с W_2. Значит, z смежна в W_2 только с u. Но тогда t смежна со второй крайней вершиной w пути W_2 и пятерка $\{y, z\} \cup (W_2 \setminus \{w\})$ стягиваема.

Следовательно, t смежна хотя бы с одной внутренней вершиной v пути W_2 и несмежна с его крайними вершинами. Крайние вершины W_2 смежны с z, поэтому, если взять внутреннюю вершину W_2, отличную от v, и смежную с ней крайнюю вершину W_2, то в объединении с $\{x, y, z\}$ они дадут стягиваемую пятерку (см. Рис. 39).

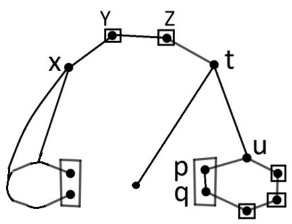


Рис. 38: *t смежна с крайней вершиной W_2*

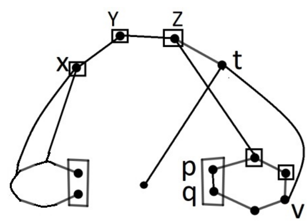


Рис. 39: *t смежна с внутренней вершиной W_2*

3.3.1.2 $|W_2| = 3$.

Подграф $G(W_2 \cup \{z, t\})$ связен, так как вершины z и t смежны и хотя бы одна из них смежна с W_2. Посмотрим, что будет, если удалить этот подграф.

Если x и y несмежны, то каждая из них смежна ровно с одной из вершин z, t и хотя бы двумя вершинами W_1. Если x и y смежны, то они могут быть смежны только с одной из вершин $\{z, t\}$ и должны иметь хотя бы по одному соседу в W_1, причем, в силу трехсвязности G, этих соседей можно выбрать так, чтобы они были различны.

В любом случае пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$ стягиваема.

3.3.1.3 $|W_2| = 2$.

Предположим, что одна из вершин x и y имеет степень 1 в $G(H)$. Пусть x. Тогда x имеет не менее двух соседей в W_1. Так как граф $G(H)$ связен, граф $G(\{y, z, t\})$ тоже связен, и по пункту 1 леммы 7 W_2 смежно с $H_2 = \{z, t\}$. Следовательно, пятерка $\{y, z, t\} \cup W_2$ стягиваема.

Значит, вершины x и y имеют степень не менее 2 в H. По пункту 2 леммы 7 вершина x не может быть смежна одновременно и с z, и с t. Поэтому можно считать, что x смежна с y и z. По пункту 2 леммы 7, вершина y несмежна с t. Следовательно, y смежна с z. Таким образом, граф $G(H)$ — это треугольник xyz и ребро zt.

Пятерки $W_2 \cup \{y, z, t\}$ и $W_2 \cup \{x, z, t\}$ нестягиваемы, поэтому x и y имеют ровно по одному соседу в W_1. В силу трехсвязности G, эти соседи различны.

Итак, $G(H)$ — это треугольник и ведущее из него ребро zt. Если вершина t имеет хотя бы двух соседей в $G - H - W_1$, то по лемме 10 в графе G найдется стягиваемая пятерка. Значит, t имеет не более одного соседа в $G - H - W_1$. Тогда t смежна с W_1 и z смежна с W_2.

Если t имеет хотя бы двух соседей в $G-H-W_2$, то пятерка $\{x, y, z\} \cup W_2$ стягиваема (см. Рис. 40). Значит, t смежна с W_2.

Можно обозначить вершины W_2 так, что z смежна с w_1, а t смежна с w_2, так как с каждой из вершин W_2 смежна хотя бы одна из вершин $\{z, t\}$.

`Пусть` $|W_1| \geqslant 3$.

В третьем абзаце раздела 3.3.1.3 мы доказали, что x и y имеют ровно по одному соседу в W_1, причем эти соседи различны. Предположим, что в W_1 можно выбрать подпуть $u_{i-1}u_iu_{i+1}$, содержащий соседей обеих вершин x, y. Пятерка $\{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, x, y\}$ связна(см. Рис. 41). Каждая вершина W_1 не из тройки $\{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}\}$ смежна с z или с t, так как все соседи

x и y содержатся в тройке. Следовательно, пятерка $\{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, x, y\}$ стягиваема.

Значит, такой подпуть выбрать нельзя. Значит, $|W_1| \geqslant 4$ и расстояние между соседями x и y в W_1 не меньше 3.

Предположим, что в W_1 можно выделить подпуть W такой, что $|W| = 4$ и W содержит соседа ровно одной из вершин x, y, например, x. Тогда пятерка $W \cup \{x\}$ стягиваема.

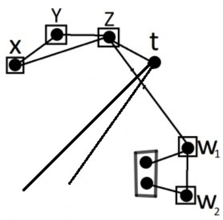


Рис. 40: *стягиваемая пятерка* $\{x, y, z\} \cup W_2$

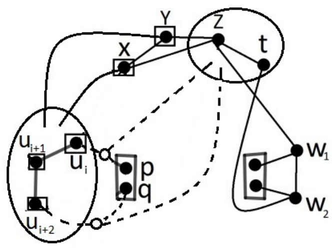


Рис. 41: *стягиваемая пятерка* $\{u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, x, y\}$

Если такой подпуть выделить нельзя, то $|W_1| = 4$, и можно считать, что x смежна с u_1, а y — с u_4. Четверка $\{u_1, u_2, u_3, x\}$ стягиваема (см. Рис. 42). Ее окрестность содержится в множестве $\{u_4, p, y, z, t\}$. Вершина p несмежна с u_4 и не может соседствовать в пути с y, z или t по пункту 1 леммы 9. А оставшиеся четыре вершины образуют путь u_4yzt, поэтому из них не составить два пути так, чтобы ни один не лежал в окрестности второго. Следовательно, четверка $\{u_1, u_2, u_3, x\}$ расширяема.

`Значит,` $|W_1| = 2$.

Выше было доказано, что x и y имеют ровно по одному соседу в W_1, причем эти соседи различны. Не умаляя общности будем считать, что x смежна с u_1, а y с u_2. Также было доказано, что t смежна с W_1. Так как пары $\{x, u_1\}$ и $\{y, u_2\}$ симметричны (обе вершины x, y смежны с z и несмежны с t), можно считать, что t смежна с u_2.

Четверка $W_1 \cup \{x, y\}$ стягиваема и нерасширяема (см. Рис. 43). Окрест-

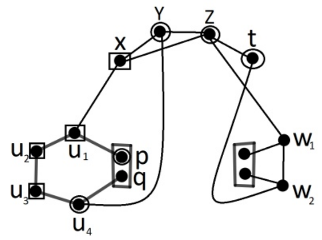


Рис. 42: *стягиваемая четверка* $\{u_1, u_2, u_3, x\}$ *и ее окрестность*

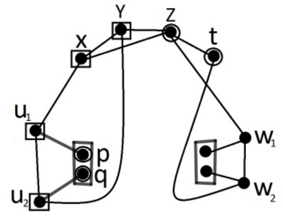


Рис. 43: *стягиваемая четверка* $W_1 \cup \{x, y\}$ *и ее окрестность*

ность этой четверки лежит в множестве $\{p, q, z, t\}$. По лемме 9, $\{p, q\}$ — внутренность одной из частей. Следовательно, внутренность второй части — $\{z, t\}$. Тогда по пункту 2 леммы 6, z смежна в $G - H - W_1$ только с w_1, а вершина t — только с w_2.

Пусть w_1 смежна в $G - H$ с w_2 и r, а w_2 — с w_1 и s. Четверка $\{u_1, x, y, z\}$ стягиваема. Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{u_2, t, p, w_1\}$ (см. Рис. 44). Вершины t и u_2 смежны, поэтому два пути, удовлетворяющие лемме 6 могут существовать только если w_1 смежна с p, а значит, $p = r$ и $d_{G-H-W_1-W_2}(p) = 1$.

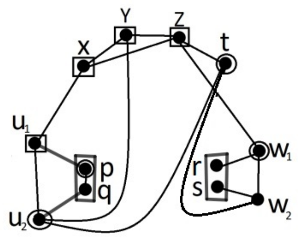


Рис. 44: *стягиваемая четверка* $\{u_1, x, y, z\}$ *и ее окрестность*

Значит, граф $G - H - W_1 - W_2$ недвусвязен. Очевидно, $v(G - H - W_1 - W_2) \geqslant 5$. С другой стороны, вспомним, что $pq \in E(G)$, а, следовательно, по лемме 8 граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен или содержит ровно две вершины. Противоречие.

3.3.2 $|H_2^\star| = 2$.

Пусть $H_1^\star = \{x, y\}$, $H_2^\star = \{z, t\}$.

Если в $H_1^\star$ две компоненты связности, то каждая из них должна быть соединена ровно с одной вершиной из $H_2 = H_2^\star$, поэтому там тоже две компоненты связности, но тогда H несвязен. Следовательно, в H есть ребро xy и, аналогично, zt. Кроме того, будем считать, что y смежна с z. Тогда x по пункту 2 леммы 7 не может быть смежна с t, а z не может быть смежна с x. И, аналогично, t несмежна с x и y. Таким образом, $G(H)$ — это путь $xyzt$.

Тогда x смежна хотя бы с двумя вершинами W_1, y — хотя бы с одной вершиной W_1, z — хотя бы с одной вершиной W_2, t — хотя бы с двумя вершинами W_2.

3.3.2.1 $|W_1| \geqslant 6$.

Если хотя бы одна из вершин $u_6,\ldots, u_k$ смежна с x, то множество $\{u_1, u_2, \ldots, u_5\}$ стягиваемо. Следовательно, $u_6, \ldots u_k$ смежны только с y, и, аналогично, u_1 смежна только с y. Но тогда x смежна хотя бы с одной из вершин $\{u_2, u_3, u_4, u_5\}$, и пятерка $\{u_2, u_3, u_4, u_5, x\}$ стягиваема (см. Рис 45(a)).

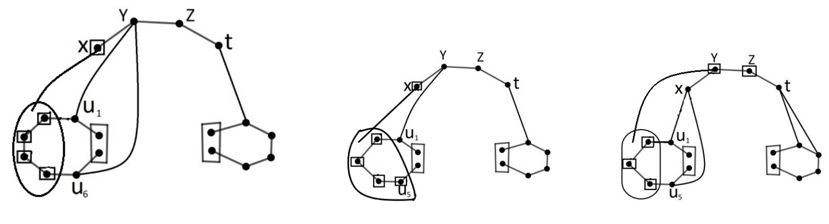
3.3.2.2 $|W_1| = 5$.

Если одна из крайних вершин W_1, например, u_1, смежна с y, то пятерка $W_1 \setminus \{u_1\} \cup \{x\}$ стягиваема (см. Рис. 45(b)).

Иначе, вершины u_1 и u_5 смежны только с x. Тогда стягиваема будет пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$ (см. Рис. 45(c)).

3.3.2.3 $|W_1| = 4$.

Если y смежна с одной из крайних вершин W_1, скажем с u_1, то четверка $\{x, u_2, u_3, u_4\}$ — стягиваемая и расширяемая по лемме 6, так как в ее



(a) (b) (c)

Рис. 45: *стягиваемые пятерки в случае* $|W_1| \geqslant 5$

окрестности лежат всего три вершины (напомним, что $x \in H_1^\star$ несмежна с $G - H - W_1$) (см. Рис. 46(a)).

Если же u_1 и u_4 смежны только с x, то пятерка $\{u_2, u_3, y, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 46(b)).

3.3.2.4 $|W_1| = 3$.

Пятерка $W_1 \cup \{x, y\}$ стягиваема, так как z имеет хотя бы одного соседа в W_2, а t — хотя бы два (см. Рис. 46(c)).

3.3.2.5 $|W_1| = 2$.

Пятерка $W_1 \cup \{x, y, z\}$ стягиваема, так как t имеет хотя бы двух соседей в W_2 (см. Рис. 46(d)).

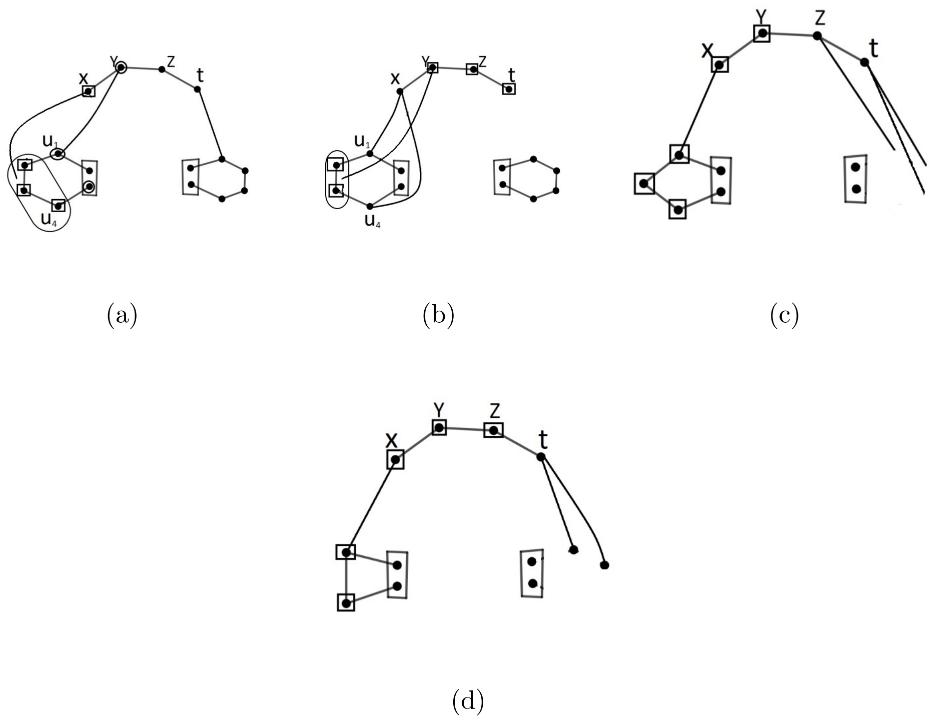


Рис. 46: *стягиваемые пятерки в случае* $|W_1| \leqslant 4$

Глава 4

Стягиваемые четверки, для которых $H_1^\star = H_2^\star = \varnothing$

Далее будем рассматривать случаи, когда $H_1^\star = H_2^\star = \varnothing$, любые подпути в W_1 и W_2 стягиваемы по пункту 4 леммы 7 и $|W_1|, |W_2| \in \{2, 3, 4\}$.

4.1 Доказательство того, что $|W_i| \neq 4$.

Пусть $|W_1| = 4$.

Четверка W_1 стягиваема, поэтому в $G - W_1$ есть два пути, удовлетворяющие условиям леммы 6. Обозначим эти пути за W_1' и W_2'. Также обозначим вершины, смежные W_1 в $G - H$ за p и q, а вершины W_1 за u_1, u_2, u_3, u_4 в порядке следования от p до q.

По лемме 9 ребро pq является одним из путей. Можно считать, что $pq = G(W_2')$ и $xy \in G(W_1')$.

4.1.1 $|W_2| = 4$.

Четверка W_2 также стягиваема, для нее существуют пути W_1'' и W_2'', удовлетворяющие условиям леммы 6, и, аналогично рассуждениям выше, можно считать, что $W_1'' \subset H$.

Посмотрим, могут ли пути W_1' и W_1'' пересекаться. Пусть $x \in W_1' \cap W_1''$. Тогда x смежна и с W_1, и с W_2, но при этом степень x в $G - W_1$ и в $G - W_2$ равна 2. Следовательно, x должна иметь степень 1 в $G(H)$. То есть x смежна в H только с вершиной y. Значит, $y \in W_1' \cup W_1''$, и ее степень в $G(H)$ тоже равна 1. Противоречие со связностью $G(H)$.

Следовательно, эти пути не пересекаются и можно считать, что $G(W_1') = xy$, $G(W_1'') = zt$. Также будем считать, что y смежна с z.

Предположим, что x и t смежны. Тогда по теореме 4 одна из вершин цикла $xyzt$ должна иметь степень 3 в G. Пусть это будет x. Не умаляя общности можно считать, что u_4 несмежна с x. Тогда u_4 смежна с y, ведь z и t имеют степень 2 в $G - W_2$. Получаем, что пятерка $\{u_1, u_2, u_3, x, t\}$ стягиваемая, ведь z смежна с W_2, а u_4 смежна с y (см. Рис. 47).

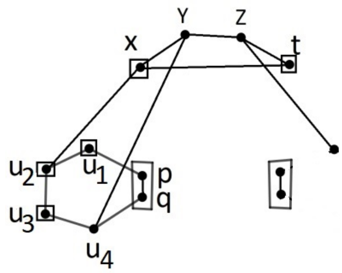


Рис. 47: *стягиваемая пятерка* $\{u_1, u_2, u_3, x, t\}$

Значит, x и t несмежны и у них есть ровно по одному соседу в $G - H - W_1$ и $G - H - W_2$, соответственно. Ровно по одному, так как они входят в пути для четверок W_1 и W_2.

Итак, у вершины x есть ровно один сосед в $G - H - W_1$. Напомним, что xy и pq — пути для четверки W_1. По пункту 3 леммы 6 для четверки W_1 множества $\{x, y\}$ и $\{p, q\}$ несмежны.

Если x смежна с внутренней вершиной W_1, к примеру, u_2, то или пятерка $\{u_3, u_4, y, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 48), или с вершинами u_3, u_4 смежна только x и тогда y смежна с $\{u_1, u_2\}$, а значит, пятерка $\{u_1, u_2, y, z, t\}$

стягиваема.

Следовательно, x может быть смежна только с крайними вершинами W_1. Пусть x смежна с u_1. Граф $G(\{u_2, u_3, u_4, y, z\})$ связен, так как с множеством $\{u_2, u_3\}$ могут быть смежны только y и t, но t смежна не более чем с одной вершиной из этого множества. Но пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$ нестягиваема. Это возможно только в том случае, когда $N_G(t) \cap V(G - H - W_2) \subset \{u_2, u_3, u_4\}$ и t имеет ровно одного соседа в W_2 (см. Рис. 49). Напомним, что xy — путь для четверки W_1. По пункту 2 леммы 6 для четверки W_1, вершины x и y имеют степень 2 в графе $G - W_1$. То есть x имеет только одного соседа в $G - H - W_1$, а y вообще не имеет соседей. По пункту 1 леммы 4 для четверки H, все вершины W_2 смежны с H. Было доказано, что y не имеет соседей в W_2, а каждая из вершин x и t имеет там не более одного соседа. Следовательно, z смежна хотя бы с двумя вершинами W_2. Но тогда пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, t\}$ стягиваема.

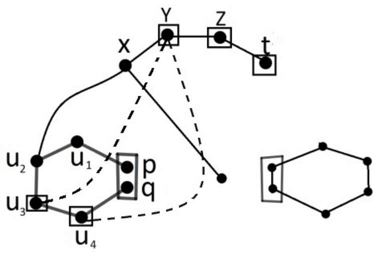


Рис. 48: *стягиваемая пятерка* $\{u_3, u_4, y, z, t\}$

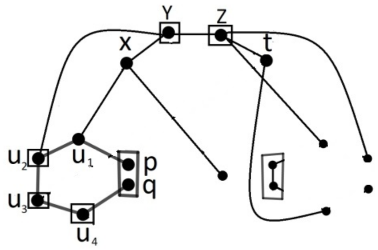


Рис. 49: *нестягиваемая пятерка* $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$ *и стягиваемая* $\{u_2, u_3, u_4, y, t\}$

4.1.2 $|W_2| = 3$.

Напомним, что четверка W_1 стягиваема, одним путем для нее является ребро pq, а второй путь содержит ребро xy. Не умаляя общности будем считать, что y и z смежны. Тогда $N_G(y) \subset \{z, x\} \cup W_1$, а x имеет ровно одного соседа в $G - W_1 - \{y\}$ и несмежна с z. Возможны два случая.

4.1.2.1 Граф $G(W_2 \cup \{z, t\})$ несвязен.

Либо z, либо t смежна с W_2, так как не более чем одна вершина W_2 смежна с $\{x, y\}$. Значит, z и t несмежны. Так как граф H связен, вершина t смежна с $\{x, y\}$. Но t не может быть смежна с y, а значит, t смежна с x. После этих рассуждений вершины z и t стали взаимозаменяемы. Мы рассматриваем случай, когда граф $G(W_2 \cup \{z, t\})$ несвязен, поэтому, не умаляя общности, можно предположить, что t смежна с W_2, а z — нет. Тогда пятерка $W_2 \cup \{x, t\}$ стягиваема, так как вершина y имеет хотя бы одного соседа в W_1, а z смежна с хотя бы двумя вершинами $G - H - W_2$ (так как $d_G(z) \geqslant 3$, и мы доказали, что z несмежна с x, t и W_2) (см. Рис. 50).

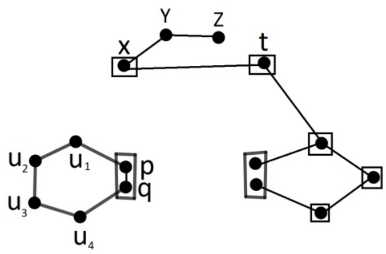


Рис. 50: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{x, t\}$

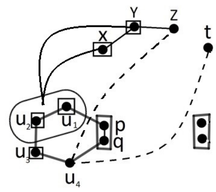


Рис. 51: *стягиваемая пятерка* $\{u_1, u_2, u_3, x, y\}$

4.1.2.2 Граф $G(W_2 \cup \{z, t\})$ связен.

Но пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$ нестягиваема. Тогда x и y имеют ровно по одному соседу в $G - H - W_2$, причем эти соседи совпадают и лежат в W_1.

Можно считать, что этот сосед лежит в множестве $\{u_1, u_2\}$.

Вспомним, что xy — ребро из пути $G(W_1')$, удовлетворяющего лемме 6 для графа $G - W_1$.

Если $G(W_1') = xy$, то множество $W_1 \cup \{x, y\}$ стягиваемо. Но u_4 смежна с q и одной из вершин z, t. Значит, пятерка $\{u_1, u_2, u_3, x, y\}$ стягиваема (см. Рис. 51).

Значит, еще одна вершина H лежит в W_1'. Отметим, что $H \neq W_1'$, так как иначе в W_2 могут идти не более двух ребер из H, но $|W_2| = 3$ и в каждую вершину W_2 должно идти ребро из H. Пусть $G(W_1') = xyz$. Теперь можно повторить все рассуждения выше для вершин y и z (ведь $yz \in G(W_1')$) и получить, что единственный сосед z в W_1 совпадает с соседом y. Откуда следует, что t смежна с u_3. Кроме того, t смежна с W_2, поэтому пятерка $\{u_1, u_2, x, y, z\}$ стягиваема.

4.1.3 $|W_2| = 2$.

Опять будем считать, что y и z смежны, а ребро xy принадлежит пути $G(W_1')$ для четверки W_1. Напомним, что из этого следует, что x и y имеют степень 2 в $G - W_1$.

Рассмотрим два случая.

4.1.3.1 $G(W_2 \cup \{z, t\})$ несвязен.

Аналогично сказанному в начале раздела 4.1.2.1, можно считать, что вершины z и t несмежны, t смежна с x, t смежна с W_2, а z несмежна с W_2. Так как $d_{G-W_1}(x) = 2$, вершины x и z несмежны. Тогда пятерка $W_2 \cup \{x, y, t\}$ стягиваема (см. Рис. 52), так как z смежна с одной вершиной H и несмежна с W_2, следовательно, смежна хотя бы с двумя вершинами из $G - H - W_2$.

4.1.3.2 $G(W_2 \cup \{z, t\})$ связен.

Тогда связен также граф $G(W_2 \cup \{y, z, t\})$. Если пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$ нестягиваема, то x имеет ровно одного соседа в $G - H - W_2$. Следовательно, x смежна с t или с W_2. В любом случае пятерка $W_2 \cup \{x, z, t\}$ связна. Она

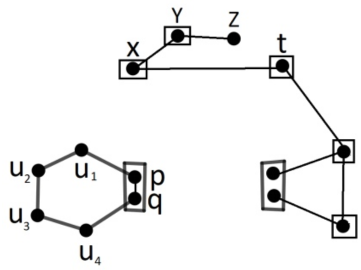


Рис. 52: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{x, y, t\}$

нестягиваема только в том случае, когда y имеет в W_1 ровно одного соседа.

Итак, далее x и y имеют по одному соседу в W_1. Напомним, что ребро xy лежит в пути W_1' для четверки W_1. Далее мы разберем несколько случаев, каким может быть путь $G(W_1')$. Если $W_1' \neq \{x, y\}$, то путь должен продолжаться или соседом y, и/или соседом x в $G - W_1$. При этом x имеет ровно двух соседей в $G - W_1$ — это y и ещё один сосед из множества $\{t\} \cup W_2$ (это было доказано в предыдущем абзаце). Но вершины W_2 не могут лежать в пути для четверки W_1, так как по лемме 4 вершина из внутренности крайней части должна быть смежна с четверкой. А по лемме 6, множества W_1 и W_2 несмежны. Вершина y также имеет в $G - W_1$ ровно двух соседей — вершины x и z (наличие именно этих ребер мы предположили в начале раздела 4.1.3). Следовательно, если путь $G(W_1')$ продолжается соседом x, то только вершиной t. А если соседом y, то только вершиной z. Оба этих случая симметричны. Действительно, единственное условие, которое различало вершины x и y, а также z и t, было условие существование ребра yz. Но если x смежна с t, то пары $\{x, t\}$ и $\{y, z\}$ равнозначны, поэтому не умаляя общности можно считать, что если путь продолжается, то вершиной z. При этом мы не исключаем варианта, что ребро xt также входит в путь.

Случай 1. $G(W_1') = xy$.

Тогда граф $G - W_1 - \{x, y\}$ двусвязен. Если множество $\{x, y\}$ несмежно хотя бы с одной крайней вершиной W_1 (пусть с u_4), то пятерка $\{u_1, u_2, u_3, x, y\}$ стягиваема.

Значит, множество $\{x, y\}$ смежно с u_1 и u_4. Так как x и y имеют по одному соседу в W_1, можно считать, что x смежна с u_1, а y — с u_4. Множество $\{u_2, u_3\}$ смежно с $\{z, t\}$.

Предположим, что x смежна с t. Тогда x и y несмежны с W_2. Хотя бы одна из вершин z, t смежна с W_2. Пусть эта вершина — t. Тогда пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$ стягиваема (см. Рис. 53).

Значит, x несмежна с t. В начале раздела 4.1.3.2 мы доказали, что x смежна с t или W_2. Следовательно, x смежна с одной вершиной из W_2, а t смежна с z (иначе $G(H)$ будет несвязным). Но тогда вершина W_2, несмежная с x, в объединении с $\{z, t, u_2, u_3\}$ даст стягиваемую пятерку (см. Рис. 54). Действительно, мы уже доказали, что $\{z, t\}$ смежно с $\{u_2, u_3\}$, значит, пятерка связна. А по лемме 8 граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен или содержит две вершины, поэтому после добавления цикла pu_1xyu_4q останется (или, в случае двух вершин, станет) двусвязным.

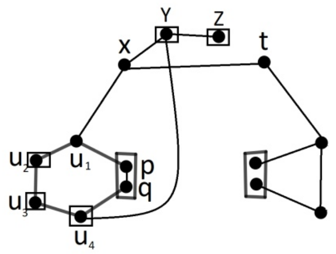


Рис. 53: *стягиваемая пятерка* $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$

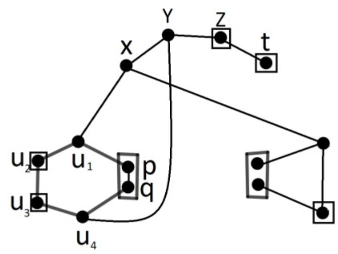


Рис. 54: *стягиваемая пятерка, если x смежна с W_2*

Случай 2. $G(W_1')$ *содержит путь* xyz.

В начале раздела 4.1.3.2 было доказано, что $G(W_2 \cup \{x, z, t\})$ связен. Так как z лежит в пути W_1', она имеет степень 2 в $G - W_1$. Следовательно, может быть смежна только с одной вершиной множества $\{x, t\} \cup W_2$, и является висячей вершиной графа $G(W_2 \cup \{x, z, t\})$. Значит, граф $G(W_2 \cup \{x, t\})$ связен. Теперь вершины x и z симметричны в наложенных на них предположениях (ребра xy и yz входят в путь W_1', обе вершины образуют связный граф вместе с вершинами $\{t\} \cup W_2$). Про x в начале раздела 4.1.3.2 мы доказали, что она смежна ровно с одной вершиной W_1, следовательно, про z это тоже верно.

Одна из вершин x и z смежна с t. Не умаляя общности, пусть z. В начале раздела 4.1.3.2 доказано, что x смежна с t или W_2. Поэтому x смежна с W_2 (она не может быть смежна с t, так как тогда t — точка сочленения графа $G - W_1$, а этот граф двусвязен).

Так как y и z имеют степень 2 в $G - W_1$, со второй вершиной W_2 смежна t (пусть не умаляя общности, x смежна с w_1, а t — с w_2).

Если x смежна с внутренней вершиной W_1, например, с u_2, то пятерка $\{u_3, u_4, y, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 55). Напомним, что x имеет ровно одного соседа в W_1, поэтому $\{u_3, u_4\}$ смежно с $\{y, z, t\}$.

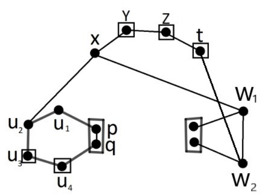


Рис. 55: *стягиваемая пятерка* $\{u_3, u_4, y, z, t\}$

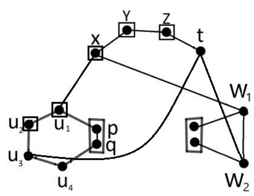


Рис. 56: *стягиваемая пятерка* $\{u_1, u_2, x, y, z\}$

Значит, x смежна с крайней вершиной W_1, например, с u_1.

Если t смежна с u_3, то пятерка $\{u_1, u_2, x, y, z\}$ стягиваема (см. Рис. 56). Если t несмежна с u_3 и смежна с u_2, то пятерка $\{u_3, u_4, x, y, z\}$ стягиваема, так как с u_3 смежна одна из вершин $\{y, z\}$ (см. Рис. 57).

Следовательно, t не смежна ни с u_2, ни с u_3. В начале раздела 4.1.3.2 было доказано, что каждая из вершин x и y имеет ровно одного соседа в W_1, а в начале разбора случая 2 мы сказали, что аналогичное верно и про z. Значит, $\{y, z\}$ связано двумя независимыми ребрами с $\{u_2, u_3\}$, а t смежна с u_4.

Если y смежна с u_3, то z смежна с u_2 и пятерка $\{u_2, z, t\} \cup W_2$ стягиваема (см. Рис. 58), так как в двусвязном графе $G - H - W_2$ мы заменили путь $u_1u_2u_3$ на путь u_1xyu_3.

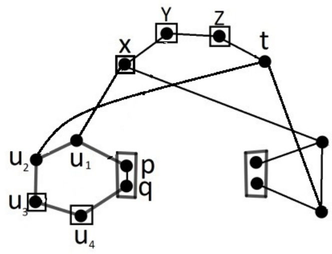


Рис. 57: *стягиваемая пятерка* $\{u_3, u_4, x, y, z\}$

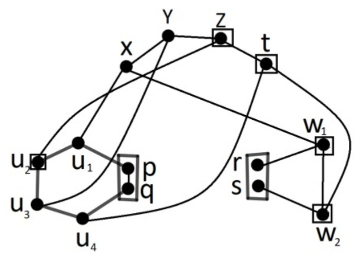


Рис. 58: *стягиваемая пятерка* $\{u_2, z, t\} \cup W_2$

Значит, y смежна с u_2, а z — с u_3.

Пусть $G(W_2) = w_1w_2$, и $\{x, w_2, r\} \subset N_G(w_1)$, а $\{t, w_1, s\} \subset N_G(w_2)$. Про существование рёбер xw_1 и tw_2 было сказано в третьем абзаце случая 2.

Если $N_G(t) \neq \{z, u_4, w_2\}$, то пятерка $\{u_2, u_3, u_4, y, z\}$ стягиваема. Действительно, раз t несмежна с u_3, остались неудаленными хотя бы две вершины из окрестности t. Поэтому, далее считаем, что $N_G(t) = \{z, u_4, w_2\}$.

Напомним, что вершины p и q смежны. Поэтому по лемме 8 граф $G - W_1 - W_2$ двусвязен или состоит ровно из двух вершин.

Пятерка $\{u_3, u_4, z, t, w_2\}$ нестягиваема только если $p = r$ (см. Рис. 59).

Пятерка $\{u_1, u_2, x, y, w_1\}$ нестягиваема только если $q = s$ (см. Рис. 60).

Пусть $p = r$, $q = s$.

Предположим, что в графе $G - H$ есть вершины, отличные от $V(W_1) \cup V(W_2) \cup \{p, q\}$. Тогда в $G - H$ есть еще одна крайняя часть, но ее вершины не могут быть смежны с H, так как мы доказали, что из вершин H не идут ребра, отличные от тех, которые уже проведены на рисунке 60. То есть граф G не трехсвязен. Противоречие.

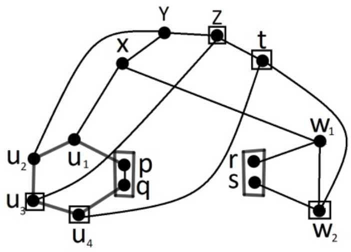


Рис. 59: *пятерка* $\{u_3, u_4, z, t, w_2\}$

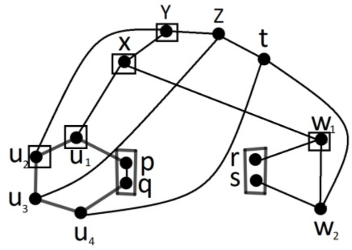


Рис. 60: *пятерка* $\{u_1, u_2, x, y, w_1\}$

Значит, других вершин в графе $G - H$ нет. Перерисуем граф G (см. Рис. 61). Легко проверить, что в нем нет стягиваемой пятерки. Заметим, что в этом графе-исключении 12 вершин.

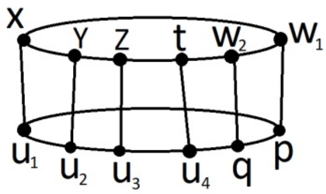


Рис. 61: *граф* G

4.2 Первая подозрительная четверка.

Итак, мы доказали, что если в трехсвязном графе G нет стягиваемой пятерки, то для любой стягиваемой четверки H, которая не является первой подозрительной четверкой, любая крайняя часть графа $G - H$ является циклом и размер её внутренности не превосходит 3.

Напомним, что первая подозрительная четверка обладает следующими свойствами: внутренность одной из крайних частей $G - H$ имеет размер 3 и со всеми внутренними вершинами этой крайней части смежна только одна из вершин H, причем эта вершина смежна хотя бы с двумя вершинами H. А три другие вершины H смежны только с внутренними вершинами другой крайней части. Следующая лемма доказывает, что в случае первой подозрительной четверки в графе G есть стягиваемая пятерка.

Лемма 11. *В обозначениях леммы* 6 *пусть* $\{p, q\} = \mathrm{Bound}(A_i)$ *для некоторого* $i \in \{1, 2\}$ *и* $\mathrm{Int}(A_i) = \{u_1, u_2, u_3\}$, *где* u_1 *смежна с* p, *а* u_3 *— с* q. *Предположим, что ровно одна вершина* $x \in H$ *смежна с внутренними вершинами* A_i. *Тогда*

1) множество $H' = \{p, u_1, u_2\}$ *стягиваемо;*

2) если x *смежна хотя бы с двумя вершинами* H, *то множество* H' *расширяемо некоторой вершиной* v, *причем* $v \neq x$, $v \neq q$.

3) если в дополнение к пункту 2 $d_{G-H'}(x) \geqslant 4$ *или оба соседа* x *в графе* $G(H)$ *несмежны с* p, *то в* G *есть стягиваемая пятерка.*

Доказательство. 1) Граф $G - p$ двусвязен. Докажем, что граф $G - H'$ также двусвязен, что равносильно тому, что тройка H' стягиваема. Предположим, что в графе $G - H'$ есть точка сочленения v. При этом в графе $G - p$ точки сочленения не было. Рассмотрим вершины α и β из разных компонент связности графа $G - H' - v$. Очевидно, что $\{\alpha, \beta\} \neq \{x, u_3\}$, так как $xu_3 \in E(G)$. По теореме Менгера в графе $G-p$ между α и β существовало два пути, не пересекающихся по внутренним вершинам. После удаления вершин u_1 и u_2 хотя бы один из путей перестал существовать (если бы остались оба, то α и β нельзя было бы разделить одной вершиной). Следовательно, путь, переставший существовать, проходил через вершину u_1 или u_2. Но заметим, что множество $\{x, u_3\}$ отделяет $\{u_1, u_2\}$ от остальных вершин графа $G-p$, поэтому любой простой путь, проходящий через u_1 или u_2 с концами в $G - H'$, должен посещать и вершину x, и вершину u_3. А тогда проход через u_1 и/или u_2 можно заменить проходом по ребру xu_3. Таким образом, в графе $G - H'$ между любыми двумя несмежными вершинами существуют два непересекающихся по внутренним вершинам пути. Значит, $G - H'$ двусвязен, и тройка H' стягиваема.

2) Пусть x смежна с y и z, но H' нерасширяемо. Так как $d_{G-H'}(x) \geqslant 3$,

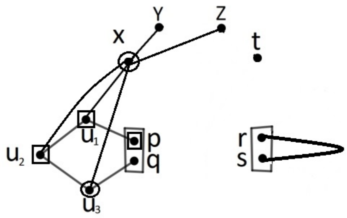


Рис. 62: *Стягиваемая тройка* $\{u_1, u_2, p\}$

граф $G - H'$ не является простым циклом. По лемме 6 в окрестности H' есть пути W_1' и W_2'. $N_G(H') = \{x, u_3\} \cup N_G(p) \setminus \{u_1\}$. Вершина x точно не входит в эти пути, так как у нее степень больше 2 в $G - H'$, поэтому, не умаляя общности можно считать, что $W_1' \cap \{x, u_3\} = \varnothing$. По лемме 6 множество $W_1' \cup H'$ стягиваемо.

Если $|W_1'| = 2$, то стягиваема пятерка $W_1' \cup \{p, u_2, u_1\}$.

Если $|W_1'| = 3$, то стягиваема пятерка $W_1' \cup \{p, u_1\}$.

Если $|W_1'| = 4$, то стягиваема пятерка $W_1' \cup \{p\}$.

Пусть $|W_1'| \geqslant 5$ и $W_1' = u_1' \dots u_k' P$, где P — подпуть $G(W_1')$, содержащий 4 вершины. Граф $G - H' - W_1'$ двусвязен по лемме 6, а тогда двусвязен граф $G - P$, так как он получается добавлением к двусвязному графу $G - H' - W_1'$ пути $u_3 u_2 u_1 x$, а затем пути $u_1 p u_k' u_{k-1}' \dots u_1' p'$, где p' — вершина из $G - H' - W_1'$, смежная с u_1' (она точно существует и не совпадает с u_1). Итак, подпуть P — стягиваемый. Либо он расширяемый, либо в его окрестности должны содержаться два пути, удовлетворяющие лемме 6. Но в окрестности этого пути содержатся только три вершины: p и две вершины из окрестности P в графе $G - H'$. Следовательно, $V(P)$ — расширяемая четверка и в графе G есть стягиваемая пятерка.

Значит, тройка H' расширяема некоторой вершиной v. Четверка $H'' = H' \cup \{v\}$ стягиваема. Заметим, что $v \neq x$ и $v \neq q$, так как тогда в графе $G - H''$ оставалась бы вершина u_3 степени 1.

3) По лемме 6 в окрестности H'' есть пути W_1'' и W_2''. Предположим, что

вершина x входит в один из этих путей. Тогда $d_{G-H''}(x) = 2$, а $d_{G-H'}(x) = 3$. Следовательно, $\mathrm{N}_{G-H'}(x) = \{u_3, y, z\}$ и $v \in \{u_3, y, z\}$. По условию леммы, y, z несмежны с p. Если $v \in \{y, z\}$, то чтобы четверка H'' была связной, надо, чтобы H' было смежно с $\{y, z\}$, а это в нашем случае не так. А если $v = u_3$, то x может входить в путь только с y или z, что опять же невозможно, так как y и z не лежат в окрестности H''.

Значит, x не лежит в путях для H''.

Случай 1. $v \neq u_3$

Тогда $v \in N_G(p)$. Не умаляя общности можно считать, что $u_3 \notin W_1''$, тогда $W_1'' \subset \mathrm{N}_G(p)$.

Если $|W_1''| = 2$, то стягиваема пятерка $W_1'' \cup \{p, v, u_1\}$.

Если $|W_1''| = 3$, то стягиваема пятерка $W_1'' \cup \{p, v\}$.

Случай $|W_1''| \geqslant 4$ возможен только если $H'' = \{u_2, u_1, p, v\}$ — первая подозрительная четверка. Заметим, что в H'' только вершина p может одновременно иметь степень не менее 2 в $G(H'')$ и быть смежна с тремя вершинами $G - H''$. Из свойств первой подозрительной четверки (которые мы напоминали перед формулировкой леммы) следует, что $|W_2''| = 3$, W_2'' несмежно с $\{u_2, u_1, v\}$ и $u_3 \notin W_2''$, так как u_3 несмежна с p. По лемме 6 граф $G - H'' - W_2''$ двусвязен, а тогда двусвязен граф $G - \{p, v\} - W_2''$, так как получается добавлением пути $u_3u_2u_1x$ к двусвязному графу $G - H'' - W_2''$. Следовательно, пятерка $\{p, v\} \cup W_2''$ стягиваема.

Случай 2. $v = u_3$

Напомним, что x не лежит в путях для H''. Не умаляя общности можно считать, что $q \notin W_1''$, тогда $W_1'' \subset \mathrm{N}_G(p)$.

Если $|W_1''| = 2$, то стягиваема пятерка $W_1'' \cup \{p, u_2, u_1\}$.

Если $|W_1''| = 3$, то стягиваема пятерка $W_1'' \cup \{p, u_1\}$.

Случай $|W_1''| \geqslant 4$ возможен только если H'' — первая подозрительная четверка, но в $G(H'')$ нет вершины степени 2, которая могла бы быть смежна с тремя вершинами пути W_2''. Действительно, в $G(H'')$ степень 2 имеют только вершины u_1 и u_2, но в множестве $v(G - H'')$ они смежны только с вершиной x. Следовательно, в G есть стягиваемая пятерка.

□

4.3 $|W_1| = 3$, $|W_2| \leqslant 3$

Итак, мы доказали, что если в G нет стягиваемой пятерки, то для любой стягиваемой четверки H граф $G - H$ не является простым циклом, $H = H_1 = H_2$, все крайние части $G - H$ — циклы, и размер внутренности любой крайней части не превосходит 3.

Пусть $G(W_1) = u_1u_2u_3$, $G(W_2) = w_1w_2w_3$ или $G(W_2) = w_1w_2$. И пусть u_1 смежна с p в $V(G - H - W_1)$, а u_3 — с q.

4.3.1 Доказательство того, что в H есть два независимых ребра

Пусть это не так, тогда можно обозначить вершины H так, что вершина x смежна с вершинами y, z, t и никаких других ребер в H нет. Так как $H = H_1 = H_2$, каждая из вершин y, z, t смежна хотя бы с одной вершиной в $G - H - W_1$ и в $G - H - W_2$.

Докажем, что хотя бы две вершины множества $\{y, z, t\}$ имеют не более одного соседа в $G - H - W_1$. Предположим, что это не так. Не умаляя общности будем считать, что множество $\{x, y\}$ смежно с W_1. Пятерка $W_1 \cup \{x, y\}$ нестягиваема только тогда, когда одна из вершин z, t имеет не более одного соседа в $G - H - W_1$ (см. Рис. 63), пусть это будет z. Значит, z смежна с W_1. Но тогда пятерка $W_1 \cup \{x, z\}$ нестягиваема, так как по нашему предположению вершины y, t имеет не менее двух соседей в $G - H - W_1$.

Таким образом, хотя бы две вершины множества $\{y, z, t\}$ имеют не более одного соседа в $G - H - W_1$. Пусть не умаляя общности, это будут y

и z. Тогда y и z смежны с W_1.

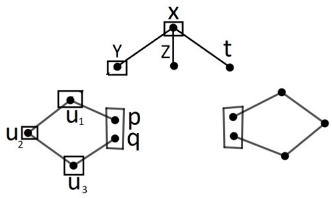


Рис. 63: *пятерка* $W_1 \cup \{x, y\}$

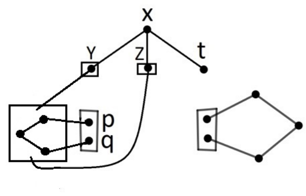


Рис. 64: *пятерка* $W_1 \cup \{y, z\}$

Пятерка $W_1 \cup \{y, z\}$ нестягиваема (см. Рис. 64). Тогда либо x несмежна с $G - H - W_1$, либо x и t обе смежны только с одной вершиной $f \in V(G - H - W_1)$. Но второго случая быть не может, так как тогда среди вершин x, t, f, образующих треугольник, только одна вершина t может иметь степень 3 в G, что противоречит теореме 4. Действительно, вершины x и f будут иметь степень хотя бы 4. Вершина x — так как смежна с y, z, t и f, вершина f — так как смежна с x, t и хотя бы двумя вершинами в двусвязном графе $G - H$. Следовательно, x несмежна с $G - H - W_1$.

4.3.1.1 $|W_2| = 3$.

Применим рассуждения выше к W_2. Тогда вершина x смежна только с вершинами H. Также в H найдутся хотя бы две вершины, имеющие не более одного соседа в $G - H - W_2$. Следовательно, есть вершина — скажем, z — имеющая не более одного соседа как в $G - H - W_1$, так и в $G - H - W_2$. Значит, z имеет ровно одного соседа в W_1, ровно одного соседа в W_2 и несмежна с $G - H - W_1 - W_2$.

Четверка $W_1 \cup \{z\}$ нестягиваема, только если y и t имеют в $G - H - W_1$ только общего соседа, но тогда у z хотя бы 2 соседа в W_2, что противоречит выбору z. Следовательно четверка $W_1 \cup \{z\}$ стягиваема. Ее окрестность лежит в множестве $\{p, q, x, y, t, w_i\}$, где w_i — сосед z в W_2 (см. Рис. 65).

Если вершина w_i смежна с $\{x, y, t\}$, то у нее степень хотя бы 3 в $G -$

$W_1 - z$. Значит, она может входить в один путь только с вершинами p и q. Но тогда она должна быть крайней вершиной W_2. Если это так (например, $i = 1$), то пятерка $\{x, y, t, w_2, w_3\}$ стягиваема.

Значит, w_i не входит ни в один путь. Теперь из пункта 2 леммы 9 легко следует, что в G есть ребро pq и это ребро является путем для четверки $W_1 \cup \{z\}$. Тогда шестерка $\{z, u_1, u_2, u_3, p, q\}$ стягиваема по лемме 6 (см. Рис. 66). А тогда стягиваема пятерка $W_1 \cup \{p, q\}$, так как z смежна с x и w_i.

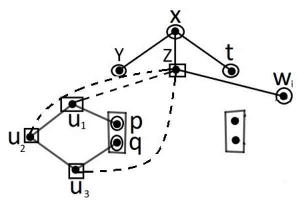


Рис. 65: *четверка* $W_1 \cup \{z\}$ *и ее окрестность*

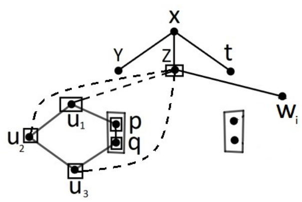


Рис. 66: *стягиваемая шестерка* $\{z, u_1, u_2, u_3, p, q\}$

4.3.1.2 $|W_2| = 2$.

Не умаляя общности, множество $\{x, y, t\}$ смежно с W_2. Пятерка $W_2 \cup \{x, y, t\}$ нестягиваема. Следовательно, z имеет не более одного соседа в $G - H - W_2$ и z смежна с W_2. Рассматривая пятерки $W_2 \cup \{x, y, z\}$ и $W_2 \cup \{x, z, t\}$, получаем, что y, t смежны с W_2 и имеют ровно по одному соседу в $G - H - W_2$ (напомним, что хотя бы по одному соседу в $G - H - W_2$ у них есть, так как они принадлежат множеству H_1). Если одна из вершин y, z, t смежна с крайней вершиной W_1, скажем, y смежна с u_1, то пятерка $\{u_2, u_3, x, z, t\}$ стягиваема. Иначе, с двумя крайними вершинами W_1 смежна x, и стягиваема пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$.

Далее считаем, что в H есть два независимых ребра. Пусть это ребра xy и zt, и пусть множество $\{x, y\}$ смежно с W_1.

Пятерка $W_1 \cup \{x, y\}$ нестягиваема, только если одна из вершин z, t несмежна с $G-H-W_1$ или если z и t имеют в $G-H-W_1$ одного общего соседа f и несмежны с остальными вершинами $G-H-W_1$.

4.3.2 Вершины z, t имеют общего соседа $f \in V(G-H-W_1)$.

Вершины z, t, f образуют треугольник, поэтому по теореме 4 среди этих вершин должно быть две вершины степени 3. Это могут быть только z и t, так как f смежна с z, t и хотя бы двумя вершинами в двусвязном графе $G-H$. *Третьи* ребра из z и t не могут идти в одну и ту же вершину, так как тогда граф G не будет трехвязен. Следовательно, это два независимых ребра. Одно из третьих ребер обязательно идет в вершину H, а второе — или в вершину H, или в вершину W_1.

4.3.2.1 Оба третьих ребра из z и t идут в H.

Тогда можно считать, что это ребра yz и xt, и вершина x смежна с W_1 (см. Рис. 67). Пятерка $W_1 \cup \{x, t\}$ нестягиваема только если y не смежна ни с одной вершиной $G-H-W_1$ или y смежна там только с f. Однако, если y смежна с f, то y по теореме 4 имеет степень 3 в G, а тогда множество $\{x, f\}$ отделяет $\{y, z, t\}$ от остальных вершин графа G), что противоречит трехсвязности G.

Значит y несмежна с $G-H-W_1$, но тогда y должна быть смежна с W_1. Аналогично доказанному выше получаем, что x несмежна с $G-H-W_1$. Таким образом, с вершиной W_2, отличной от f, не смежна ни одна из вершин H, что невозможно.

4.3.2.2 Третье ребро из z или t идет в W_1.

Тогда можно считать, что третьи ребра — zu_i и yt.

Пятерка $W_1 \cup \{z, t\}$ нестягиваема только если одна из вершин x, y

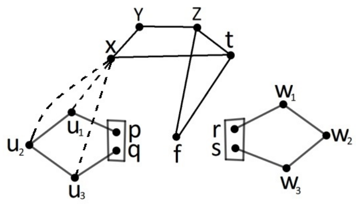


Рис. 67: *оба третьих ребра идут в H*

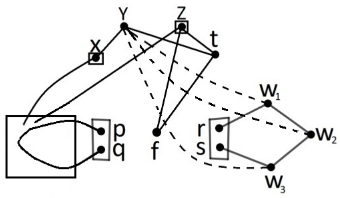


Рис. 68: *стягиваемая пятерка* $W_1 \cup \{x, z\}$

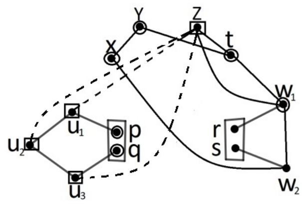


Рис. 69: *четверка* $W_1 \cup \{z\}$ *и ее окрестность*

несмежна с $G - H - W_1$ или если обе эти вершины смежны ровно с одной вершиной из $G - H - W_1$, причем одной и той же.

Второго случая быть не может. Действительно, если x и y образуют треугольник с какой-то вершиной из $G - H - W_1$, то по теореме 4 они имеют степень 3 в G. Но тогда вершины H могут быть смежны не более чем с четырьмя вершинами $W_1 \cup W_2$. Действительно, все соседи H в множестве $G - H$ исчерпываются набором u_i, f, общий сосед y и x, возможно ещё один сосед x. Других соседей быть не может, так как все вершины H имеют степень 3 в G, и имеются ребра xy, yt, tz, ребра от x и y к их общему соседу, ребра от z и t к их общему соседу f. Однако, вершин $W_1 \cup W_2$ не менее пяти, противоречие.

Значит, одна из вершин x, y несмежна с $G - H - W_1$.

Предположим, что x несмежна с $G - H - W_1$. Тогда x смежна с W_1, а y смежна со всеми вершинами W_2, кроме, быть может, f. Пятерка $W_1 \cup \{x, z\}$ стягиваема (см. Рис. 68).

Следовательно, y несмежна с $G - H - W_1$, а x смежна со всеми вершинами W_2, кроме, быть может, f.

Если $f \notin W_2$, то множества $W_2 \cup \{x, y\}$ и $W_2 \cup \{x, y, t\}$ стягиваемы и одно из них имеет размер 5. Значит, можно считать, что $f \in W_2$, $f = w_1$.

Тогда стягиваема четверка $W_1 \cup \{z\}$ (см. Рис. 69). Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{p, q, w_1, x, y, t\}$. Вершина w_1 не может входить в путь, удовлетворяющий лемме 6, так как имеет степень хотя бы 3 в $G - W_1 - z$. Из пункта 2 леммы 9 получаем, что одним из путей должно быть ребро pq. А тогда по лемме 7 стягиваема шестерка $W_1 \cup \{p, q, z\}$, и, следовательно, стягиваема пятерка $W_1 \cup \{p, q\}$ (так как z смежна с t и w_1).

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 3. *Если из двух независимых ребер H одно смежно с путем W_i из трёх вершин, то одна из вершин второго ребра несмежна с $G - H - W_i$.*

4.3.3 Одна из вершин z, t несмежна с $G - H - W_1$.

Пусть это будет z.

4.3.3.1 $N_G(z) \subset H$.

То есть z смежна с x, y, t и больше ни с чем. Рассмотрим два случая:

Случай 1. *Вершина t смежна с W_2.*

Подслучай 1.1. *Вершина t смежна с W_1.*

По утверждению 3, пятерка $W_1 \cup \{z, t\}$ нестягиваема только в том случае, когда одна из вершин x, y несмежна с $G - H - W_1$. Пусть x несмежна с $G - H - W_1$. В силу трехсвязности G вершина x должна быть смежна с W_1, иначе множество $\{y, t\}$ отделяет $\{z, x\}$ от остальных верщин графа

G. Вершина y должна быть смежна с $G - H - W_1$, иначе в H только t смежна с $G - H - W_1$ и $H_2 \neq H$. Тогда стягиваема четверка $W_1 \cup \{x\}$ и в ее окрестности лежат вершины p, q, y, z, t (см. Рис. 70). По пункту 2 леммы 9 ребро pq является одним из путей для этой четверки. Следовательно, шестерка $W_1 \cup \{x, p, q\}$ стягиваема, а тогда стягиваема пятерка $W_1 \cup \{p, q\}$.

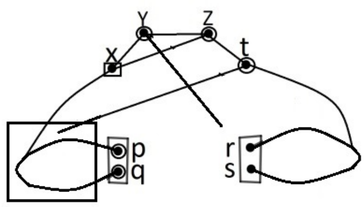


Рис. 70: *стягиваемая четверка* $W_1 \cup \{x\}$ *и ее окрестность*

Подслучай 1.2. *Вершина* t *несмежна с* W_1.

Пусть $|W_2| = 2$. Так как z и t несмежны с W_1, одна из вершин x,y смежна хотя бы с двумя вершинами W_1, пусть x. В этом случае пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$ связна (t смежна с W_2, а z смежна с y и t) и стягиваема.

Значит, $|W_2| = 3$.

Пятерка $W_2 \cup \{z, t\}$ связна, так как z смежна с t, а t смежна с W_2. По утверждению 3, она нестягиваема только в том случае, когда одна из вершин x, y несмежна с $G - H - W_2$. Пусть это будет y. В силу трехсвязности G вершина y должна быть смежна с W_2 (иначе $\{x, t\}$ отделяет $\{y, z\}$ от остальных вершин графа).

Значит, W_1 смежна только с x. Покажем, что к данному случаю применима лемма 11. Действительно, $|W_1| = 3$ и с вершинами W_1 смежна только x. Вершина x смежна хотя бы с двумя вершинами H (с y и с z), причем в $G - (W_1 \cup \{p\})$ она смежна или только с y и z, которые несмежны с $\{p, q\}$ (выше мы предположили, что $N_G(z) \subset H$ и y несмежна с $G - H - W_2$), или хотя бы с тремя вершинами. Следовательно, в G есть стягиваемая пятерка.

Случай 2. *Вершина t несмежна с W_2.*

Тогда W_2 смежно с множеством $\{x, y\}$.

Подслучай 2.1. *Вершина t смежна с W_1.*

Если $|W_2| = 3$, то этот случай получается из подслучая 1.2 заменой W_1 на W_2.

Значит, $|W_2| = 2$.

По утверждению 3, для ребра zt, смежного с W_1, и ребра xy, одна из вершин x, y должна быть несмежна с $G - H - W_1$. Пусть это будет y. В силу трехсвязности графа G вершина y должна быть смежна с W_1 (иначе $\{x, t\}$ отделяет $\{y, z\}$ от остальных вершин графа).

Тогда с W_2 смежна только вершина x.

Но $t \in H_2$, вершины y и z несмежны с $G - H - W_1$, поэтому t должна быть смежна с $G - H - W_1$ (но не с W_2). Тогда пятерка $W_2 \cup \{x, y, z\}$ стягиваема (см. Рис. 71).

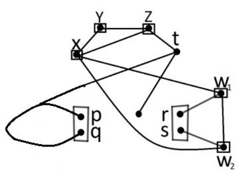


Рис. 71: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{x, y, z\}$

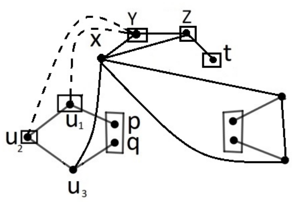


Рис. 72: *стягиваемая пятерка* $\{u_1, u_2, y, z, t\}$

Подслучай 2.2. *Вершина t несмежна с W_1.*

В начале раздела 4.3.3.1 мы предположили, что z смежна с x и y. Кроме того, перед разделом 4.3.2 мы предположили, что смежны x и y. Следовательно, вершины x, y, z образуют треугольник. По теореме 4 хотя бы две из них имеют степень 3 в G. Одна из этих двух вершин — z, пусть второй будет y.

Если y несмежна с W_1, то по лемме 11 в графе G есть стягиваемая пятерка. Действительно, с W_1 смежна только x. Вершина x смежна хотя бы с двумя вершинами H. В $G-(W_1\cup\{p\})$ она смежна или хотя бы с тремя вершинами, или только с y и z, причем z несмежна с $\{p,q\}$ (мы рассматриваем случай $N_G(z)\subset H$), а y несмежна хотя бы с одной вершиной из множества $\{p,q\}$ (так как $d_G(y)=3$).

Значит, y смежна с W_1. В первом абзаце подслучая сказано, что y смежна с x и z и имеет степень 3 в G. Следовательно, y смежна ровно с одной вершиной из множества $W_1\cup W_2$. По формулировкам рассматриваемого случая и подслучая, вершина t несмежна с множеством $W_1\cup W_2$. Наконец, по формулировке раздела 4.3.3.1, $N_G(z)\subset H$. Следовательно, вершина x смежна с обеими вершинами W_2 и двумя вершинами W_1, с которыми несмежна y (так как каждая вершина $W_1\cup W_2$ должна быть смежна с H, но эти вершины не могут быть смежны с $\{y,z,t\}$). Не умаляя общности будем считать, что y смежна с $\{u_1,u_2\}$, тогда пятерка $\{u_1,u_2,y,z,t\}$ стягиваема (см. Рис. 72).

4.3.3.2 Вершина z несмежна с $G-H-W_1$, но смежна с W_1.

По утверждению 3, пятерка $W_1\cup\{z,t\}$ нестягиваема, только если одна из вершин x, y несмежна с $G-H-W_1$. Пусть это будет y. Если y смежна только с вершинами H, мы получим случай, аналогичный уже разобранному (он получается из случая 4.3.3.1, если поменять местами y и z, x и t). Поэтому можно считать, что y смежна с W_1.

Вершины x и t в совокупности смежны со всеми вершинами W_2. Кроме того, x и t имеют хотя бы по одному соседу в $G-H-W_1$, так как $H=H_2$, а y и z несмежны с $G-H-W_1$.

Пятерка $W_1\cup\{y,z\}$ связна, но нестягиваема. Это возможно, только если вершины x и t несмежны и хотя бы одна из них имеет ровно одного соседа в $G - H - W_1$.

Так как $y \in H_2$, в графе $G-W_1$ между y и $G-H-W_1$ должно быть хотя бы два пути, не пересекающихся по внутренним вершинам. Это возможно, только если y смежна с множеством $\{z, t\}$, так как в начале раздела 4.3.3.2 мы предположили, что y несмежна с $G - H - W_1$. Напомним, что в рассматриваемом нами случае $zt \in E(G)$, следовательно, граф $G(\{y, z, t\})$ связен. Аналогично $z \in H_2$, $xy \in E(G)$, поэтому граф $G(\{z, x, y\})$ связен.

Случай 1. *Есть хотя бы одно из ребер yt, xz.*

На данный момент на пары (x, y) и (t, z) наложены симметричные условия, поэтому, не умаляя общности можно считать, что есть ребро xz. Четверка $W_1 \cup \{y\}$ стягиваема (см. Рис. 73), так как выше было доказано, что x и t имеют хотя бы по одному соседу в $G - H - W_1$. Это не может быть один единственный общий сосед, так как они в совокупности смежны со всеми вершинами W_2 (в заголовке раздела 4.3.3.2 и его первом абзаце сказано, что z и y несмежны с $G - H - W_1$). Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{p, q, x, z, t\}$, так как y несмежна с $G - H - W_1$. По лемме 9 ребро pq является одним из путей для этой четверки. Тогда стягиваема шестерка $W_1 \cup \{p, q, y\}$, а, следовательно, и пятерка $W_1 \cup \{p, q\}$, так как в силу связности $G(\{y, z, t\})$ (связность была доказана в абзаце перед случаем 1) есть еще ребро yt или yz.

Случай 2. *Ребер yt, xz нет.*

В силу связности $G(\{y, z, t\})$ (связность была доказана в абзаце перед случаем 1) есть ребро yz.

Напомним, что в названии раздела 4.3.3.2 и первом его абзаце мы указали, что y и z несмежны с $G - H - W_1$. Следовательно, с W_2 смежна хотя бы одна из вершин x, t. Пусть t смежна. Если x несмежна с W_2, то x имеет хотя бы двух соседей в $G - H - W_2$. Но тогда множества $W_2 \cup \{y, z, t\}$ и

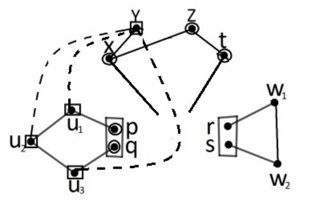


Рис. 73: *четверка $W_1 \cup \{y\}$ и ее окрестность*

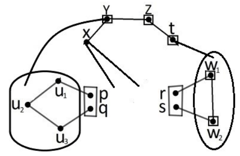


Рис. 74: *пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$ стягиваема, если x смежна хотя бы с двумя вершинами $G - H - W_2$*

$W_2 \cup \{z, t\}$ стягиваемы, и одно из них размера 5 (см. Рис. 74). Значит, x смежна с W_2.

Подслучай 2.1. $|W_2| = 3$.

В названии раздела 4.3.3.2 и первом его абзаце мы указали, что y и z несмежны с $G - H - W_1$. Так как каждая вершина W_2 смежна с H, одна из вершин x, t смежна хотя бы с двумя вершинами W_2. Пусть это будет вершина t.

Если z и t имеют общего соседа u_i в W_1, то для треугольника $u_i z t$ не выполняется теорема 4, так как u_i и t имеют степень хотя бы 4 в G (вершина t смежна с u_i, z и двумя вершинами W_2).

Перед разделом 4.3.2 было сказано, что x и y смежны. Перед текущим подслучаем было сказано, что x смежна с W_2. Следовательно, пятерка $W_2 \cup \{x, y\}$ связна. Она нестягиваема, только если t несмежна с $G - H - W_2$. Но тогда в графе $G - W_2$ любой путь из t в $G - H - W_2$ проходит через z (в рассматриваемом нами случае нет ребра yt, а отсутствие ребра xt доказано в 3 абзаце раздела 4.3.3.2), что противоречит тому, что $t \in H_1$.

Подслучай 2.2. $|W_2| = 2$.

Вершины y и z несмежны с W_2 (см. заголовок и первый абзац раздела 4.3.3.2), а x и t — смежны (доказано во втором абзаце случая 2), поэтому можно считать, что t смежна с w_1, а x смежна с w_2 (возможно, одна из них смежна с обеими вершинами W_2).

Пятерки $W_2 \cup \{x, z, t\}$ и $W_2 \cup \{x, y, t\}$ нестягиваемы, поэтому y и z имеют не более чем по одному соседу в W_1. Выше было доказано, что они имеют хотя бы по одному соседу в W_1 (см. заголовок и первый абзац раздела 4.3.3.2). Значит, y и z имеют ровно по одному соседу в W_1.

Предположим, что одна из вершин x, t (например, x) смежна с одной из крайних вершин W_1. Тогда можно выбрать эту крайнюю вершину так, чтобы хотя бы одна из оставшихся вершин W_1 была смежна с $H - x$. Пусть выбрана вершина u_1. Тогда стягиваема пятерка $\{u_2, u_3, y, z, t\}$ (см. Рис. 75).

Значит, x и t несмежны с u_1 и u_3. Выше было показано, что вершины y и z имеют ровно по одному соседу в W_1. Поэтому u_1 и u_3 связаны с y и z двумя независимыми ребрами (не умаляя общности, yu_1, zu_3), а множество $\{x, t\}$ смежно с u_2. Но тогда стягиваема пятерка $W_2 \cup \{u_2, x, t\}$ (см. Рис. 76). Противоречие.

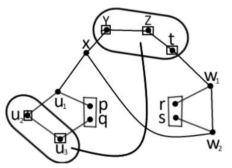


Рис. 75: *стягиваемая пятерка* $\{u_2, u_3, y, z, t\}$

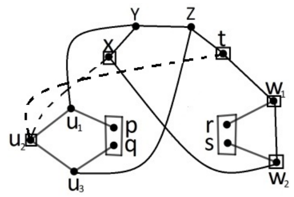


Рис. 76: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{u_2, x, t\}$

4.4 $|W_1| = |W_2| = 2$.

Пусть $W_1 = \{u_1, u_2\}$, причем u_1 смежна с p в $G - H - W_1$, а u_2 — с q. Пусть $W_2 = \{w_1, w_2\}$, причем w_1 смежна с r в $G - H - W_2$, а w_2 — с s.

Замечание 4. В этом случае $|H| + |W_1| + |W_2| = 8$. Мы рассматриваем только графы, в которых вершин хотя бы 13, поэтому $G - H - W_1 - W_2$ не может состоять ровно из двух вершин. Следовательно, если в ходе доказательства мы будем получать, что в графе G есть ребро pq или rs, то из леммы 8 будет следовать, что граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен.

4.4.1 Нашлась вершина H, которая смежна с обеими вершинами одного из путей

Пусть, например, x смежна с u_1 и u_2.

Если граф $G(W_2 \cup \{y, z, t\})$ — связный, то пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$ стягиваема. Поэтому далее мы будем считать, что граф $G(W_2 \cup \{y, z, t\})$ несвязен.

Случай 1. *Две вершины множества $\{y, z, t\}$ в объединении с W_2 образуют связный подграф.*

Не умаляя общности, z и t. Тогда y может быть смежна в $G(H)$ только с x и должна иметь хотя бы двух соседей в $G - H - W_2$. Так как $G(H)$ связен, вершина x смежна с z или t. Следовательно, пятерка $W_2 \cup \{x, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 77, граф $G(W_2 \cup \{z, t\})$ связен).

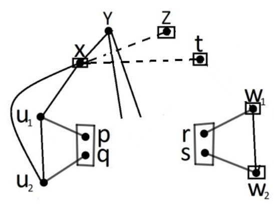


Рис. 77: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{x, z, t\}$

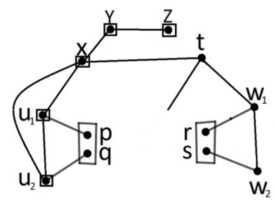


Рис. 78: *стягиваемая пятерка* $W_1 \cup \{x, y, z\}$

Случай 2. *Только одна вершина множества $\{y, z, t\}$ образует связный подграф с W_2.*

Не умаляя общности, t смежна с w_1. Тогда вершина t может быть смежна в $G(H)$ только с x и должна иметь хотя бы двух соседей в $G - H$, один из которых лежит в W_2. Кроме того, граф $G(\{x, y, z\})$ должен быть связен, так как связен граф $G(H)$.

Если два соседа t лежат в $G - H - W_1$, то пятерка $W_1 \cup \{x, y, z\}$ стягиваема (см. Рис. 78). Следовательно, второй сосед t обязан лежать в W_1, пусть это u_1. Но заметим, что из трех вершин u_1, x, t, образующих треугольник, только вершина t может иметь степень 3 в G, что противоречит теореме 4.

Случай 3. *Ни одна из вершин* $\{y, z, t\}$ *не смежна с* W_2.

Тогда с W_2 смежна только x. Аналогично получаем, что с W_1 смежна только x.

Ни одна вершина из множества $\{y, z, t\}$ не может иметь степень 1 в $G(H)$, так как в этом случае пятерка из трех остальных вершин H и вершин W_1 стягиваема.

Разберем случаи, каким может быть граф $G(H)$.

Подслучай 3.1. *Вершина* x *имеет степень 1 в* $G(H)$.

Пусть x смежна с вершиной y. Тогда вершины z и t, чтобы иметь степень не менее 2 в $G(H)$, должны быть смежны друг с другом и с вершиной y.

Предположим, что хотя бы одна из вершин $\{z, t\}$ смежна хотя бы с двумя вершинами $G - H - W_1 - W_2$. Например, z. Тогда пятерка $W_1 \cup \{x, y, t\}$ стягиваема.

Следовательно, вершины z и t имеют ровно по одному соседу в $G - H - W_1 - W_2$, причем эти соседи должны быть различны в силу трехсвязности G (иначе этот их общий сосед и y отделят $\{z, t\}$ от остальных вершин графа). Вершина y может быть смежна с любым числом вершин в $G - H - W_1 - W_2$. Это вторая подозрительная четверка (см. Рис. 79).

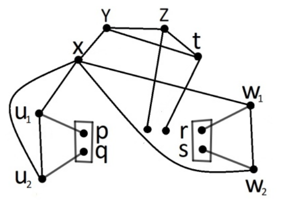


Рис. 79: *вторая подозрительная четверка. Граф* $G(H)$ *— это треугольник* yzt *и ребро* xy*. Вершины* z *и* t *имеют степень 3 в* G*, вершины* x *и* y *могут быть смежны еще с какими-то вершинами* $G - H - W_1 - W_2$*. Соседи* z *и* t *в* $G - W_1 - W_2$ *различны.*

Подслучай 3.2. *В* $G(H)$ *все вершины имеют степень 2.*

Можно считать, что $G(H)$ — это цикл $xyzt$. Тогда любая вершина из множества $\{y, z, t\}$ должна иметь ровно одного соседа в $G - H - W_1 - W_2$, иначе две другие в объединении с $\{x\} \cup W_1$ дадут стягиваемую пятерку. Кроме того, все три вершины y, z, t не могут иметь одного общего соседа в силу трехсвязности G (иначе общий сосед и x отделят $\{y, z, t\}$ от остальных вершин G). Это третья подозрительная четверка (см. Рис. 80).

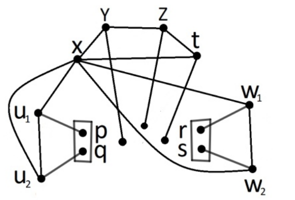


Рис. 80: *третья подозрительная четверка.* $G(H)$ *— это цикл* $xyzt$*. Вершины* y*,* z *и* t *имеют степень 3 в* G*, их соседи в* $G - H$ *могут совпадать, но не все три сразу, вершина* x *может быть смежна еще с какими-то вершинами* $G - H - W_1 - W_2$*.*

Подслучай 3.3. $G(H)$ *— это* K_4 *без одного ребра.*

Предположим, что отсутствует ребро из вершины x, например, xz. Тогда среди трех вершин x, y, t, образующих треугольник, две должны иметь степень 3 в G по теореме 4. Это могут быть только y и t. Но тогда множество $\{x, z\}$ отделяет множество $\{y, t\}$ от остальных вершин графа G, что противоречит его трехсвязности.

Следовательно, можно считать, что нет ребра yt. В треугольниках xyz и ztx степень 3 должны иметь вершины y, z и t. Поэтому z несмежна с $G - H$, а из y и t выходит ровно по одному ребру в $G - H - W_1 - W_2$, причем эти ребра должны быть независимы, так как граф G трехсвязен. Это четвертая подозрительная четверка (см. Рис. 81).

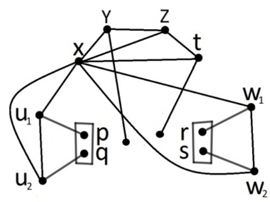


Рис. 81: *четвертая подозрительная четверка.* $G(H)$ *— это* K_4 *без ребра* yt*. Вершины* y*,* z *и* t *имеют степень 3 в* G*, вершина* x *может быть смежна еще с какими-то вершинами* $G - H - W_1 - W_2$*. Соседи* y *и* t *в* $G - H - W_1 - W_2$ *различны.*

Подслучай 3.4. $G(H)$ *— это полный граф.*

По теореме 4 вершины y, z и t обязаны иметь степень 3 в G. Тогда вершина x отделяет их от $G - H$, что противоречит трехсвязности G.

Далее мы будем рассматривать случаи, когда в H нет вершин, смежных с обеими вершинами одного из путей.

4.4.2 Одна из вершин H смежна с одним из путей W_1, W_2 и с $G - H - W_1 - W_2$.

Пусть x такая вершина, и x смежна с u_1.

Если граф $G(W_2 \cup \{y, z, t\})$ связен, то пятерка $W_2 \cup \{y, z, t\}$ стягиваема. Будем считать, что граф $G(W_2 \cup \{y, z, t\})$ несвязен.

Случай, когда с W_2 смежна только x, разобран в разделе 4.4.1.

Случай 1. *Две вершины множества $\{y, z, t\}$ в объединении с W_2 образуют связный подграф.*

Пусть это z и t. Тогда y может быть смежна в H только с x и должна иметь не менее двух соседей в $G - H - W_2$. А x смежна с одной из вершин z, t. Легко видеть, что пятерка $W_2 \cup \{x, z, t\}$ стягиваема (см. Рис. 82, граф $G(W_2 \cup \{z, t\})$ связен).

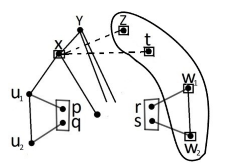


Рис. 82: *стягиваемая пятерка* $W_2 \cup \{x, z, t\}$

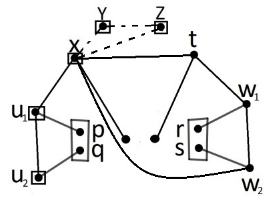


Рис. 83: *стягиваемая пятерка* $W_1 \cup \{x, y, z\}$

Случай 2. *Только одна вершина множества $\{y, z, t\}$ в объединении с W_2 образует связный подграф.*

Пусть это t, и t смежна с w_1. Кроме того, t смежна в H только с x. В силу связности $G(H)$, граф $G(\{x, y, z\})$ связен. Мы рассматриваем случай, когда t несмежна с обеими вершинами W_2, поэтому с w_2 смежна x.

Если t смежна с $G - H - W_1 - W_2$, то пятерка $W_1 \cup \{x, y, z\}$ стягиваема (см. Рис. 83).

Поэтому t должна быть смежна с W_1. С u_1 вершина t смежна быть не может, так как тогда образуется треугольник u_1xt, который противоречит теореме 4 (только вершина t в нём может иметь степень 3). Следовательно, t смежна с u_2.

Вершина x смежна с w_2 (было доказано двумя абзацами выше). Тогда можно повторить рассуждения выше, поменяв местами W_1 и W_2, и получить, что y и z несмежны с W_1. Если одна из вершин y, z имеет степень 1 в $G(H)$, то три другие вершины H в объединении с W_2 дадут стягиваемую пятерку. Таким образом, y и z смежны друг с другом, смежны с x и имеют ровно по одному соседу в $G - H - W_1 - W_2$, причем эти соседи различны в силу трехсвязности G. Это пятая подозрительная четверка (см. Рис. 84).

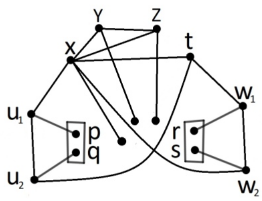


Рис. 84: *пятая подозрительная четверка. Граф* $G(H)$ *— это треугольник* xyz *и ребро* xt*. Вершины* y*,* z *и* t *имеют степень 3 в* G*, вершина* x *может быть смежна еще с какими-то вершинами* $G - H - W_1 - W_2$*. Соседи* y *и* z *в* $G - W_1 - W_2$ *различны, но могут совпадать с соседом* x*.*

Замечание 5. В найденных нами подозрительных четверках либо одна вершина H смежна со всеми вершинами обоих путей (четверки 2-4), либо две вершины H имеют по одному соседу в каждом из путей (четверка 5). Кроме того, окрестность любой подозрительной четверки содержит не менее 6 вершин.

Замечание 6. Таким образом мы доказали, что если в графе G нет стягиваемой пятерки и стягиваемая четверка H не является ни одной из описанных выше подозрительных четверок, то ни одна вершина H не смежна с двумя вершинами одной из крайних частей $G - H$ или с вершиной крайней части и вершиной $G - H - W_1 - W_2$.

Цель следующего раздела — доказать, что если в графе G есть стягиваемая четверка, то она имеет вид 2-5 подозрительных четверок.

4.4.3 Ни одна вершина H не смежна с двумя вершинами одной из крайних частей $G - H$ или с вершиной крайней части и вершиной $G - H - W_1 - W_2$

Лемма 12. *Если стягиваемая четверка H не является ни одной из описанных выше подозрительных четверок, то в графе $G-H$ ровно две крайние части. Границы $\{p, q\}$ и $\{r, s\}$ этих крайних частей не совпадают.*

Доказательство. Предположим, что в графе $G-H$ есть еще одна крайняя часть $W_3 = \{v_1, v_2\}$. Так как в множестве H четыре вершины, а в множестве $W_1 \cup W_2 \cup W_3$ — шесть, найдется вершина H, которая смежна хотя бы с двумя вершинами множества $W_1 \cup W_2 \cup W_3$. Пусть это будет вершина x.

В силу замечания 6, вершина x не может быть смежна с двумя вершинами одной части, поэтому можно считать, что x смежна с W_1 и W_2. Но тогда, применяя замечание 6 к крайним частям W_1 и W_3, приходим к противоречию — x смежна с вершиной крайней части W_1 и вершиной $G - H - W_1 - W_3$.

Если же в графе $G - H$ ровно две крайние части и $\{p, q\} = \{r, s\}$, то в $G - H$ не может быть других частей, кроме двух крайних. А тогда $v(G) = 10$. Противоречие. □

Рассмотрим дерево разбиения $\mathrm{BT}(G - H)$. В этом дереве ровно две висячие вершины, поэтому оно является простым путем. Выведем из этого факта несколько полезных лемм.

Лемма 13. *Пусть стягиваемая четверка H не является подозрительной четверкой типа 2-5. Предположим, что границы $\{p, q\}$ и $\{r, s\}$ крайних частей графа $G - H$ пересекаются. Тогда выполнено одно из двух утверждений:*

(1) вершина, лежащая в пересечении этих множеств, имеет степень больше 3 в $G - H$.

(2) pq, $rs \notin E(G)$, *в графе* $G - H$ *ровно три части, причем та часть, которая не является крайней, — 3-блок.*

Доказательство. Пусть $p = r$. По лемме 3, $d_{G-H}(p) \geqslant 3$. Следовательно, если не выполнено утверждение (1), то $d_{G-H}(p) = 3$.

Если пронумеровать все одиночные множества в порядке следования на пути $\mathrm{BT}(G-H)$, то мы получим, что вершина p входит в первое и последнее одиночное множество. Но тогда p входит во все одиночные множества. Действительно, если существует одиночное множество $R \not\ni p$, то R отделяет $\{p, q\}$ и $\{p, s\}$ в $\mathrm{BT}(G - H)$, а значит и в $G - H$, что, очевидно, не так (есть путь qW_1pW_2s, который может пересекаться с одиночным множеством R только по вершинам множества $\{q, s\}$, так как вершины W_1 и W_2 имеют степень 2 в $G - H$).

Докажем, что $ps \notin E(G)$. Пусть это ребро есть. Тогда $N_G(p) = \{u_1, s, w_1\}$, где $u_1 \in W_1$, $w_1 \in W_2$, так как $d_{G-H}(p) = 3$. Следовательно, p и q несмежны, и множество $\{u_1, s\}$ разделяет $\{p, q\}$, что противоречит тому, что $\{p, q\}$ — одиночное. Аналогично, $pq \notin E(G)$.

Пусть A — часть, смежная с $\{p, s\}$ в $\mathrm{BT}(G-H)$, отличная от $W_2 \cup \{p, s\}$. Так как $v(G) \geqslant 13$, часть A — некрайняя. Вершина p содержится во всех одиночных множествах $G-H$, значит, вершина s не содержится ни в одном одиночном множестве, кроме $\{p, s\}$ (все одиночные множества состоят из двух вершин и содержат p). Следовательно, s лежит ровно в двух частях $\mathrm{Part}(G-H)$. Так как по лемме 3 $d_{G-H}(s) \geqslant 3$, в графе $(G-H)(A)$ вершина s имеет степень хотя бы 2, а в графе $(G-H)'(A)$ — хотя бы 3 (в этом графе добавилось еще ребро ps, которого раньше не было). Получаем, что часть A — 3-блок. Чтобы вершина p имела степень хотя бы 3 в $(G - H)'(A)$ необходимо, чтобы в $G - H$ из p шло ребро во внутреннюю вершину части A.

Аналогичные рассуждения можно повторить и для части B, в которой лежит $\{p, q\}$. Но так как из p ведет всего три ребра, два из которых — в крайние части, A должно совпадать с B. Граф $\mathrm{BT}(G-H)$ — это путь, и мы доказали, что обе его висячие вершины смежны с одной и той же вершиной, соответствующей части A. Следовательно, в $G-H$ ровно три части. Что и требовалось доказать.

$\square$

Лемма 14. *Пусть стягиваемая четверка H не является подозрительной четверкой типа 2-5. Пусть $\{p, q\}$ — граница крайней части A_1. Тогда если $pq \notin E(G)$, то хотя бы один из графов $G-H-W_1-p$ или $G-H-W_1-q$ двусвязен*

Доказательство. Пусть A — некрайняя часть, смежная с $\{p,q\}$ в $\mathrm{BT}(G-H)$. Перед леммой 13 мы доказали, что граф $\mathrm{BT}(G-H)$ является простым путём. Часть A — некрайняя, следовательно, имеет степень 2 в $\mathrm{BT}(G-H)$. По определению 5 дерева разбиения это означает, что часть A содержит два одиночных множества. Одно из этих множеств — $\{p,q\}$, второе назовём R, $R \neq \{p,q\}$. Не умаляя общности можно считать, что $p \notin R$.

Граф $\mathrm{BT}(G-H)$ является простым путём, вершина $\{p,q\}$ имеет в нём степень 2 (так как висячими вершинами в этом графе являются крайние части). По определению 5 дерева разбиения это означает, что $\{p,q\}$ содержится ровно в двух частях. Эти части — A и $\{p,q\} \cup W_1$ (в них $\{p,q\}$ уже точно лежит). По пункту 3 леммы 1 множество R разделяет $A \cup W_1$ и остальные вершины графа $G-H$. В предыдущем абзаце мы предположили, что $p \notin R$. Следовательно, p смежна в $G-H$ только с вершинами $A \cup W_1$. По лемме 3 $d_{G-H}(p) \geqslant 3$. В множестве W_1 у p только один сосед, значит в графе $(G-H)(A)$ вершина p имеет степень хотя бы 2. А в графе $(G-H)'(A)$ вершина p имеет степень хотя бы 3, так как в формулировке леммы мы предположили, что $pq \notin E(G)$. Следовательно, часть A — 3-блок. Значит, $(G-H)'(A) - p$ двусвязен.

Напомним, что во втором абзаце леммы мы доказали, что множество R разделяет $A \cup W_1$ и остальные вершины графа $G - H$. Граф $\mathrm{BT}(G - H)$ является простым путём, вершина R имеет в нём степень 2 (так как висячими вершинами в этом графе являются крайние части). По пункту 2 леммы 1 из этого следует, что $|\mathrm{Part}(G; R)| = 2$ и частями являются $B_1 = A \cup W_1$ и $B_2 = G - H - \mathrm{Int}(B_1)$ (см. Рис. 85). Действительно, R не разделяет B_1 и не разделяет B_2 в графе $\mathrm{BT}(G-H)$, а значит, не разделяет и в $G - H$. Но при этом R отделяет B_1 от B_2.

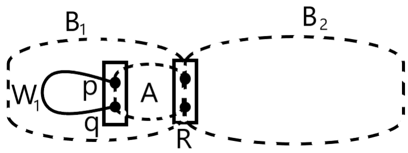


Рис. 85: *части разбиения множеством* R

Докажем, что граф $G - H - W_1 - p$ двусвязен. Для этого проверим, что между произвольными двумя вершинами u и v в нём есть два пути, не пересекающиеся по внутренним вершинам. В предыдущем абзаце мы доказали, что R отделяет B_2 от B_1 в $G - H$. Следовательно, в графе $G - H - W_1 - p$ множество R отделяет $A - p = B_1 - W_1 - p$ от B_2 (так как $G - H - W_1 - p$ является подграфом $G - H$).

Разберем три случая.

1) Вершины u и v обе не лежат в A, тогда $u, v \in \mathrm{Int}(B_2)$. Граф $G - H$ двусвязен, поэтому в нём между u и v было два непересекающихся по внутренним вершинам пути P_1, P_2. Если оба пути проходят только по B_2, то эти пути есть и в графе $G - H - W_1 - p$, так как мы не удалили ни одну вершину B_2. Предположим, что один из путей (не умаляя общности P_1) проходил через $G - H - B_2 = \mathrm{Int}(B_1)$. Будем двигаться от u до v по этому пути. Рассмотрим первую встретившуюся нам вершину из $\mathrm{Int}(B_1)$, назовем эту вершину α. Вершины $\mathrm{Int}(B_1)$ несмежны с вершинами $\mathrm{Int}(B_2)$

по написанному в абзаце после замечания 1. Перед вершиной α в пути шла вершина из B_2 (так как α — первая на пути вершина из $\mathrm{Int}(B_1)$), и при этом не из $\mathrm{Int}(B_2)$ (так как α несмежна с этим множеством). Значит, перед α шла вершина из $B_2 - \mathrm{Int}(B_2) = R$. Пойдем по пути дальше и аналогично докажем, что после последней вершины из $\mathrm{Int}(B_1)$ в пути тоже идёт вершина из R. Наш путь — несамопересекающийся, поэтому это разные вершины из R. Итак, если путь между u и v заходит в $\mathrm{Int}(B_1)$, то он проходит через обе вершины R. Мы доказали, что P_1 проходит через обе вершины R. Пути P_1 и P_2 не пересекаются по внутренним вершинам, поэтому P_2 не проходит через R (вершины R не могут быть концами P_1 и P_2, так как мы рассматриваем случай u, $v \in \mathrm{Int}(B_2)$). Следовательно, P_2 не проходит через $\mathrm{Int}(B_1)$, то есть лежит целиком в B_2, а значит и целиком в $G-H-W_1-p$. Перестроим путь P_1, чтобы он тоже целиком лежал в $G-H-W_1-p$. При этом мы будем перестраивать только ту часть пути, которая лежит в $\mathrm{Int}(B_1)$. Путь P_2 не содержит вершины $\mathrm{Int}(B_1)$, поэтому не станет пересекать перестроенный путь по внутренним вершинам.

Граф $(G-H)'(A)-p$ двусвязен и содержит обе вершины R. Значит, между вершинами R в нём есть два пути Q_1 и Q_2. Один из этих путей (не умаляя общности, Q_1) не проходит по ребру между вершинами R, а тогда он содержит только рёбра графа G. Заменим участок пути P_1 между вершинами R на путь Q_1. Этот путь лежит в $(G-H)'(A)-p$ и содержит только ребра G, следовательно, он лежит в $G-H-W_1-p$.

Итак, мы нашли два пути между u и v, непересекающихся по внутренним вершинам.

2) $u \in A$, $v \in \mathrm{Int}(B_2)$. В графе $G-H$ между u и v было два пути P_1 и P_2. По написанному в абзаце после замечания 1 $\mathrm{Int}(B_1)$ и $\mathrm{Int}(B_2)$ — компоненты связности графа $G-H-R$.

Если $u \in R$ и оба пути не проходят через $\mathrm{Int}(B_1)$, то оба пути есть и в $G-H-W_1-p$.

Если $u \in R$, но один из путей (не умаляя общности P_1) проходит через $\mathrm{Int}(B_1)$, то аналогично предыдущему пункту можно доказать, что в пути P_1 после последней вершины, лежащей в $\mathrm{Int}(B_1)$, идет вершина из R. Так как путь несамопересkающийся, то эта та вершина, которая не равна u. Тогда путь P_2 не проходит через $\mathrm{Int}(B_1)$ (так как не может тоже проходить через вторую вершину R). И, аналогично предыдущему случаю, мы можем часть пути P_1, лежащую в $\mathrm{Int}(B_1)$, заменить на путь, который всё ещё лежит в $\mathrm{Int}(B_1)$, но при этом лежит и в $G - H - W_1 - p$.

Наконец, если $u \in \mathrm{Int}(B_1)$, то на обоих путях есть вершины из R (опять же после последней вершины из $\mathrm{Int}(B_1)$). Так как пути несамопересекающиеся, то это разные вершины из R. Части путей P_1 и P_2 от v до вершин R оставим неизменными. А в двусвязном графе $(G-H)'(A)-p$ построим два пути от u до R, которые пересекаются только по u (это возможно в силу двусвязности). Тогда мы построили два нужных пути между u и v.

3) $u, v \in A$. В силу двусвязности $(G - H)'(A) - p$, в нём есть два нужных пути P_1 и P_2 между u и v. Граф $(G - H)'(A) - p$ лежит в графе $G-H-W_1-p$ весь, кроме, возможно, ребра между вершинами R. Если P_1 и P_2 не проходят по этому ребру, то мы построили два нужных пути между u и v. Предположим, что P_1 проходит по ребру между вершинами R, и этого ребра нет в G. Мы заменим проход по этому ребру на проход между вершинами R через $\mathrm{Int}(B_2)$. Так как P_2 не содержит вершин $\mathrm{Int}(B_2)$, два новых пути не станут пересекаться по внутренним вершинам. Докажем, что в B_2 есть путь между вершинами R. По написанному в абзаце после замечания 1, $\mathrm{Int}(B_2)$ — компонента связности $G - H - R$, и каждая вершина R смежна с $\mathrm{Int}(B_2)$. Следовательно, из обеих вершин R есть ребра в $\mathrm{Int}(B_2)$, а между вторыми концами этих ребер есть путь в $\mathrm{Int}(B_2)$, так как эта компонента связности. Итого, мы построили два нужных пути между u и v.

□

Утверждение 4. *Не более двух вершин* H *могут быть смежны с* $G - H - W_1 - W_2$*, причем никакая вершина* H *не может быть смежна с двумя вершинами этого подграфа.*

Доказательство. Если хотя бы три вершины H смежны с $G - H - W_1 - W_2$, то с W_1 может быть смежна только одна оставшаяся вершина, что противоречит утверждению в заголовке 4.4.3.

Предположим, что какая-то вершина H смежна хотя бы с двумя вершинами $G - H - W_1 - W_2$. Пусть это будет z. Из заголовка раздела 4.4.3 следует, что одна и та же вершина H не может быть смежна с обеими вершинами W_1. Пусть, не умаляя общности, x смежна с u_1 и y смежна с u_2. Пятерка $W_1 \cup \{x, y, t\}$ нестягиваема только в том случае, когда t несмежна с $\{x, y\} \cup W_1$ (см. Рис. 86). Но $d_G(t) \geqslant 3$, в H вершина t смежна только с z, поэтому t должна быть смежна хотя бы с двумя вершинами $G - H - W_1$. Вершина t не может быть смежна с двумя вершинами W_2 или одной вершиной W_2 и вершиной $G - H - W_1 - W_2$, поэтому t должна быть смежна хотя бы с двумя вершинами $G - H - W_1 - W_2$. Но пятерка $W_1 \cup \{x, y, z\}$ связна в силу связности $G(H)$, а, следовательно, стягиваема (см. Рис. 87).

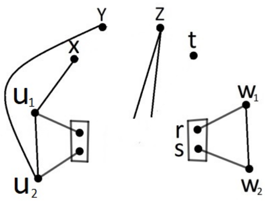


Рис. 86: *пятерка* $W_1 \cup \{x, y, t\}$

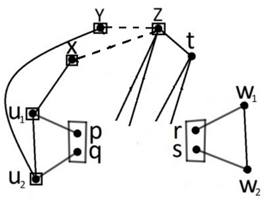


Рис. 87: *стягиваемая пятерка* $W_1 \cup \{x, y, z\}$

$\square$

4.4.3.1 Две вершины H смежны с $G - H - W_1 - W_2$.

Пусть эти вершины — z и t. Тогда можно считать, что x смежна с u_1 и w_1, а y — с u_2 и w_2. По утверждению 4 z и t имеют ровно по одному соседу в $G - H - W_1 - W_2$: пусть f — сосед z, а g — сосед t (возможно, $f = g$).

Случай 1. *Из множества $\{z, t\}$ ведут два независимых ребра в множество $\{x, y\}$.*

Пусть это ребра yz и xt. Так как $d_G(z) \geqslant 3$, $d_G(t) \geqslant 3$, и вершины z, t имеют только по одной смежной в $G - H$, вершина t смежна с $\{y, z\}$, вершина z смежна с $\{x, t\}$.

По лемме 12 $\{p, q\} \neq \{r, s\}$, поэтому, не умаляя общности можно считать, что $r \notin \{p, q\}$.

Если граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен, то пятерка $\{u_2, w_2, y, z, t\}$ стягиваема, так как $p \neq r$ (см. Рис. 88). Значит, граф $G - H - W_1 - W_2$ недвусвязен, в частности, по лемме 8 и замечанию 4, в графе G нет ребер pq и rs.

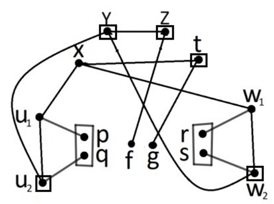


Рис. 88: *стягиваемая пятерка $\{u_2, w_2, y, z, t\}$ (t смежна с $\{y, z\}$)*

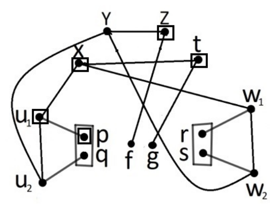


Рис. 89: *стягиваемая пятерка $\{p, u_1, x, t, z\}$ (z смежна с $\{x, t\}$)*

По лемме 14 один из графов $G-H-W_1-p$ или $G-H-W_1-q$ двусвязен. Пусть, не умаляя общности, граф $G - H - W_1 - p$ двусвязен. Рассмотрим пятерку $\{p, u_1, x, t, z\}$ (см. Рис. 89). Она связна, так как z смежна с $\{x, t\}$. При ее удалении остается граф, получаемый из двусвязного графа $G - H - W_1 - p$ добавлением пути qu_2yw_2. При этом $q \neq w_2$, то есть полученный граф двусвязен. Следовательно, пятерка $\{p, u_1, x, t, z\}$ стягиваема.

Случай 2. *Из множества* $\{z, t\}$ *нельзя провести два независимых ребра в множество* $\{y, x\}$.

Так как z и t имеют только по одной смежной вершине вне множества H, они должны иметь хотя бы по два соседа в множестве H. Тогда двух независимых ребер в $\{y, x\}$ может не быть, только если z и t смежны друг с другом и смежны с одной и той же вершиной в $\{y, x\}$. Будем считать, что они смежны с y. Тогда x тоже смежна с y в силу связности $G(H)$.

Из трехсвязности G получаем, что $f \neq g$.

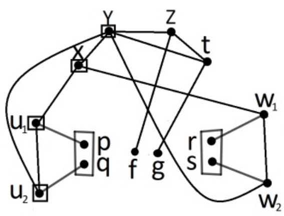


Рис. 90: *стягиваемая четверка* $\{u_1, u_2, x, y\}$

Четверка $H' = \{u_1, u_2, x, y\}$ стягиваема (см. Рис. 90). Окрестность этой четверки лежит в множестве $\{p, q, z, t, w_1, w_2\}$ (напомним, что по утверждению в заголовке 4.4.3 вершины x и y несмежны с $G - H - W_1 - W_2$). Вершины z, t, w_1, w_2 имеют степень 2 в $G - H'$, и $zt, w_1w_2 \in E(G)$. Тогда по лемме 6, если z или t входят в какой-то путь, то это только путь zt, аналогично с w_1 и w_2.

Предположим, что p или q входят в путь для H'. Тогда это может быть только путь pq. По лемме 4 шестерка $\{p, q, u_1, u_2, x, y\}$ стягиваема, а тогда стягиваема пятерка $\{p, q, u_1, u_2, x\}$.

То есть, zt и w_1w_2 — пути для четверки H'. При этом в четверке $\{u_1, u_2, x, y\}$ вершина y смежна с обеими вершинами пути zt, но смежна только с одной вершиной пути w_1w_2. Такие четверки рассмотрены в разделе 4.4.1. По замечанию 5 четверка H' не является подозрительной четверкой. Значит, в G есть стягиваемая пятерка.

4.4.3.2 Только одна вершина H смежна с $G - H - W_1 - W_2$.

Пусть это вершина z. По утверждению 4 вершина z смежна ровно с одной вершиной $G - H - W_1 - W_2$. Более того, z несмежна с $W_1 \cup W_2$. Следовательно, в H есть хотя бы две вершины, смежные с W_1, причем хотя бы одна из них смежна к тому же и с W_2. Пусть x смежна с u_1 и w_1, а y смежна с u_2.

Случай 1. *Вершина t несмежна с $W_1 \cup W_2$.*

Тогда w_2 смежна с y. Таким образом, вершины x и y стали равноправны. Вершина z смежна хотя бы с одной из вершин x, y, пусть z смежна с y. Вершина t должна быть смежна хотя бы с тремя вершинами, это могут быть только x, y, z.

Четверка $W_2 \cup \{x, t\}$ стягиваема (см. Рис. 91). Ее окрестность содержится в множестве $\{y, z, u_1, r, s\}$. В этой окрестности должны найтись два пути, удовлетворяющие лемме 6.

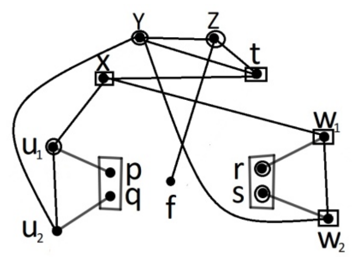


Рис. 91: *четверка $W_2 \cup \{x, t\}$ и ее окрестность*

Хотя бы одна из вершин y, z должна войти в эти пути, так как из оставшихся трех вершин нельзя составить два пути. Но y и z имеют степень 2 в $G - W_2 - \{x, t\}$ и смежны, поэтому могут входить в путь только друг с другом. Следовательно, одним из путей будет ребро yz.

Второй путь состоит из двух вершин множества $\{u_1, r, s\}$. Тогда вершины этого пути в объединении с $W_2 \cup \{x, t\}$ дадут стягиваемую шестерку. А значит, вершины этого пути в объединении с $W_2 \cup \{x\}$ дадут стягиваемую пятерку (так как t смежна с y и z).

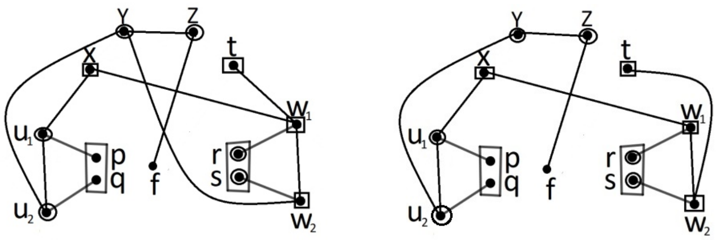
Случай 2. *Вершина t смежна с W_1 или W_2.*

Здесь возможны две ситуации:

1) y смежна с w_2. Тогда W_1 и W_2 равноправны, x и y равноправны, поэтому можно считать, что t смежна с w_1. Кроме того, z смежна с $\{x, y\}$, можно считать, что z смежна с y.

2) y несмежна с w_2, тогда w_2 смежна с t. В этом случае y и t равноправны, z смежна с одной из них, поэтому можно считать, что z смежна с y.

В любой из ситуаций четверка $W_2 \cup \{x, t\}$ стягиваема (см. Рис. 92). Ее окрестность содержится в множестве $\{y, z, u_1, u_2, r, s\}$. В этой окрестности должны найтись два пути, удовлетворяющие лемме 6.



(a) (b)

Рис. 92: *Стягиваемая четверка $W_2 \cup \{x, t\}$ в двух возможных ситуациях*

Вершина u_2 не может входить в такой путь, так как имеет степень хотя бы 3 в $G - W_2 - \{x, t\}$.

Одним из путей будет ребро yz, так как опять же одна из вершин y, z должна входить в путь, но входить она может только вместе со второй.

Второй путь состоит из двух вершин множества $\{u_1, r, s\}$. Предположим, что это rs. Тогда $d_{G-H}(r) = d_{G-H}(s) = 3$, $rs \in E(G)$, то есть по лемме 13 $\{p, q\} \cap \{r, s\} = \varnothing$. Кроме того, по лемме 8 граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен. Пятерка $\{u_2, y, z, t, w_2\}$ нестягиваема, значит она несвязна. Это возможно только если t несмежна с множеством $\{u_2, y, z\}$, так как множество $\{u_2, y, z\}$ связно и w_2 смежна с $\{y, t\}$. Но $d_G(t) \geqslant 3$, в W_2 вершина t имеет только одну смежную, поэтому t смежна с x и u_1. По теореме 4 две из трех вершин x, t, u_1 должны иметь степень 3 в G. Это могут быть только x и t. Но тогда $\{x, t\}$ несмежно с $\{y, z\}$, что противоречит связности $G(H)$.

Значит, путями будут yz и u_1r или u_1s. Это возможно только если $p \in \{r, s\}$ и $d_G(p) = 3$. По лемме 4 шестерка $S = W_2 \cup \{x, t, u_1, p\}$ стягиваема (см. рис. 93). Это возможно только если $f \notin \{p, q\}$, так как иначе вершина q будет отделять множество $\{u_2, y, z\}$ от остальных вершин графа $G - S$, что противоречит его двусвязности.

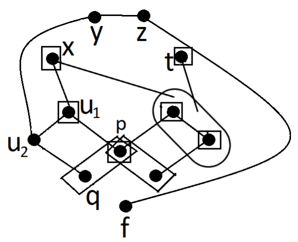


Рис. 93: *стягиваемая шестерка* S

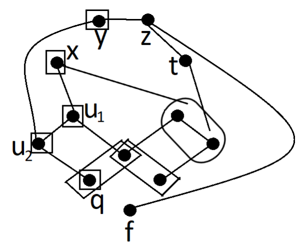


Рис. 94: *стягиваемая пятерка* $\{q, u_1, u_2, x, y\}$

Подслучай 2.1. *Вершины* z *и* t *смежны.*

Мы доказали, что $p \in \{r, s\}$ и $d_G(p) = 3$, поэтому по лемме 13 граф $G - H$ имеет ровно три части, и та из них, которая не крайняя, является 3-блоком. Обозначим через A некрайнюю часть $G - H$. Граф $(G - H)'(A)$ трехсвязен. Следовательно, граф $(G - H)'(A) - q$ двусвязен. Заменим в этом графе ребро rs на путь rw_1w_2s, граф останется двусвязным. Итак, мы доказали, что граф $G - H - W_1 - q$ двусвязен. Если теперь к этому граф добавить путь $fztw_2$ (или $fztw_1$), то он останется двусвязным, так как $f \notin W_2$. Наконец, заметим, что пятерка $\{q, u_1, u_2, x, y\}$ связна, поэтому, в силу всего вышеизложенного, она стягиваема (см. рис. 94).

Подслучай 2.2. *Вершины z и t несмежны.*

Тогда z смежна с x, так как z смежна ровно в одной вершиной $G - H$, но должна иметь степень не менее 3.

Предположим, что вершина y смежна с x. Вспомним, что четверка $W_2 \cup \{x, t\}$ стягиваема и путями для нее являются yz и u_1p. Вершина x смежна с y, z, u_1 и несмежна с p (по формулировке раздела 4.4.3). Четверка $W_2 \cup \{x, t\}$ не является подозрительной, потому что вершина x смежна с двумя вершинами одного пути и только одной второго, а такой вершины нет ни в одной подозрительной четверке. Следовательно, в G есть стягиваемая пятерка.

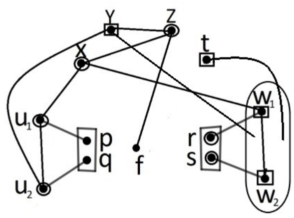


Рис. 95: *четверка $\{y, t, w_1, w_2\}$ и ее окрестность*

Следовательно, y несмежна с x и смежна с t или W_2. Тогда четверка $\{y, t, w_1, w_2\}$ стягиваема (см. Рис. 95). Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{r, s, z, x, u_1, u_2\}$.

Вершина u_1 не может входить в пути для этой четверки, так как имеет степень не менее 3 в $G - \{y, t, w_1, w_2\}$. Тогда и вершина u_2 не входит в пути для этой четверки, так как $q \neq r$, $q \neq s$ (по лемме 12 $\{p, r\} \neq \{r, s\}$, а $p \in \{r, s\}$).

Значит, путями являются ребра xz и rs (x несмежна с $\{r, s\}$, поэтому в одном пути с z). Тогда стягиваема шестерка $\{y, t, w_1, w_2, r, s\}$. Откуда следует, что стягиваема пятерка $\{t, w_1, w_2, r, s\}$.

4.4.3.3 Ни одна вершина H не смежна с $G - H - W_1 - W_2$.

Разберем несколько случаев.

Случай 1. *В H нашлись две смежные вершины, которые смежны с разными вершинами одного пути W_i.*

Пусть это вершины x и y, вершина x смежна с u_2, вершина y смежна с u_1.

Подслучай 1.1. *Четверка $\{z, t, w_1, w_2\}$ стягиваема.*

Тогда хотя бы одна из вершин z, t смежна с W_2. Можно считать, что t смежна с w_1.

Окрестность четверки $\{z, t, w_1, w_2\}$ содержится в множестве $\{x, y, r, s, u_1, u_2\}$ (см. Рис. 96). Но вершины u_1 и u_2 имеют степень хотя бы 3 в графе $G - \{z, t, w_1, w_2\}$, поэтому не могут входить в пути для этой четверки. Следовательно, путями являются xy и rs (x и y смежны, поэтому по лемме 6 входят в один путь). Таким образом, $rs \in E(G)$ и степени r и s в $G - H$ равны 3, а значит, по лемме 13 $\{p, q\} \cap \{r, s\} = \varnothing$.

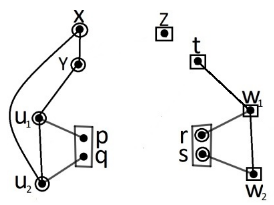


Рис. 96: *стягиваемая четверка $\{z, t, w_1, w_2\}$ и ее окрестность.*

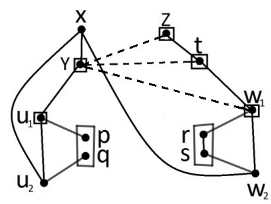


Рис. 97: *пятерка $\{u_1, y, z, t, w_1\}$.*

По лемме 4 шестерка $\{z, t, w_1, w_2, r, s\}$ стягиваема. Тогда, если z смежна хотя бы с двумя вершинами множества $\{x, y\} \cup W_1$, то пятерка $\{t, w_1, w_2, r, s\}$ стягиваема, так как она связна, и граф $G - \{t, w_1, w_2, r, s\}$ получается из двусвязного графа $G - \{z, t, w_1, w_2, r, s\}$ добавлением вершины z, смежной хотя бы с двумя его вершинами. Следовательно, z смежна не более чем с одной вершиной множества $\{x, y\} \cup W_1$, а тогда z смежна с t и W_2. Аналогично получаем, что t смежна не более чем с одной вершиной множества $\{x, y\} \cup W_1$.

`Предположим, что` w_2 `смежна с` $\{x, y\}$.

Не умаляя общности, w_2 смежна с x. Тогда вершина y несмежна с w_2, иначе образуется треугольник xyw_2, в котором по теореме 4 должно быть две вершины степени 3. Это могут быть только x и y. Но если $d_G(x) = d_G(y) = 3$, то множество $\{x, y\}$ несмежно с множеством $\{z, t\}$, что противоречит связности графа $G(H)$.

Вершина y смежна хотя бы с 3 вершинами в G, поэтому y смежна с множеством $\{z, t, w_1\}$ (y несмежна с u_2, так как смежна с u_1). В графе G есть ребро rs, поэтому по замечанию 4 граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен. Пятерка $\{u_1, y, z, t, w_1\}$ стягиваема, так как $q \neq s$ (см. Рис. 97, в 3 абзаце текущего подслучая мы доказали, что z и t смежны).

`Следовательно,` w_2 `несмежна с` $\{x, y\}$.

Вершина t несмежна с w_2, так как t смежна с w_1. Тогда вершина z смежна с w_2. Итак, мы доказали, что вершины z и t смежны друг с другом и смежны с разными вершинами пути W_2. Следовательно, четверка $W_1 \cup \{x, y\}$ стягиваема. Теперь аналогично можно доказать, что w_1 несмежна с $\{x, y\}$. А поменяв местами $\{x, y\}$ с $\{z, t\}$ и W_1 с W_2, мы получим, что $\{z, t\}$ несмежно с W_1, в графе G есть ребро pq. Кроме того, $d_G(p) = d_G(q) = d_G(s) = d_G(r) = 3$, так как они входят в пути для четверок $\{u_1, u_2, x, y\}$ и $\{w_1, w_2, z, t\}$.

В предыдущем абзаце мы доказали, что $\{z, t\}$ несмежно с W_1. Но $d_G(z)$, $d_G(t) \geqslant 3$, каждая из вершин z, t смежна с множеством $\{x, y\}$. Причем, как мы уже доказали (третий абзац подслучая 1.1), z и t имеют не более чем по одной смежной в этом множестве. Аналогично, каждая из вершин x, y смежна с множеством $\{z, t\}$. Таким образом, можно считать, что $G(H)$ —

это цикл $xytz$ (см. рис 98).

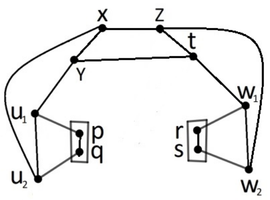


Рис. 98: *граф* $G(H)$ *в данном случае*

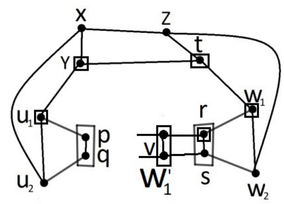


Рис. 99: *стягиваемая пятерка* $\{u_1, y, t, w_1, r\}$

Мы уже доказали, что стягиваема шестерка $\{z, t, w_1, w_2, r, s\}$, а тогда стягиваема четверка $\{w_1, w_2, r, s\}$. Окрестность этой четверки состоит из вершин z, t и окрестности $\{r, s\}$ в графе $G - H - W_2$. Так как z и t смежны, по лемме 6 они могут входить в путь только вместе. Следовательно, в окрестности $\{r, s\}$ лежит один из путей для этой четверки. Назовем этот путь W_1' ($|W_1'| = 2$, так как $d_G(r) = d_G(s) = 3$). Граф $G - H - W_2$ двусвязен и его дерево разбиения получается из $\mathrm{BT}(G - H)$ удалением вершин, соответствующих одиночному множеству $\{r, s\}$ и части $W_2 \cup \{r, s\}$.

Шестерка $S = H \cup W_2$ — нерасширяемая, так как при удалении из графа $G - S$ любой вершины из окрестности S, появляется вершина степени 1. Крайними частями $G - S$ точно являются $W_1 \cup \{p, q\}$ и $W_1' \cup \{r, s\}$. Так как $v(G) \geqslant 13$, $v(G - S) \geqslant 7$, поэтому в $\mathrm{Part}(G - S)$ должна быть ещё хотя бы одна часть. Но ещё одной крайней части в $G - S$ быть не может, так как множество S смежно только с $W_1 \cup \{r, s\}$. Следовательно, $\{p, q\} \neq W_1'$. Не умаляя общности можно считать, что $q \notin W_1'$. По лемме 8 для графа $G - S$ граф $G - S - W_1 - \{r, s\}$ двусвязен (в нем больше двух вершин, так как $v(G) \geqslant 13$). Тогда пятерка $Q = \{u_1, y, t, w_1, r\}$ стягиваема (см.рис 99). Действительно, она связна и граф $G - Q$ двусвязен, так как получается добавлением к двусвязному графу $G - S - W_1 - \{r, s\}$ пути qu_2xzw_2sv, где $v \neq q$ — сосед s из W_1'.

Следовательно, четверка $\{z, t, w_1, w_2\}$ нестягиваема. Это возможно только если граф $G(\{z, t, w_1, w_2\})$ несвязен (см. Рис. 100).

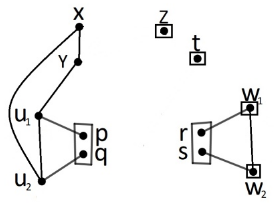


Рис. 100: *четверка* $\{z, t, w_1, w_2\}$

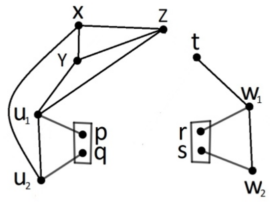


Рис. 101: *соседи вершины* z

Подслучай 1.2. *Четверка* $\{z, t, w_1, w_2\}$ *нестягиваема, но одна из вершин множества* $\{z, t\}$ *смежна с* W_2.

Пусть вершина t смежна с w_1. Тогда z несмежна с множеством $\{t\} \cup W_2$. При этом $d_G(z) \geqslant 3$ и z смежна не более чем с одной вершиной W_1. Значит, z смежна с x, y и ровно одной вершиной W_1. Не умаляя общности, z смежна с u_1 (см. Рис. 101).

Вершины u_1, y, z образуют треугольник, следовательно, по теореме 4 две из них должны иметь степень 3 в G. Очевидно, это могут быть только вершины y и z. Но тогда $\{x, u_1\}$ отделяет $\{y, z\}$ от остальных вершин графа G, что противоречит его трехсвязности.

Подслучай 1.3. *Четверка* $\{z, t, w_1, w_2\}$ *нестягиваема, и ни одна из вершин множества* $\{z, t\}$ *не смежна с* W_2.

Тогда с W_2 смежны только x и y. Можно считать, что y смежна с w_1, x смежна с w_2.

Повторяя рассуждения предыдущих подслучаев с заменой W_1 и W_2 местами, можно доказать, что $\{z, t\}$ несмежно с W_1. Но тогда множество $\{x, y\}$ отделяет $\{z, t\}$ от остальных вершин графа G, что противоречит трехсвязности G.

Далее считаем, что в H нет двух смежных вершин, которые смежны с разными вершинами одного из путей.

Случай 2. *В H есть две смежные вершины, которые смежны с одной и той же вершиной одного из путей.*

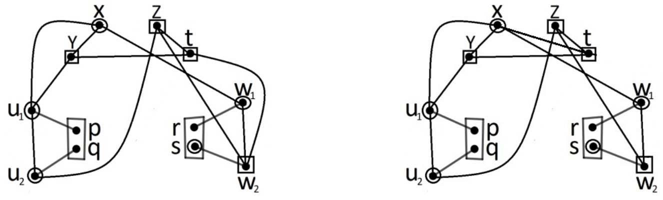
Пусть вершины x и y смежны с u_1. Вершины x, y, u_1 образуют треугольник, поэтому по теореме 4 две из них должны иметь степень 3 в G. Очевидно, это могут быть только x и y.

Напомним, что мы разбираем случай, когда две смежные вершины H не могут быть смежны с разными вершинами одного пути. Значит, не умаляя общности можно считать, что u_2 смежна с z. А тогда z несмежна с x и y (иначе опять две смежные вершины смежны с разными вершинами W_1). Но при этом $d_G(z) \geqslant 3$, поэтому z смежна с t и одной из вершин W_2, пусть с w_2.

Так как t смежна с z, t несмежна с w_1. Вершина w_1 должна быть смежна с H, но несмежна с z и t. Не умаляя общности можно считать, что w_1 смежна с x.

Заметим, что t несмежна с u_1, так как t смежна с z. И t несмежна с u_2, так как t смежна с $\{x, y\}$ в силу связности $G(H)$. Следовательно, или t смежна с w_2, несмежна с x и смежна с y, или t несмежна с w_2, но смежна с x и y.

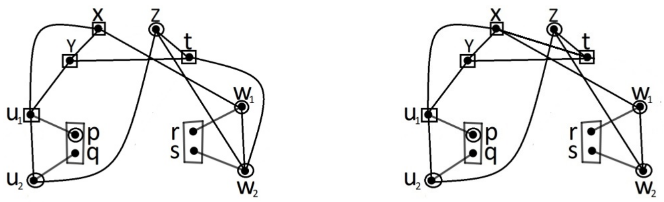
В любом случае четверки $\{w_2, z, t, y\}$ и $\{u_1, t, x, y\}$ будут связны и стягиваемы.



(a) (b)

Рис. 102: *четверка* $\{w_2, z, t, y\}$ *и ее окрестность.*

Четверка $\{w_2, z, t, y\}$ стягиваема (см. Рис. 102). Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{u_1, u_2, x, w_1, s\}$. Вершина u_1 имеет степень 3 в графе $G - \{w_2, z, t, y\}$, поэтому не может входить в пути для этой четверки. Следовательно, путями являются xw_1 и u_2s (x и w_1 смежны, поэтому по лемме 6 должны быть в одном пути). Это возможно, только если $q = s$.



(a) (b)

Рис. 103: *четверка* $\{u_1, t, x, y\}$ *и ее окрестность*

Четверка $\{u_1, t, x, y\}$ стягиваема (см. Рис. 103). Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{w_1, w_2, z, u_2, p\}$. Вершина w_2 имеет степень 3 в графе $G - \{u_1, t, x, y\}$, поэтому не может входить в пути для этой четверки. Следовательно, путями являются zu_2 и w_1p (z и u_2 смежны, поэтому по лемме 6 должны быть в одном пути). Это возможно, только если $p = r$.

Но так как по лемме 12 $\{p, q\} \neq \{r, s\}$, одна из четверок выше будет расширяема.

`Далее считаем, что никакие две смежные вершины` H `не могут быть смежны с вершинами одного и того же пути.`

Замечание 7. В дальнейших рассуждениях мы будем пользоваться тем, что разделяющее двувершинное множество является одиночным, тогда и только тогда, когда его нельзя разделить никаким двувершинным множеством. Это следует из написанного после определения 3.

Случай 3. *Одна из вершин* H *смежна с вершинами обоих путей.*

Пусть вершина x смежна с u_1 и w_1. Тогда x может быть смежна в $G(H)$ только с вершинами, которые несмежны ни с одним из путей. Пусть z — такая вершина. Тогда $d_G(z) = 3$, z смежна с x, y, t.

Заметим, что если еще какая-то вершина H несмежна с $G - H$, то эта вершина и z отделяются двумя оставшимися вершинами H от $G - H$, что противоречит трехсвязности G. Следовательно, вершины y и t смежны с $W_1 \cup W_2$, а тогда они несмежны с x.

Подслучай 3.1. $p \neq r$.

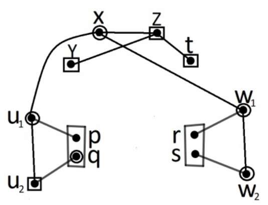


Рис. 104: *четверка* $\{u_2, y, z, t\}$ *и ее окрестность*

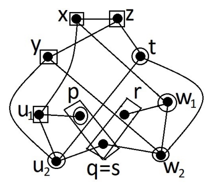


Рис. 105: *стягиваемая четверка* $\{u_1, x, y, z\}$

Четверка $\{u_2, y, z, t\}$ связна, а значит, стягиваема (см. Рис. 104). Окрестность этой четверки содержится в множестве $\{w_1, w_2, x, u_1, q\}$. Вершина w_1 имеет степень 3 в графе $G - \{u_2, y, z, t\}$, поэтому не может входить в пути для этой четверки. Следовательно, путями являются xu_1 и qw_2 (x и u_1 смежны, поэтому по лемме 6 должны быть в одном пути). Это возможно, только если $q = s$ и $d_G(q) = 3$ (так как в графе $G - \{u_2, y, z, t\}$ вершина q должна иметь степень 2, и q несмежна с H по заголовку раздела 4.4.3.3).

Заметим, что четверка $\{u_2, y, z, t\}$ не является подозрительной, так как в ее окрестности лежит не более пяти вершин, а по замечанию 5 в окрестности подозрительной четверки не менее 6 вершин. Следовательно, это четверка, в которой никакие две соседние вершины не смежны с одним и тем же путем. Вершина z смежна с путем xu_1 и смежна с y и t, поэтому y и t несмежны с u_1. Аналогично, рассматривая четверку $\{w_2, y, z, t\}$, можно получить, что y и t несмежны с w_1.

Предположим, что одна из вершин y, t, например, y, смежна с обоими путями. Тогда y обязательно смежна с u_2 и w_2 (в предыдущем абзаце мы доказали, что y и t несмежны с u_1 и w_1). Во втором абзаце случая 3 мы доказали, что t смежна с $W_1 \cup W_2$, а тогда t несмежна с x и y (так как смежные вершины H несмежны с одним и тем же путем). Но $d_G(t) \geqslant 3$, и мы рассматриваем случай, когда вершины H несмежны с $G - H - W_1 - W_2$ и несмежны с двумя вершинами одного пути. Следовательно, t смежна с одной вершиной W_1 и одной вершиной W_2. В предыдущем абзаце мы доказали, что t несмежна с u_1 и w_1. Значит, t смежна с u_2 и w_2. Рассмотрим четверку $\{u_1, x, y, z\}$ (см. Рис. 105). Она стягиваема, её окрестность содержится в множестве $\{u_2, p, t, w_1, w_2\}$. Вершина w_2 имеет степень 3 в $G - \{u_1, x, y, z\}$, поэтому не может входить в пути для этой четверки. Единственный способ составить два пути из остальных вершин — это u_2t и pw_1 (u_2 и t смежны, поэтому по лемме 6 должны быть в одном пути). Но чтобы был возможен путь pw_1, вершина p должна совпадать с r, что не так по формулировке рассматриваемого нами случая.

Значит, каждая из вершин y, t смежна ровно с одной вершиной $W_1 \cup W_2$. Можно считать, что y смежна с u_2, t смежна с w_2 (так как иначе с одной из этих вершин несмежна ни одна вершина H). Кроме того, $d_G(y) \geqslant 3$, поэтому y должна быть смежна с t (мы рассматриваем случай, когда ни одна вершина H несмежна с $G - H - W_1 - W_2$).

Напомним, что в первом абзаце текущего подслучая мы доказали, что $q = s$ и $d_G(q) = 3$. Следовательно, по лемме 13 в графе $G - H$ ровно три части и единственная некрайняя из них (назовем её A) является 3-блоком. Граф $(G-H)'(A)$ трехсвязен. Тогда граф $(G-H)'(A)-r$ двусвязен, и если мы в этом графе заменим ребро pq на путь pu_1u_2q, то получим, что граф тоже $G - H - W_2 - r$ двусвязен. Наконец, к этому графу можно добавить путь u_2yzxu_1 и получить, что граф $G - \{w_1, w_2, t, r\}$ двусвязен, то есть четверка $H' = \{w_1, w_2, t, r\}$ стягиваема (см. рис 106). Заметим, что в графе $G - H'$ множество $\{u_1, u_2\}$ разделяющее, так как отделяет $\{x, y, z\}$ от остальных вершин). Кроме того, оно одиночное по замечанию 7, так как u_1 и u_2 смежны, а значит, их нельзя разделить никаким двувершинным множеством. Вершины x, y, z имеют степень 2 в графе $G - H'$, поэтому не могут входить в одиночные множества по лемме 3. Следовательно, для четверки H' множество $\{u_1, u_2, x, y, z\}$ является крайней частью, так как отделяется одиночным множеством $\{u_1, u_2\}$ и не содержит других одиночных множеств. Значит, один из путей из леммы 6 состоит из трёх вершин — это путь xzy. Такой случай уже разобран, а значит, в графе G есть стягиваемая пятерка.

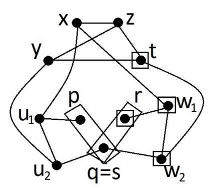


Рис. 106: *стягиваемая четверка* $\{w_1, w_2, t, r\}$

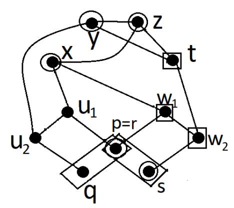


Рис. 107: *тройка* $\{t, w_1, w_2\}$ *и ее окрестность*

Подслучай 3.2. $p = r$.

Так как $\{p, q\} \neq \{r, s\}$ по лемме 12, $q \neq s$. Пусть, не умаляя общности, u_2 смежна с y. Если y смежна с w_1 или w_2, то можно повторить рассуждения предыдущего подслучая, поменяв x и y местами ($q \neq r$, $q \neq s$). Следовательно, t смежна с w_2 (иначе w_2 несмежна с H), и, аналогично предыдущему предложению, t несмежна с W_1. Кроме того, y и t имеют в W_1 и W_2 ровно по одному соседу соответственно и не имеют соседей в $G - H - W_1 - W_2$, так как эти случаи мы разобрали в предыдущих разделах. Но $d_G(y) \geqslant 3$, значит, y и t смежны. Рассмотрим тройку $T = \{w_1, w_2, t\}$

(см. Рис. 107). Она стягиваема. Окрестность этой тройки содержится в множестве $\{r, s, x, y, z\}$. Вершины x, y, z несмежны с $\{r, s\}$. Поэтому если тройка T нерасширяема, то rs является путем для неё. Но тогда $rs \in E(G)$ и $d_G(r) = 3$ (так как в $G - T$ вершина r должна иметь степень 2, чтобы входить в путь), что противоречит лемме 13. Значит, для T нет путей, удовлетворяющих лемме 6. То есть, тройка T расширяема. Она не может расширяться вершиной y, z или x, так как после их удаления из графа $G - T$, в графе остается вершина степени 1. Также она не может расширяться вершиной r, так как в графе $G - T - r$ есть точка сочленения u_2. Следовательно, четверка $T' = T \cup \{s\}$ стягиваема. В графе $G - T'$ множество множество $\{u_1, u_2\}$ разделяющее (так как отделяет $\{x, y, z\}$ от остальных вершин) и одиночное по замечанию 7 (так как u_1 и u_2 смежны, а значит, их нельзя разделить никаким другим множеством). Вершины x, y, z имеют степень 2 в графе $G - T'$, поэтому не могут входить в одиночные множества по лемме 3. Следовательно, для четверки T' множество $\{u_1, u_2, x, y, z\}$ является крайней частью, так как отделяется одиночным множеством $\{u_1, u_2\}$ и не содержит других одиночных множеств. Значит, один из путей из леммы 6 состоит из трёх вершин — это путь xzy. Такой случай уже разобран, а значит, в графе G есть стягиваемая пятерка.

`Таким образом, ни одна вершина` H `не смежна с двумя вершинами` $W_1 \cup W_2$`.`

Случай 4. *Ни одна вершина H не смежна с двумя вершинами $W_1 \cup W_2$.*

Тогда можно считать, что x смежна в $G - H$ только с u_2, y — только с u_1, одна из вершин z и t смежна только с w_1, а вторая — только с w_2. При этом x и y несмежны, так как они смежны с W_1, z и t несмежны, так как они смежны с W_2. Так как $z \in H_1$, в графе $G - W_2$ от z должно быть два пути к W_1, не пересекающихся по внутренним вершинам. Мы рассматриваем случай, когда вершины H несмежны с $G - H - W_1$, z несмежна с W_1 и t, так как она смежна с W_2. Следовательно, z должна быть смежна и с x, и с y. Аналогично, t смежна и с x, и с y. Итого, в графе $G(H)$ есть ребра xz, yz, xt, yt, а ребер xy и zt нет.

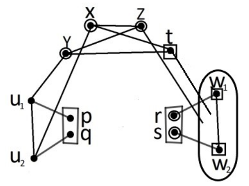


Рис. 108: *тройка* $\{w_1, w_2, t\}$ *и ее окрестность*

Рассмотрим тройку $T = \{w_1, w_2, t\}$ (см.рис. 108). Она стягиваема, $N_G(T) = \{x, y, z, r, s\}$.

Подслучай 4.1. *Тройка T нерасширяема.*

Очевидно, $G - T$ не является простым циклом. Значит, в окрестности T должно найтись два пути, удовлетворяющих лемме 6. Вершины x, y, z несмежны с $\{r, s\}$, следовательно rs является путем для T (так как из вершин множества $\{x, y, z\}$ нельзя составить два пути из хотя бы двух вершин). Следовательно, $\{r, s\}$ — множество внутренних вершин крайней части-цикла и по лемме 4 пятерка $T \cup \{r, s\}$ стягиваема.

Подслучай 4.2. *Тройка T расширяема.*

Она не может расширяться вершиной y, z или x, так как после их удаления из графа $G - T$, в графе остается вершина степени 1. Следовательно, T расширяется вершиной r или s. Пусть, не умаляя общности, она расширяется вершиной s, то есть четверка $T' = T \cup \{s\}$ стягиваема. В графе $G - T'$ множество множество $\{u_1, u_2\}$ разделяющее (так как отделяет $\{x, y, z\}$ от остальных вершин) и одиночное по замечанию 7 (так как u_1 и u_2 смежны, а значит, их нельзя разделить никаким двувершинным множеством). Вершины x, y, z имеют степень 2 в графе $G - T'$, поэтому не могут входить в одиночные множества по лемме 3. Следовательно, для четверки T' множество $\{u_1, u_2, x, y, z\}$ является крайней частью, так как отделяется одиночным множеством $\{u_1, u_2\}$ и не содержит других одиночных множеств. Значит, один из путей из леммы 6 состоит из трёх вершин — это путь xzy. Такой случай уже разобран, а значит, в графе G есть стягиваемая пятерка.

Таким образом, мы доказали, что если в графе G нет стягиваемой пятерки, то любая его стягиваемая четверка имеет вид второй, третьей, четвертой или пятой подозрительной четверки.

Глава 5

Разбор подозрительных четверок

Лемма 15. *Пусть G — трехсвязный граф и H — стягиваемое множество в G такое, что граф $G-H$ не является простым циклом. Тогда для любой вершины $x \in \mathrm{N}_G(H)$ существует множество $U \subset \mathrm{N}_G(H) \setminus \{x\}$ такое, что множество $H \cup U$ стягиваемо. Причем, если $|U| > 1$, то $(G-H)(U)$ будет являться простым путем.*

Доказательство. Если граф $G - H$ — трехсвязный, то множество H можно расширить любой вершиной из его окрестности. Заметим, что $\mathrm{N}_G(H) \neq \{x\}$, так как иначе вершина x отделяла бы H от остальных вершин графа G, что противоречит трехсвязности G. Следовательно, в этом случае такое множество U существует.

Значит, граф $G - H$ не трёхсвязный, но двусвязный. Так как $G - H$ не является простым циклом, дерево разбиения $\mathrm{BT}(G - H)$ имеет более двух вершин, все его висячие вершины соответствуют крайним частям (и таких частей хотя бы две). Рассмотрим крайнюю часть A, во внутренности которой не содержится вершина x (очевидно, хотя бы одна такая крайняя часть есть).

Предположим, что часть A — 3-блок. Тогда существует вершина $v \in \mathrm{Int}(A)$ такая, что v смежна с H, иначе $\mathrm{Bound}(A)$ отделяет A от остальных вершин графа G, что противоречит его трехсвязности. Так как A — 3-блок, граф $G-H-v$ двусвязен, следовательно, множество $H\cup\{v\}$ стягиваемо.

Значит, A — часть-цикл. Тогда $\mathrm{Int}(A)\subset N_G(H)$ и граф $G-H-\mathrm{Int}(A)$ двусвязен. Следовательно, $U=\mathrm{Int}(A)$ удовлетворяет условиям леммы.

□

5.1 Пятая подозрительная четверка.

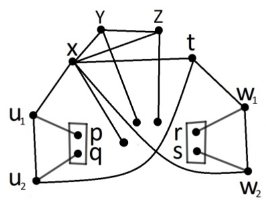


Рис. 109: *пятая подозрительная четверка. Вершины y, z и t имеют степень 3 в G, вершина x может быть смежна еще с какими-то вершинами $G-H-W_1-W_2$. Соседи y и z в $G-W_1-W_2$ различны, но могут совпадать с соседом x.*

Тройка $H'=\{t\}\cup W_2$ стягиваема, окрестность этой тройки содержится в множестве $\{x,u_2,r,s\}$.

Граф $G-H'$ не является простым циклом, например, потому что $d_{G-H'}(x)$ $\geqslant 4$. По лемме 15 тройку H' можно расширить каким-то подмножеством $U\subset \mathrm{N}_G(H')\setminus\{x\}=\{u_2,r,s\}$.

Если $|U|=1$, то $H'\cup U$ — стягиваемая четверка. Граф $G(H'\cup U)$ не содержит циклов, а в индуцированных подграфах на всех подозрительных четверках циклы есть. Следовательно, четверка $H'\cup U$ — неподозрительная, и в G есть стягиваемая пятерка. Если $|U|=2$, то пятерка $H'\cup U$ стягиваема. Значит, $U=\{u_2,r,s\}$, и $(G-H')(U)$ — простой путь. Заметим, что вершина u_2 не может быть средней вершиной в этом пути, так как она смежна в $G-H'$ только с u_1 и q, но $u_1\notin U$. Значит, $rs\in E(G)$.

По лемме 8 граф $G - H - W_1 - W_2$ двусвязен, а тогда пятерка $W_1 \cup W_2 \cup \{t\}$ стягиваема. Действительно, эта пятерка связна, а граф $G-(W_1 \cup W_2 \cup \{t\})$ получается из двусвязного графа $G - H - W_1 - W_2$ сначала добавлением вершин y и z, смежных друг с другом и с разными вершинами $G - H - W_1 - W_2$, а затем добавлением вершины x, смежной с y и z.

Таким образом, мы доказали, что если в графе G есть пятая подозрительная четверка, то в графе G есть стягиваемая пятерка. То есть пятая четверка больше не является подозрительной.

5.2 Третья подозрительная четверка.

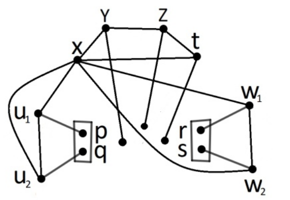


Рис. 110: *третья подозрительная четверка. Вершины y, z и t имеют степень 3 в G, их соседи в $G-H$ могут совпадать, но не все три сразу, вершина x может быть смежна еще с какими-то вершинами $G - H - W_1 - W_2$.*

Соседи одной из пар вершин y, z или z, t в $G-H$ обязательно различны. Пусть, не умаляя общности, они различны у пары z, t. Четверка $H' = W_1 \cup \{x, y\}$ стягиваема. В третьей и четвертой подозрительных четверках есть цикл длины 4, а в графе $G(H')$ — нет, поэтому H' может быть только второй подозрительной четверкой (см. Рис. 112). Но в этом случае, так как в графе $G(H')$ степень 1 имеет вершина y, именно y должна быть смежна со всеми вершинами путей для H'. Но $d_G(y) = 3$, поэтому H' не может быть и второй подозрительной четверкой. Следовательно, в графе G найдется стягиваемая пятерка.

Таким образом, мы доказали, что третья четверка не является подозрительной.

5.3 Четвертая подозрительная четверка.

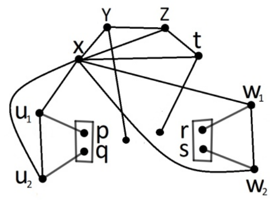


Рис. 111: *четвертая подозрительная четверка. Вершины y, z и t имеют степень 3 в G, вершина x может быть смежна еще с какими-то вершинами $G - H - W_1 - W_2$. Соседи y и t в $G - H - W_1 - W_2$ различны.*

Тройка $H' = \{y, z, t\}$ стягиваема и граф $G - H'$ — не простой цикл, так как $d_{G-H'}(x) \geqslant 4$. Значит, по лемме 15 тройку H' можно расширить подмножеством $U \subset \mathrm{N}_G(H') \setminus \{x\}$. Если $|U| = 1$, то четверка $H' \cup U$ — стягиваемая. Она не будет подозрительной, так как мы расширяем соседом вершины y или вершины t в графе $G - H$, и эти соседи различны, поэтому индуцированный подграф на данной четверке не будет содержать циклов. Значит, в G будет стягиваемая пятерка. Если же $|U| > 1$, то $|U| = 2$ (так как $|\mathrm{N}_G(H') \setminus \{x\}| = 2$) и пятерка $H' \cup U$ стягиваема.

5.4 Вторая подозрительная четверка.

Четверка $H' = \{x, y\} \cup W_1$ стягиваема, поэтому должна быть второй подозрительной четверкой. При этом степень 1 в графе $G(H')$ имеет вершина y, то есть только y может быть смежна с внутренностями крайних частей графа $G - H'$.

Случай 1. *Множество $\{r, s\}$ — одиночное в $G - H'$.*

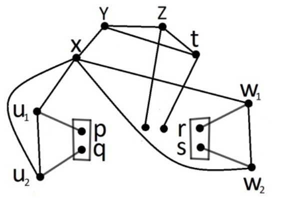


Рис. 112: *вторая подозрительная четверка. Вершины z и t имеют степень 3 в G, вершины x и y могут быть смежны еще с какими-то вершинами $G - H - W_1 - W_2$. Соседи z и t в $G - W_1 - W_2$ различны.*

Вершины w_1 и w_2 имеют степень 2 в $G - H'$, а значит, по лемме 3 не могут входить в одиночные множества. Следовательно, множество $\{r, s, w_1, w_2\}$ является крайней частью $G - H'$, так как отделяется одиночным множеством $\{r, s\}$, и не содержит других одиночных множеств. Внутренностью этой крайней части является множество $\{w_1, w_2\}$. Но вершина x не может быть смежна с внутренностью крайней части $G - H'$ (это было доказано в предыдущем абзаце).

Случай 2. *Множество $\{r, s\}$ не является одиночным в $G - H'$.*

Если множество $\{r, s\}$ не является одиночным в $G - H'$, то, по замечанию 7, существует вершина v, разделяющая r и s в графе $G - H' - W_2$ (иначе между r и s существовало бы три пути, не пересекающихся по внутренним вершинам, а тогда их нельзя бы было разделить никакой парой вершин). Обозначим за $U_1, \dots U_k$ компоненты связности графа $G - H' - W_2 - v$. Причем пусть $r \in U_1$, $s \in U_2$ (см. Рис. 113).

Так как множество $\{r, s\}$ — одиночное в $G - H$ (оно является границей крайней части, см. пункт 1 замечания 2 и пункт 2 определения 2), его нельзя разделить никакими двумя вершинами. Следовательно, в $G - H$ существуют три независимых пути от r до s (то есть пути, не имеющие общих внутренних вершин). А тогда существуют хотя бы два независимых пути от r до s в графе $G - H - W_2$. В графе $G - H - W_1 - W_2$ вершина v

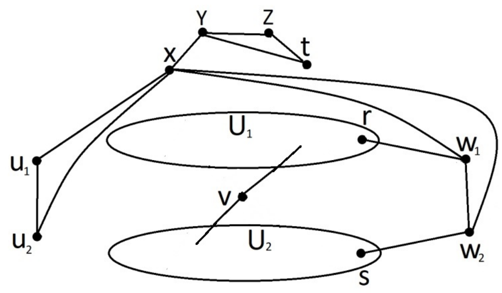


Рис. 113: *компоненты связности графа* $G - H' - W_1 - v$.

разделяет r и s (так как этот граф содержится в $G - H' - W_2$), поэтому два независимых пути в этом графе не провести. Значит, один из путей проходит через W_1, а значит, содержит участок pu_1u_2q. Следовательно, не умаляя общности, $p \in U_1$, $q \in U_2$. Второй путь между r и s должен проходить через v, так как должен перейти из U_1 в U_2, не проходя при этом по W_1. Мы получили, что в графе $G(U_1 \cup \{v\})$ есть два независимых пути pS_1r и vS_2r. В графе $G(U_2 \cup \{v\})$ есть путь qS_3v между вершинами q и v, потому что U_2 — компонента связности, отделяемая вершиной v в графе $G - H' - W_2$ и $q \in U_2$ (см. Рис. 114).

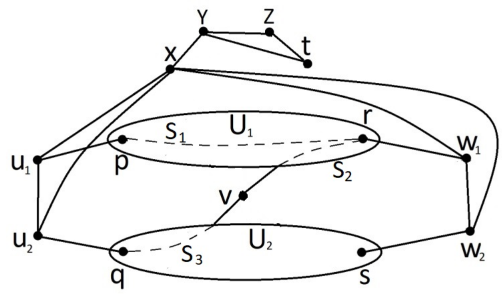


Рис. 114: *пути* pS_1r, vS_2r *и* qS_3v.

Далее заметим, что граф $G - \{s\}$ — двусвязный (так как G — трехсвязный), а множество $\{x, w_1\}$ — одиночное разделяющее в этом графе. Действительно, оно отделяет вершину w_2 от остальных вершин графа, а одиночное так как вершины x и w_1 смежны, поэтому не могут разделяться никаким множеством (см. замечание 7). Докажем, что $\{x, w_1, w_2\}$ — часть разбиения графа $G - \{s\}$. Степень вершины w_2 в графе $G - \{s\}$ равна 2, поэтому w_2 не может входить в одиночные множества графа $G - \{s\}$ (по пункту 2 леммы 3). Уже доказано, что множество $\{x, w_1\}$ не разделяется никаким одиночным множеством. И вершину w_2 нельзя отделить от $\{x, w_1\}$ никаким одиночным множеством, так как w_2 смежна с x и w_1. При этом множество $\{x, w_1, w_2\}$ отделяется от остального графа одиночным множеством $\{x, w_1\}$. Итак, мы проверили, что все условия определения 2 части разбиения выполнены. Очевидно, часть является крайней, так как содержит только одно одиночное множество (то есть её степень в $\mathrm{BT}(G-\{s\})$ равна 1). И, по пункту 2 определения 2, $\{w_2\}$ — внутренность крайней части $\{x, w_1, w_2\}$ двусвязного графа $G - \{s\}$. Следовательно, по лемме 5, граф $G - \{s, w_2\}$ — двусвязный.

В двусвязном графе $G-\{s, w_2\}$ между вершинами x и r есть три независимых пути: xw_1r, xu_1pS_1r и $xu_2qS_3vS_2r$. Следовательно, множество $\{x, r\}$ — одиночное в графе $G - \{s, w_2\}$, отделяющее w_1 от остальных вершин графа. Аналогично рассуждениям в предыдущем абзаце, $\{w_1\}$ — внутренность крайней части $\{x, r, w_1\}$ двусвязного графа $G-\{s, w_2\}$. Следовательно, граф $G - \{s, w_2, w_1\}$ двусвязен по лемме 5.

Итак, тройка $T = \{s, w_1, w_2\}$ стягиваема. Окрестность этой тройки содержится в множестве $\{r, x\}\cup(N_G(s)\setminus\{w_2\})$. Предположим, что эта тройка расширяема. Вершины из множества $\{r\} \cup (N_G(s) \setminus \{w_2\})$ имеют ровно по одному соседу в тройке (потому что в нашем случае ребра rs точно нет), поэтому если они расширяют тройку, то образуется четверка, не содержащая циклов, то есть не вторая подозрительная четверка, а, значит, в G найдется стягиваемая пятерка. То есть тройку должна расширять вершина x. В графе $G(\{s, w_1, w_2, x\})$ степень 1 имеет вершина s и смежна с s вершина w_2, а только такие две вершины второй подозрительной четверки могут иметь степень больше 3 в G. Но $d_G(x) > 3$, следовательно, четверка

$\{s, w_1, w_2, x\}$ не является подозрительной. А значит, в G есть стягиваемая пятерка.

Таким образом, тройка T стягиваема и нерасширяема. По пункту 2 леммы 4 в графе $G - T$ найдутся хотя бы две крайние части, причем эти части являются циклами длины хотя бы 4. Путь W_1' и W_2' — внутренности этих крайних частей. По пункту 1 леммы 4 каждая вершина $W_1' \cup W_2'$ смежна с T. По пункту 2 леммы 2 каждая вершина $W_1' \cup W_2'$ имеет степень 2 в графе $G - T$. Вершина x имеет степень хотя бы 3 в графе $G - T$, поэтому не может входить в $W_1' \cup W_2'$. То есть все вершины хотя бы одного из множеств W_1' и W_2' смежны с s и несмежны с множеством $\{w_1, w_2\}$. Пусть это множество — W_1' (см. Рис. 115).

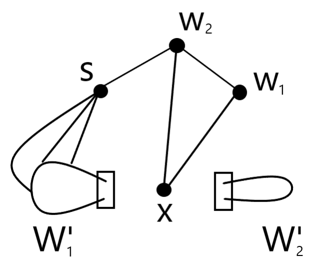


Рис. 115: *стягиваемая тройка* $\{s, w_1, w_2\}$

Если $|W_1'| = 2$, то по пункту 3 леммы 4 пятерка $W_1' \cup \{s, w_1, w_2\}$ стягиваема.

Если $|W_1'| = 3$, то по пункту 3 леммы 4 шестерка $W_1' \cup \{s, w_1, w_2\}$ стягиваема, а тогда стягиваема пятерка $W_1' \cup \{s, w_2\}$, так как w_1 смежна с вершинами x и r, не лежащими в этой пятерке.

Если $|W_1'| = 4$, то по пункту 3 леммы 4 семерка $W_1' \cup \{s, w_1, w_2\}$ стягиваема, а тогда стягиваема пятерка $W_1' \cup \{s\}$, так как w_1 смежна с вершинами x и r, не лежащими в этой пятерке, а w_2 смежна с w_1 и x.

Пусть $|W_1'| \geqslant 5$. Четырьмя абзацами выше было доказано, что вершина x не входит в W_1'. Граф $G - T - W_1'$ — двусвязный по пункту 3 леммы 4. Пусть $\{\alpha, \beta\}$ — граница крайней части с внутренностью W_1' в $G - T$. Не умаляя общности, $\alpha \neq x$. Пусть P — подпуть в $G(W_1')$ такой, что один из его концов смежен с α, и $|W_1' \setminus V(P)| = 4$. Тогда мы можем к двусвязному графу $G - T - W_1'$ добавить путь $\alpha P s w_2 w_1 x$ и получить двусвязный граф ($\alpha \neq x$). Следовательно, $W_1' \setminus V(P)$ — стягиваемая четверка. Причем подграф, индуцированный на вершинах этой четверки, является простым путем, то есть не содержит цикла. Значит, эта четверка — неподозрительная, и в графе G найдется стягиваемая пятерка.

Мы доказали, что все подозрительные четверки на самом деле неподозрительные, а, значит, в любом трехсвязном графе G с $v(G) \geqslant 13$ найдется стягиваемая пятерка.

Заключение

Безусловно, основным итогом диссертации является доказательство того, что в любом трёхсвязном графе с не менее чем 13 вершинами найдется стягиваемое множество из пяти вершин. Также был построен пример трёхсвязного графа на 12 вершинах, в котором нет стягиваемой пятерки, что показывает, что доказанная оценка точна.

В первой, четвертой и пятой главах диссертации доказаны новые свойства стягиваемых нерасширямых множеств. Доказательство этих свойств основано на изучении структуры разбиения двусвязного графа одиночными множествами. Показано, что при поиске стягиваемых множеств можно использовать не только внутренние вершины крайних частей разбиения, но и границы этих частей, а также некрайние части, которым эти границы принадлежат.

В третьей, четвертой и пятой главах применяется новый метод выделения подозрительных четверок. Сначала доказывается, что для любой стягиваемой четверки, кроме отдельно описанных подозрительных четверок, в графе найдется также стягиваемая пятерка. А затем отдельно обрабатываются случаи, когда все стягиваемые четверки в графе принадлежат одному из типов подозрительных четверок. Ограничение на типы стягиваемых четверок позволяет понять много о структуре графа и в итоге найти в нём стягиваемую пятерку.

Методы, связанные с применением дерева разбиения двусвязного графа и выделения подзрительных четверок, разработанные в диссертации, в будущем могут быть использованы для доказательства существования стягиваемых множеств больших размеров.

Список литературы

[1] Matthias Kriesell. *Contractible Subgraphs in 3-Connected Graphs* J.Comb.Theory Ser.B, Vol.80, 2000, p.32-48.

[2] Matthias Kriesell.*On Small Contractible Subgraphs in 3-connected Graphs of Small Avarage Degree* Mathematisches Seminar der Universitat Hamburg, Bundesstrabe 55, D-20146 Hamburg.

[3] W. McCuaig, K. Ota. *Contractible triples in 3-connected graphs.* J.Comb.Theory Ser.B, Vol.60, 1994, p.308-314.

[4] W. Mader *High connectivity keeping sets in graphs and digraphs.* Discrete Mathematics 302, 2005, p. 173 – 187.

[5] W. Mader *High connectivity keeping sets in n-connected graphs.* Combinatorica 24 (3), 2004, p. 441–458.

[6] W. Mader *On k-con-critically n-connected graphs* J. Combinatorial Theory B 86, 2002, p. 296–314.

[7] W. T. Tutte. *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press, 1966.

[8] R. Halin *A Theorem on n-Connected Graphs* Journal of Combinatorial Theory 7(2), 1969, p.150-154.

[9] Н. Ю. Власова. *О стягиваемых 5-вершинных подграфах трехсвязного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ, **475**, 2018, стр. 22-40.

[10] Н. Ю. Власова. *Каждый 3-связный граф на не менее чем 13 вершинах имеет стягиваемый 5-вершинный подграф.* Записки научных семинаров ПОМИ, **518**, 2022, стр. 5-93.

[11] Д. В. Карпов, А. В. Пастор. *О структуре k-связного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ, **266**, 2000, стр. 76-106.

[12] Д. В. Карпов. *Блоки в k-связных графах.* Записки научных семинаров ПОМИ, **293**, 2002, стр. 59-93.

[13] Д. В. Карпов.*Разделяющие множества в k-связном графе.* Записки научных семинаров ПОМИ, **340**, 2006, стр. 33-60.

[14] Д. В. Карпов. *Дерево разбиения двусвязного графа.* Записки научных семинаров ПОМИ, **417**, 2013, p. 86-105.

[15] Д. В. Карпов. *Минимальные двусвязные графы.* Записки научных семинаров ПОМИ, **417**, 2013, p. 106-127.

[16] D. V. Karpov. *Large contractible subgraphs of a 3-connected graph.* Discussiones Mathematicae Graph Theory, to appear, doi:10.7151/dmgt.2172.