*На правах рукописи*

**БАСАЛОВ ЮРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ**

# ОЦЕНКИ КОНСТАНТЫ НАИЛУЧШИХ СОВМЕСТНЫХ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Тула - 2022

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого»

| | | |
|---|---|---|
| **Научный руководитель** | – | доктор физико-математических наук, профессор Добровольский Николай Михайлович |
| **Официальные оппоненты** | – | Чирский Владимир Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, профессор кафедры математического анализа |
| | – | Шутов Антон Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, Владимирский государственный университет имени А. Г. и Н. Г. Столетовых, доцент кафедры вычислительной техники и систем управления |
| **Ведущая организация** | – | Хабаровское отделение Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института прикладной математики Дальневосточного отделения Российской академии наук |

Защита диссертации состоится «__» ________ 2022 в __ часов на заседании Диссертационного совета Д002.202.02 в Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки 27, ауд. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан «__» ________ 2022 г.

Ученый секретар диссертационного совета
доктор физико-математических наук Пономаренко И. Н.

# Общая характеристика работы

## Актуальность темы

Теория диофантовых приближений сформировалась как естественное развитие теории цепных дробей, активно развивавшейся в XVII-XIX веках. Исследованию непрерывных дробей посвящали свои работы Л. Эйлер, Ж. Л. Лагранж, Ж. Лиувилль, К. Ф. Гаусс. Ключевой особенностью цепных дробей является то, что они обеспечивают наилучшие приближения действительного числа рациональными дробями, обладая при этом простой алгебраической и геометрической структурой.

Теория диофантовых приближений интересуется более общими вопросами аппроксимации в целых числах. Многие проблемы теории диофантовых приближений исходят из фундаментального утверждения, полученного П. Г. Л. Дирихле в 1842 [33, 42].

Теорема 1. *Пусть $\alpha_{ij}$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ и $Q$ – произвольные действительные числа, причем $Q > 1$. Тогда найдутся целые числа $q_1,\ q_2, \ldots,\ q_m$ и $p_1,\ p_2, \ldots,\ p_n$ такие, что $1 \leq max\,(|q_1|,\ |q_2|, \ldots,\ |q_m|) < Q^{\frac{n}{m}}$ и*

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot q_j - p_i\right| \leq \frac{1}{Q}, \qquad (1 \leq i \leq n). \tag{1}$$

Для $m = 1$ неравенство (1) можно записать в виде

$$\max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n < 1. \tag{2}$$

Можно ли усилить это неравенство, заменив 1 на какое-то число $C$?

Определение 1. *Точная нижняя грань величины $C$, для которой существует бесконечное количество наборов целых чисел $p_1, \ldots,\ p_n,\ q$, удовлетворяющих неравенству*

$$\max_{i=\overline{1,n}} q\,|q\alpha_i - p_i|^n < C,$$

*называется константой наилучших диофантовых приближений $C(\vec{\alpha})$ для вектора $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.*

Определение 2. *Константой наилучших диофантовых приближений $C_n$ называется точная верхняя грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$ размерности $n$*

$$C_n = \sup_{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} C(\vec{x}).$$

Данная работа посвящена вопросам оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений $C_n$.

К первым исследованиям русских ученых в области теории диофантовых приближений можно отнести работу П. Л. Чебышева 1866 г. «Об одном арифметическом вопросе» [35]. В этой работе он получает оценку степени приближения для неоднородной линейной формы. А именно, показывает, что для произвольных чисел $a, b$ существует бесконечное количество пар целых чисел $x, y$ таких, что

$$|x - ay - b| < \frac{2}{y}.$$

Изучение этого вопроса было затем продолжено Ш. Эрмитом [47], а позднее Г. Минковским [52].

Пусть $\varphi(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ – бинарная форма с произвольными коэффициентами $a, b, c$ и определителем $\Delta = b^2 - 4ac \neq 0$ (если $\Delta = 0$, то бинарная форма приводится к линейной). Тогда переменным $x, y$ можно дать такие целые, не равные одновременно нулю, значения, что

$$\begin{aligned} &\varphi(x, y) \leq \sqrt{\tfrac{1}{3}\,|\Delta|} \quad \text{для определенных квадратичных форм, где } \Delta < 0, \\ &\varphi(x, y) \leq \sqrt{\tfrac{1}{5}\,|\Delta|} \quad \text{для неопределенных квадратичных форм, где } \Delta > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Указанное утверждение впервые было четко сформулировано учениками П. Л. Чебышева: А. Н. Коркиным и Е. Н. Золотарёвым [49]. Ими была обнаружена принципиальная разница между случаями $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$. При $\Delta > 0$ равенство $\varphi(x, y) = \sqrt{\frac{1}{5}\,|\Delta|}$ достигается на некотором классе эквивалентных квадратичных форм. Если исключить этот класс из рассмотрения, то можно усилить неравенство (3) до неравенства

$$\varphi(x, y) \leq \sqrt{\frac{1}{8}\,|\Delta|},$$

где равенство также достигается на определенном классе квадратичных форм. Этот процесс можно продолжать далее. В то же время, для $\Delta < 0$, после исключения из рассмотрения класса эквивалентных форм, для которых $\varphi(x, y) = \sqrt{\frac{1}{3}\,|\Delta|}$, можно будет найти формы, для которых $\varphi(x, y) < \sqrt{\lambda\,|\Delta|}$ для любого $\lambda < \frac{1}{3}$.

Задача дальнейшего продолжения ряда описанных выше констант $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \ldots$ (при $\Delta > 0$) была решена учеником А. Н. Коркина, академиком А. А. Марковым в 1880 в магистерской диссертации «О бинарных квадратичных формах положительного определителя» [24].

Описанные выше результаты имеют непосредственную связь с оценкой константы наилучших диофантовых приближений для $n = 1$.

Теорема 2. *[19] Пусть $\theta$ иррационально и является корнем уравнения $\varphi(\theta, 1) = 0$ и $\mu(f) = \inf |\varphi(x, y)|$ ( $x, y$ – целые, не равные нулю одновременно). Тогда*

1. *$C(\theta) \geq \mu(f)\sqrt{|\Delta|}$, каковы бы ни были $a, b, c$.*

2. *Если $a, b, c$ – рациональные, то в предыдущем неравенстве всегда имеет место знак равенства.*

3. *Если, кроме того, $\varphi(x, y)$ принимает оба значения $\pm\mu$ для целых значений переменных, то существует бесконечно много целых $p, q$ таких, что $|q(\theta q - p)| < C(\theta)$.*

С одной стороны, из этого утверждения непосредственно следует, что $C_1 \geq 1/\sqrt{5}$. С другой стороны, вместо цепочки неравенств для классов квадратичных форм можно записать цепочку неравенств для классов квадратичных иррациональностей, причем в правых частях будут находиться те же константы $\frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \ldots$. Доказательство того, что $C_1 = 1/\sqrt{5}$ было получено А. Гурвицом [48] в 1891.

Разрешив задачу для неопределенных бинарных форм, А. А. Марков занимался аналогичной проблемой для неопределенных тернарных и кватернарных форм [25, 26]. Позднее, исследования в этом направлении продолжил Б. А. Венков в работе [8] от 1945.

Тесную связь с теорией диофантовых приближений имеет геометрия чисел (см. ниже). Ее важным понятием является

Определение 3. *Пусть $\mathbb{F}$ – точечное тело. Если решетка $\Lambda$ не имеет в $\mathbb{F}$ отличных от $\mathbb{O}$ точек ($\mathbb{O} \in \mathbb{F}$), то $\Lambda$ допустима для $\mathbb{F}$. Точную нижнюю грань*

$$\Delta(\mathbb{F}) = \inf d(\Lambda)$$

*определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathbb{F}$-допустимых решеток $\Lambda$ называют критическим определителем множества $\mathbb{F}$.*

Вычисление критического определителя произвольного тела $\mathbb{F}$ является сложной задачей. Вопросам оценки значений некоторых критических определителей посвящены исследования А. В. Малышева. В своих работах он активно использовал метод Л. Дж. Морделла (1973 г.)[23]. В сочетании с использованием ЭВМ это позволило ему достичь значительных результатов в доказательстве гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ [10].

В работе «О представлении целых чисел положительными квадратичными формами» [22] А. В. Малышевым дается исчерпывающее описание задачи целочисленного представления чисел квадратичными формами $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j$ с целыми коэффициентами, в частности, определение количества таких представлений. Некоторые асимптотические формулы количества представлений целого числа квадратичными формами можно найти в работе 1979 Е. В. Подсыпанина «Количество целых точек в эллиптической области (замечание к одной теореме А. В. Малышева)» [30]. Также Е. В. Подсыпанин [29] дает подробное исследование одного из вариантов обобщения цепных дробей – алгоритма Вигго Бруна – исследует его сходимость, получает выражение знаменателя $n$-ых подходящих дробей как функции неполных частных $a_1, \ldots, a_n$, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$.

Исследованиями в области диофантовых приближений занимался Б. Ф. Скубенко. В работе 1982 г. «К совместным приближениям алгебраических иррациональностей» [32] он во-первых повторяет полученную в 1955 Дж. В. С. Касселсом [38] оценку для константы наилучших диофантовых приближений для чисел из чисто вещественного кубического поля

$$\max_{i=\overline{1,2}} q \left| q\alpha_i - p_i \right|^n \leq \frac{2}{7},$$

где $\alpha_1$, $\alpha_2$ принадлежит полю $\mathbb{Q}(2\cos\frac{2\pi}{7})$. Во-вторых, Б. Ф. Скубенко дает оценку

$$||q\theta_i||\cdot||q\theta_j|| < \alpha_{ij}(q\log q)^{-1}$$

для произвольного целого $q$ и $\theta_i$, $\theta_j$ из чисто вещественного кубического поля, и числа $\alpha_{ij}$, зависящего только от $\theta_i$, $\theta_j$.

Константой наилучших диофантовых приближений $C_n^*$ алгебраических чисел называют точную верхнюю грань числа $C(\vec{x})$ по всем векторам $\vec{x}$, таким что вместе с 1 они образуют базис чисто вещественного поля алгебраических чисел степени $n+1$. Дж. Шекерсом [60] была установлена следующая связь $C_n^*$ и $C_n$:

$$C_n^* \leq C_n.$$

В. Г. Журавлев в серии работ [15, 16, 17] разработал ядерно-модульный алгоритм разложения алгебраических чисел в цепные дроби. В этих работах, используя методы дифференцирования индуцированных разбиений торов, строятся периодические ядерные приближения, для которых можно получить оценки схожие с (2). Если вектор $\vec{x}$ таков, что вместе с 1 он образуют базис чисто вещественного поля алгебраических чисел степени $n+1$, то для любого фиксированного $\theta > 0$ можно построить подходящие дроби $\frac{p_{ij}}{q_i}$ такие, что

$$\left|x_i - \frac{p_{ij}}{q_i}\right| \leq \frac{c}{q_i^{1+1/n-\theta}}$$

для всех $j > j(\alpha,\theta)$, где константы $j(\alpha,\theta) > 0$ и $c = c(\alpha,\theta) > c$ не зависят от $j$. В работе [18] этот подход был обобщен для приближения линейных форм. У представителей Владимирской школы, учеников В. Г. Журавлева, имеются и другие работы в области теории диофантовых приближений [12, 34].

В настоящее время в нашей стране исследования в области приближения действительных чисел и теории цепных дробей проводятся Н. Г. Мощевитиным [28], Е. И. Коркиной [21], О. Н. Германом [9], А. Д. Брюно [5, 6], В. А. Быковскими и М. О. Авдеевой [1, 7], О. А. Горкушой [11], Н. М. Добровольским и Н. Н. Добровольским [13, 14, 43].

Задача оценки константы наилучших диофантовых приближений имеет интересную историю. Важной особенностью этой задачи является разнообразие методов, с помощью которых были получены результаты в этой области. А. Гурвиц использовал аппарат цепных дробей [48], Ф. Фуртвенглер – аппарат линейной алгебры [44, 45], Г. Дэвенпорт и Дж. В. С. Касселс использовали подходы геометрии чисел [38, 41].

Стоит отметить такую интересную составляющую данной проблематики, как тесная взаимосвязь диофантовых приближений с геометрией чисел вообще, и алгебраическими решетками в частности (работы Дж. В. С. Касселса [38], А. Д. Брюно [2, 3, 4]). Это уже дало новые возможности, как для применения уже известных результатов, так и для применения новых подходов в задаче наилучших диофантовых приближений (работы А. Д. Брюно [2, 3, 4], Н. Г. Мощевитина [27]). По всей видимости, в будущем взаимосвязь между этими направлениями будет только усиливаться.

### Степень разработанности

Исторически, в основе оценок для $n = 1$ лежит теория цепных дробей, и наиболее значимой является оценка А. Гурвица [48]

$$C_1 \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

полученная им в 1891. Для $n = 2$ в основе известных оценок лежит математический аппарат линейной алгебры (Ф. Фуртвенглер [44, 45]), геометрия чисел (Г. Дэвенпорт, Дж. В. С. Касселс [38, 39, 41]) и результаты многомерных обобщений цепных дробей (В. Адамс, Т. Кьюзик [36, 40]).

Одной из первых общих оценок снизу является результат, полученный в 1929 Ф. Фуртвенглером [44, 45]. Он построил оценки дискриминантов алгебраических полей, которые приводят к оценке качества приближения $n$ действительных чисел рациональными, что формулируется в следующей теореме

Теорема 3. *Пусть $k$ – положительное число меньшее $1/\sqrt{|\Delta|}$, где $\Delta$ – это наименьший по модулю дискриминант алгебраического поля степени $n+1$. Тогда для любых действительных чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ неравенства*

$$q\,|q\alpha_i - p_i|^n < k, \qquad i = \overline{1,n}$$

*имеют бесконечное количество решений в целых числах $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n,\ q$.*

Это утверждение в свою очередь приводит к оценке константы наилучших совместных диофантовых приближений

$$C_n \geq 1/\sqrt{|\Delta|}.$$

Одна из наиболее фундаментальных на данный момент оценок принадлежит Г. Дэвенпорту [41]. Позднее она была доработана Дж. В. С. Касселсом [38]. Г. Дэвенпорт обнаружил связь между значением критического определителя (см. определение 3) звездного тела и оценкой некоторых форм. В частном случае это позволяет, вычислив критический определитель $(n+1)$-мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1\leq i\leq n} |x_i|^n < 1,$$

получить значение константы наилучших совместных диофантовых приближений. Однако, вычисление критических определителей для тел такого вида является сложной задачей. Поэтому Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя к оценке его значения. Этот подход оказался достаточно плодотворным, позволив получить оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 2, 3, 4$. Оценки такого рода являются достаточно сложной вычислительной задачей, и в каждом отдельном случае решение такой задачи требовало использования новых подходов.

Отметим некоторые известные оценки константы наилучших диофантовых приближений сверху. Первая оценка сверху была получена Г. Минковским [52] в 1896 с использованием геометрии чисел. Г. Ф. Блихфельдт [37], введя понятие фундаментального параллелепипеда в 1914, улучшил результат Г. Минковского. Позднее подход Г. Ф. Блихфельдта получил развитие в работах П. Мюллендера, В. Спона, В. Г. Новака [54, 59, 55, 56]. Значительный интерес представляет сравнение подходов при оценке константы наилучших совместных диофантовых приближений сверху и снизу.

## Цели и задачи исследования

Целью данной работы является развитие подходов Г. Дэвенпорта, Дж. В. С. Касселса, Т. Кьюзика, С. Красса с целью получения оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений для $n > 4$. Для этого будет использоваться оценка наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, находящегося внутри $(n+1)$-мерного звездного тела Касселса

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^n < 1.$$

## Новизна исследования

Все результаты настоящей диссертации являются новыми.

## Теоретическая и практическая значимость работы

Получены новые оценки константы наилучших диофантовых приближений, а также значительная информация о структуре значений $V_{n,s}$. Предложена новая методика оценки значений $V_{n,s}$: вначале с помощью численных экспериментов высказывается гипотезу о виде точных значений оценок, затем эти оценки выводятся и доказываются аналитически. Эта методика может быть обобщена и применена к вопросу оценки некоторых критических определителей решеток.

## Методы исследования

В середине XX века Г. Дэвенпортом была найдена фундаментальная связь значения константы наилучших совместных диофантовых приближений и критического определителя звездного тела специального вида. Позднее Дж. В. С. Касселс перешел от непосредственного вычисления критического определителя к оценке его значения с помощью вычисления наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, обладающего определенными свойствами. Этот подход позволил получить оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n = 2, 3, 4$ (см. работы Дж. В. С. Касселса [38], Т. Кьюзика [39], С. Красса [50, 51]).

Идея построения оценок отличается от работы Т. Кьюзика [39]. Задача получения оценок значений критического определителя звездного тела Дэвенпорта сводится к задаче нахождения наибольшего объема параллелепипеда с центром в начале координат находящегося внутри $(n+1)$-мерного звездного тела Касселса. Эта задача в свою очередь была сведена к задаче многомерной оптимизации. Численные эксперименты в системе компьютерной алгебры `Wolfram Mathematica` позволили высказать гипотезу о виде точных значений оценок $V_{n,s}$, затем эти оценки были выведены и доказаны аналитически. Другим отличием построенных оценок является возможность обобщения их на любую размерность.

### Положения, выносимые на защиту

1. Теорема 6 о том, что для объема $V_{5,2}$ наибольшего параллелепипеда звездного тела Касселса размерности 5 справедлива оценка
$$V_{5,2} \geq \sqrt{\frac{27\left(9+5\sqrt{5}\right)}{88}},$$
и как следствие для константы совместных диофантовых приближений $C_5$ размерности 5 справедлива оценка
$$C_5 \geq \frac{3}{46}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{1166}}.$$
2. Теорема 7 о том, что для объема $V_{6,3}$ размерности 6 справедлива оценка
$$V_{6,3} \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11},$$
и как следствие для константы совместных диофантовых приближений $C_6$ размерности 6 справедлива оценка
$$C_6 \geq \frac{9+5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}}.$$

### Апробация работы

Основные результаты настоящей диссертации опубликованы в статьях [64, 65, 66] за авторством соискателя. Каждая из публикаций напечатана в журнале, входящем в список ВАК. Результаты диссертации докладывались

- на XV, XVI, XVIII и XIX Международной конференции Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения [62, 63, 68];
- на семинаре по теории чисел на механико-математическом факультете МГУ;
- на алгебраическом семинаре ПОМИ РАН.

### Список основных публикаций по теме диссертации

По теме диссертации автором опубликованы статьи [61, 64, 65, 66, 67].

## Основное содержание работы

Будем следовать подходу Г. Дэвенпорта, Дж. В. С. Касселса. Г. Дэвенпорт [41] обнаружил связь между значением критического определителя (определение см. 3) звездного тела и оценкой некоторых форм. В частном случае это позволяет, вычислив критический определитель $(n+1)$-мерного звездного тела Дэвенпорта

$$\mathbb{F}_n : |x_0| \max_{1 \le i \le n} |x_i|^n < 1,$$

получить значение константы совместных диофантовых приближений. Однако, вычисление критических определителей для тел такого вида является сложной задачей. Поэтому Дж. В. С. Касселс [38] перешел от непосредственного вычисления критического определителя, к оценке его значения. Для этого он использовал оценку наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат, находящегося внутри $(n+1)$-мерного звездного тела (будем называть его *звездным телом Касселса*)

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} = \frac{1}{2^s} \prod_{i=1}^{s} |x_i^2 + x_{s+i}^2| \prod_{i=2s+1}^{n} |x_i| < 1. \tag{4}$$

Параллелепипеды, имеющие объем $V_{n,s}$, в дальнейшем будем называть *наибольшими*.

Таким образом задача оценки константы совместных диофантовых приближений сводится к оценке *объема наибольшего параллелепипеда*. Оценки для $V_{n,s}$ были получены в работах Дж. В. С. Касселса [38], Т. Кьюзика [39], С. Красса [50, 51]. Предложенная идея построения оценок отличается от работы Т. Кьюзика.

### Метод получения оценок $V_{n,s}$

Рассмотрим матрицу $n$-ого порядка

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Пусть $\mathbb{E}$ – $n$-мерный единичный куб, состоящий из точек

$$\vec{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n), \qquad 0 \le e_i \le 1, \qquad i = \overline{1, n}.$$

Матрица $A$ преобразует его в $n$-мерный параллелепипед

$$\mathbb{A} : \vec{a} = A \cdot \vec{e}. \tag{6}$$

Заметим, что таким образом каждому $n$-мерному параллелепипеду соответствует матрица $A$. Объем этого параллелепипеда равен $2^n \cdot |\det A|$.

Пусть $\mathbb{F}_{n,s}$ – это $n$-мерное звездное тело

$$\mathbb{F}_{n,s} : f_{n,s} \leq 1,$$

где $f_{n,s}$ это (4).

Нас интересует, находится ли некоторый параллелепипед $\mathbb{A}$ внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$. Можно предложить следующий метод проверки этого утверждения. Составим оптимизационную задачу

$$\begin{gathered} f_{n,s} \to \max, \\ |b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n| \leq 1, \\ |b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n| \leq 1, \\ \ldots \\ |b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n| \leq 1. \end{gathered} \tag{7}$$

Если решение задачи $\leq 1$, то параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит полностью внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, в противном случае часть его находится вне звездного тела.

Таким образом, если параллелепипед $\mathbb{A}$ лежит внутри звездного тела $\mathbb{F}_{n,s}$, имеет место оценка

$$V_{n,s} \geq \det A. \tag{8}$$

Нашей целью является построение матрицы $A$ такого вида, чтобы задача (7) имела решение $\max f_{n,s} \leq 1$. Параллелепипеды $\mathbb{A}$ для которых $\det A$ "велико" будем называть *наибольшими*. Соответствующую наибольшему параллелепипеду матрицу также будем называть *наибольшей*.

На первом этапе исследования было решено провести вычислительные эксперименты по численному нахождению наибольших значений $V_{n,s}$. В процессе экспериментов производился направленный перебор матриц $A$ с целью найти матрицу с наибольшим $\det A$, удовлетворяющую условию (7).

В результате экспериментов проводимых для размерностей 3 и 4 выяснилось, что существует множество наибольших матриц (а соответственного и параллелепипедов) с одинаковыми $\det A$. Поэтому было произведено исследование с целью получить наибольшую матрицу $A$ с наиболее простой структурой. Оказалось, что можно найти наибольшую матрицу $A$ следующего вида

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k & a_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_k & a_k \end{pmatrix}. \tag{9}$$

### Вывод оценок $V_{n,s}$

Перейдем к нахождению точных значений $V_{n,s}$. Для это поступим следующим образом. Определим точки, в которых наибольший параллелепипед $\mathbb{A}_n$ касается звездного тела $\mathbb{F}_{n,[n/2]}$, выпишем в этих точках граничные условия и на их основании получим параметры параллелепипеда.

Теорема 4.

$$V_{3,1} \geq 2.$$

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$A_3^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & b \\ 0 & -b & b \end{pmatrix}.$$

Выберем набор точек в которых $f_{3,1}$ должна быть $\leq 1$ (Если выбрать в качестве этого набора все точки $\mathbb{A}_3^*$ (набор $\delta_{max}$), то матрица гарантировано будет удовлетворять задаче (7)) При фиксированном наборе $\delta_0$ точек будет максимизировать значение $\det A_3^*$. Если $\det A_3^*$ совпадет с $\det A_3$ наибольшей матрицы для $n = 3$, это будет означать, что можно перейти при проверке задачи (7) от набора $\delta_{max}$ к набору $\delta_0$. Сужая набор $\delta_0$ до минимума, получим граничные точки в которых $f_{3,1} = 1$.

Проводя численные эксперименты, был найден набор, состоящий из единственной точки $(1, 1, 0)$. Эта точка, применяя преобразование (6), превращается в точку $(a, b, b)$, что приводит нас к задаче

$$2ab^2 \to \max,$$

$$\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) b = 1.$$

Решив эту задачу, получим точное значение

$$A_3^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\det A_3^* = 2ab^2 = 2. \tag{10}$$

Полученная матрица дает оценку $V_{3,1} \geq 2$. $\square$

Замечание 1. *Этот результат совпадает с результатом Т. Кьюзика [39].*

Для $n = 4$ аналогичным образом была получена матрица

$$A_4^* = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{4}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{4}{3}} & \sqrt{\frac{4}{3}} \end{pmatrix},$$

что дает результат

Теорема 5.

$$V_{4,2} \geq \det A_4^* = \frac{16}{9}.$$

Замечание 2. *Этот результат совпадает с результатом Т. Красса [50].*

Для $n = 5$ методом, используемым для доказательства теоремы 4, получаем матрицу

$$A_5^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & -c & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix},$$

где

$$a = \sqrt{7 - 3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{134 + 30\sqrt{5}}{27}}, \qquad b = a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{8(4\sqrt{5} - 9)}}, \qquad c = \frac{1}{2a^2b^2},$$

что дает оценку

Теорема 6.

$$V_{5,2} \geq \det A_5^* = \sqrt{\frac{27\left(9 + 5\sqrt{5}\right)}{88}} \approx 2.48831... \tag{11}$$

Для $n = 6$ матрица, получаемая аналогичным способом, имеет вид

$$A_6^* = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & b \end{pmatrix},$$

где

$$a = \sqrt[6]{\frac{8\left(30\sqrt{5}-67\right)}{11}}, \qquad b = \sqrt[6]{\frac{56+25\sqrt{5}}{88}}.$$

что дает оценку

Теорема 7.

$$V_{6,3} \geq \det A_6^* = \frac{9+5\sqrt{5}}{11} \approx 1.83458... \tag{12}$$

## Связь с геометрией чисел

В работах [20, 38, 39] излагается связь между наилучшими совместными диофантовыми приближениями и геометрией чисел. В частности, значение константы наилучших совместных диофантовых приближений равно [41]

$$C_n = 1/\Delta(\mathbb{F}), \tag{13}$$

где $\Delta(\mathbb{F})$ – значение критического определителя звездного тела Дэвенпорта, которое в одномерном случае имеет вид

$$\mathbb{F}_1 : |x_0 x_1| < 1. \tag{14}$$

Из [46] известно, что допустимой для (14) является решетка, порожденная чисто-вещественным алгебраическим полем. Значение определителя такой решетки равно корню квадратному из дискриминанта соответствующего алгебраического поля. Критической решеткой будет решетка с минимальным дискриминантом. В одномерном случае она (назовем ее $\Lambda_1$) соответствует полю, порожденному многочленом $x^2 - x + 1$. Базис $\Lambda_1$

$$\overrightarrow{a_1} = (1,\,1), \quad \overrightarrow{a_2} = (\varphi_1,\,\varphi_2),$$

где $\varphi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \varphi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ корни уравнения $x^2 - x + 1 = 0$. Дискриминант этого поля равен 5, а $d(\Lambda_1) = \sqrt{5}$, что в силу (13) дает $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Легко показать, что решетка $\Lambda_1$ является неприводимой [31].

Для размерности $n = 2$ ситуация усложняется. С точки зрения теории диофантовых приближений вычисление или оценка константы наилучших совместных диофантовых приближений является сложной задачей. С точки зрения геометрии чисел, звездное тело Касселса принимает вид

$$\mathbb{F}_2 : |x_0| \max_{i=1,2} |x_i|^2 < 1,$$

что делает вычисление критического определителя проблематичным. Дж. В. С. Касселсом был предложен [20, 39] подход к построению допустимой решетки на основе линейного преобразования решетки, порожденной алгебраическим полем.

Возьмем решетку $\Lambda_2^{(0)}$ соответствующую алгебраическому полю, порожденному многочленом

$$x^3 - x^2 - 2x + 1. \tag{15}$$

Дискриминант этого поля равен 49, а базис решетки

$$\overrightarrow{a_1} = (1,\,1,\,1), \quad \overrightarrow{a_2} = (\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_2), \quad \overrightarrow{a_3} = (\omega_1^2,\,\omega_3^2,\,\omega_3^2),$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ корни уравнения (15). Применив к решетке $\Lambda_2^{(0)}$ преобразование

$$M_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

получим решетку $\Lambda_2$ с базисом

$$\overrightarrow{a_1} = (1,\,0,\,1), \quad \overrightarrow{a_2} = \left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2},\,\frac{\omega_2-\omega_1}{2},\,\omega_3\right), \quad \overrightarrow{a_3} = \left(\frac{\omega_1^2+\omega_2^2}{2},\,\frac{\omega_2^2-\omega_1^2}{2},\,\omega_3^2\right),$$

и определителем $d(\Lambda_2) = \det M_2 \cdot \sqrt{49} = \frac{7}{2}$. Это дает оценку константы наилучших совместных диофантовых приближений $C_2 \geq \frac{2}{7}$, которая является допустимой для $\mathbb{F}_2$. Аналогично решетке $\Lambda_1$ легко показать, что $\Lambda_2$ – то же неприводимая решетка.

Для размерности $n = 3$ звездное тело Касселса имеет вид

$$\mathbb{F}_3 : |x_0| \max_{i=\overline{1,3}} |x_i|^3 < 1,$$

Допустимая неприводимая решетка $\Lambda_3$ получается из решетки алгебраического поля (дискриминант равен 275), порожденного многочленом

$$x^4 - 2x^3 + x - 1 \tag{16}$$

применением преобразование

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

Базис решетки $\Lambda_3$

$$\overrightarrow{a_{i+1}} = \left(\omega_1^i,\,\frac{\omega_2^i+\omega_3^i}{2},\,\frac{\omega_3^i-\omega_2^i}{2},\,\omega_4^i\right), \quad i = \overline{0,3}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ корни уравнения (16). Соответствующая оценка константы наилучших совместных диофантовых приближений имеет вид

$$C_3 \geq 1/d(\Lambda_3) = \frac{1}{\det M_3 \cdot \sqrt{275}} = \frac{2}{\sqrt{275}}.$$

Для размерности $n = 4$ возьмем решетку $\Lambda_4^{(0)}$, соответствующую алгебраическому полю, порожденному многочленом

$$x^5 - x^4 - x^3 + x^2 - 1. \tag{17}$$

Применив преобразование

$$M_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

получим решетку $\Lambda_4$ с базисом

$$\overrightarrow{a_{i+1}} = \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\omega_1^i,\ \sqrt{\frac{3}{2}}\omega_2^i,\ \frac{\sqrt{3}}{4}(\omega_3^i + \omega_4^i),\ \frac{\sqrt{3}}{4}(\omega_4^i - \omega_3^i),\ \omega_5^i\right), \quad i = \overline{0,4}$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ корни многочлена (17). Соответствующая оценка константы наилучших совместных диофантовых приближений имеет вид

$$C_4 \geq 1/d(\Lambda_4) = \frac{1}{\det M_4 \cdot \sqrt{1609}} = \frac{16}{9\sqrt{1609}}.$$

Ранее были получены оценки константы наилучших совместных диофантовых приближений для $n \geq 3$. Изложим их в терминах решеток.

Для $n = 6$ возьмем решетку $\Lambda_6^{(0)}$ соответствующую алгебраическому полю, порожденному многочленом

$$x^7 - x^6 - x^5 + x^3 + x^2 - x - 1. \tag{18}$$

Применив преобразование

$$M_6 = \begin{pmatrix} \sqrt[6]{2}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[6]{2}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = \sqrt[6]{\frac{11}{16\left(30\sqrt{5} - 67\right)}}, \quad \beta = \sqrt{5\sqrt{5} - 11},$$

получим решетку $\Lambda_6$ с базисом

$$\overrightarrow{a_{i+1}} = \left(\sqrt[6]{2}\alpha\omega_1^i,\ \sqrt[6]{2}\alpha\omega_2^i,\ \alpha\beta(\omega_3^i+\omega_4^i),\ \alpha\beta(\omega_4^i-\omega_3^i),\ \alpha\beta(\omega_5^i+\omega_6^i),\ \alpha\beta(\omega_6^i-\omega_5^i),\ \omega_7^i\right),$$

где $i=\overline{0,6},\ \omega_{i+1}$ корни многочлена (18).

Соответствующая оценка

$$C_6 \geq 1/d(\Lambda_6) = \frac{1}{\det M_6 \cdot \sqrt{184\,607}} = \frac{9+5\sqrt{5}}{11\sqrt{184\,607}}.$$

Для $n=5$ возьмем решетку $\Lambda_5^{(0)}$ соответствующую алгебраическому полю, порожденному многочленом

$$x^6+3x^5+x^4-2x^3-x-1. \tag{19}$$

Применив преобразования

$$M_5 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\beta/\sqrt{2} & \alpha\beta/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\beta/\sqrt{2} & \alpha\beta/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha\beta\gamma & \alpha\beta\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{7+3\sqrt{5}} \cdot \sqrt[10]{\frac{27}{134+60\sqrt{5}}}, \quad \beta = \sqrt{5\sqrt{5}-11}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{13+5\sqrt{5}}{27}},$$

получим решетку $\Lambda_5$ с базисом

$$\overrightarrow{a_{i+1}} = \left(\alpha\omega_1^i,\ \frac{\alpha\beta}{\sqrt{2}}(\omega_2^i+\omega_2^i),\ \frac{\alpha\beta}{\sqrt{2}}(\omega_3^i-\omega_2^i),\ \alpha\beta\gamma(\omega_4^i+\omega_5^i),\ \alpha\beta\gamma(\omega_5^i-\omega_4^i),\ \omega_6^i\right),$$

где $i=\overline{0,5},\ \omega_{i+1}$ корни многочлена (19).

Соответствующая оценка

$$C_5 \geq 1/d(\Lambda_5) = \frac{1}{\det M_5 \cdot \sqrt{28\,037}} = \frac{3}{46}\sqrt{\frac{3\left(9+5\sqrt{5}\right)}{1166}}.$$

## Заключение

Данная работа посвящена разработке нового подхода для оценки снизу константы наилучших диофантовых приближений.

В первой части работы был дан исторический обзор по проблеме оценки константы наилучших диофантовых приближений. С течением времени подходы, применяемые для решения этой задачи, претерпели серьезные изменения. Из алгебры (П. Г. Дирихле [42]А. Гурвиц [48], Ф. Фуртвенглер [44, 45]) это задача перешла в область геометрии чисел (Г. Дэвенпорт [41], Дж. В. С. Касселс [38]).

Во второй части работы были развиты подходы к оценке константы наилучших диофантовых приближений, заложенные Г. Дэвенпортом [41], Дж. В. С. Касселсом [38], Т. Кьюзиком (см. [39]). Эти подходы основаны на оценке наибольшего значения $V_{n,s}$ – объема параллелепипеда с центром в начале координат обладающего определенными свойствами (4). Применение новых идей в сочетании с эффективным использованием численных экспериментов, позволило улучшить существующие оценки константы наилучших диофантовых приближений для $n = 5$ и $n = 6$.

В третьей части был решен ряд многомерных оптимизационных задач. Эти результаты являются промежуточным шагом для доказательства в четвертой части работы оценок $V_{n,s}$, полученных ранее. В пятой части построены допустимые решетки для звездного тела Касселса и исследованы их свойства, что дает возможность построить оценки константы наилучших диофантовых приближений $C_n$ для $n \geq 3$.

Отметим, что для получения более сильных оценок, скорее всего, потребуются принципиально новые подходы. Косвенным признаком этого может быть полученная информация о том, что $A_n^*$ можно представить в виде композиции $A_{n-4}^*$ и $A_4^*$. В качестве возможного подхода по усилению оценок $C_n$ снизу можно предложить непосредственную оценку значения критического определителя звездного тела $\mathbb{F}_n$. Это нетривиальная задача, но необходимо отметить, что в случае оценки сверху были получены достаточно обширные результаты [55, 56, 57, 58, 27].

Другим направлением возможных исследований может стать применение предложенного в данной работе подхода для оценки критических определителей. Задача оценки критического определителя ограниченного тела достаточно схожа с задачей оценки $V_{n,s}$. Нам кажется, что сочетание численных и аналитических методов может дать определенные результаты в этом вопросе.

На XIX международной конференции «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории» В. И. Берником были также отмечены вопросы о поведении значений константы наилучших совместных диофантовых приближений с ростом $n$: стремятся ли $C_n$ к 0? если $C_n$ убывают, то монотонно или нет? Эти вопросы заслуживает отдельных исследований.

## Список литературы

[1] Авдеева М. О., Быковский В. А., Аналог теоремы Валена для совместных приближений пары чисел // Матем. сб. 2003. Том 194. Вып. 7. С. 3–14.

[2] Брюно А. Д.  Алгоритм обобщенной цепной дроби // Препринт N45. М.: ИПМ им. М. В. Келдыша. 2004.

[3] Брюно А. Д. Структура наилучших диофантовых приближений // ДАН. 2005. Том 402. No. 4.

[4] Брюно А. Д. Алгоритм обобщенной цепной дроби // ДАН. 2005. Том. 402. No. 6.

[5] Брюно А. Д. Универсальное обобщение алгоритма цепной дроби // Чебышевский сборник. 2015. Том 16. С. 35–65.

[6] Брюно А. Д. Вычисление основных единиц числовых колец с помощью обобщенной цепной дроби / Программирование. 2019. Номер 2. С. 17–31.

[7] Быковский В. А., Фроленков Д. А., О средней длине конечных цепных дробей с фиксированным знаменателем // Матем. сб. 2017. Том 208. Вып. 5. С. 63–102.

[8] Венков Б. А. Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм // Изв. АН СССР. 1945. Сер. матем., Том 9, вып. 6. С. 429–494.

[9] Герман О. Н. Диофантовы экспоненты решеток // Совр. пробл. матем. 2016. Вып. 23. С. 35–42.

[10] Глазунов Н. М, Голованов А. С., Малышев А. В. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области $|x|^p + |y|^p < 1$ // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1986. Вып. 151. С. 40–53.

[11] Горкуша О. А., Аппроксимация чисел $\Omega$-дробями // Чебышевский сб. 2013. Том 14. Вып. 4. С. 95–100.

[12] Давлетярова Е. П., Жукова А. А., Шутов А. В., Геометризация обобщенных систем счисления Фибоначчи и ее приложения к теории чисел // Чебышевский сб. 2016. Том 17. Вып. 2. С. 88–112.

[13] Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н. О минимальных многочленах остаточных дробей для алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб. 2015. Том 16. Вып. 3. С. 147–182.

[14] Добровольский Н. М., Добровольский Н. Н., Соболев Д. К., Соболева В. Н. Классификация чисто-вещественных алгебраических иррациональностей // Чебышевский сб. 2017. Том 18. Вып. 2. С. 98–128.

[15] Журавлев В. Г., Периодические ядерные разложения единиц алгебраических полей в многомерные цепные дроби // Аналитическая теория чисел и теория функций, Зап. научн. сем. ПОМИ. 2016. Том 449. С. 84–129.

[16] Журавлев В. Г., Локализованные матрицы Пизо и совместные приближения алгебраических чисел // Аналитическая теория чисел и теория функций, Зап. научн. сем. ПОМИ. 2017. Том 458. С. 104–134.

[17] Журавлев В. Г., Наилучшие приближения алгебраических чисел многомерными цепными дробями // Алгебра и теория чисел, Зап. научн. сем. ПОМИ. 2019. Том 479. С. 52–84.

[18] Журавлев В. Г., Диофантовы приближения линейных форм // Алгебра и теория чисел, Зап. научн. сем. ПОМИ. 2020. Том 490. С. 5–24.

[19] Касселс Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1961.

[20] Касселс Дж. В. С. Введение в геометрию чисел: Пер. с англ. – М.: Мир, 1965.

[21] Коркина Е. И., Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры // Особенности гладких отображений с дополнительными структурами, Сборник статей, Тр. МИАН. 1995. Том 209, с. 143–166.

[22] Малышев А. В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами // Тр. МИАН СССР. 1962. Том 65. С. 3–212.

[23] Малышев А. В. Метод Морделла взаимных решеток в геометрии чисел // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1973. вып. 33. С. 97–115.

[24] Марков А. А. О бинарных квадратичных формах положительного определителя // Марков А. А. Избранные труды. – М.: Изд. АН СССР, 1951. С. 9–85.

[25] Марков А. А. О неопределенных тройничных квадратичных формах // Известия Императорской Академии Наук. 1901. Т. 14. вып. 5. С. 509–523.

[26] Марков А. А. О неопределенных квадратичных формах с четырьмя переменными // Известия Императорской Академии Наук. 1902. Т. 16. вып. 3. С. 97–108.

[27] Мощевитин. Н. Г. К теореме Блихфельдта-Мюллендера-Спона о совместных приближениях // Тр. МИАН. 2002. Том 239. с. 268–274.

[28] Мощевитин. Н. Г. О наилучших двумерных совместных диофантовых приближениях в sup-норме // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 2005. Том 6. С. 50–53.

[29] Подсыпанин Е. В. Об одном обобщении алгоритма цепных дробей, связанном с алгоритмом Вигго Бруна // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1977. Том 67. С. 184–194.

[30] Подсыпанин Е. В. Количество целых точек в эллиптической области (замечание к одной теореме А. В. Малышева) // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1979. Том 82. С. 100–102.

[31] Е. Н. Смирнова, О. А. Пихтилькова, Н. Н. Добровольский, Н. М. Добровольский. Алгебраические решётки в метрическом пространстве решёток // , Чебышевский сборник, 2017, т. 18, вып. 4, с. 326–338.

[32] Скубенко Б. Ф. К совместным приближениям алгебраических иррациональностей // Зап. научн. сем. ЛОМИ. 1982. Том 116. С. 142–154.

[33] Шмидт В. М. Диофантовы приближения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.

[34] Шутов А. В., Локальные отклонения в проблеме распределения дробных долей линейной функции // Изв. вузов. Матем. 2017. № 2. С. 88–97.

[35] Чебышев П. Л. Об одном арифметическом вопросе.– СПб., 1866 // Чебышев П. Л. Избранные труды. – М.: Изд. АН СССР, 1955. С. 55–105.

[36] Adams W. W. Simultaneous Diophantine approximations and cubic irrationals // Pacific journal of mathematics. 1969. Vol. 30. No. 1. P. 1–14.

[37] Blichfeldt H. A new principle in the geometry of numbers, with some applications // Trans. Amer. Math. Soc. 1914. Vol. 15. P. 227–235.

[38] Cassels J. W. S. Simultaneous Diophantine approximation // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 119–121.

[39] Cusick T. W. Estimates for Diophantine approximation constants // Journal of Number Theory. 1980. Vol. 12 (4). P. 543–556

[40] Cusick J. W. The two dimensional diophanite approximation constant // Pacific journal of mathematics. 1983. Vol. 105 (1). P. 53–67.

[41] Davenport. H. On a theorem of Furtwängler // J. London Math. Soc. 1955. Vol. 30. P. 186–195.

[42] Dirichlet L. G. P. Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbruchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen // S. B. Preuss. Akad. Wiss. 1842, P. 93–95.

[43] Dobrovol'skii N. M., Balaba I. N., Rebrova I. Yu., Dobrovol'skii N. N., On Lagrange algorithm for reduced algebraic irrationalities // Bul. Acad. Stiinte Repub. Mold. Mat. 2016. No. 2. pp. 27–39.

[44] Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. I // Math. Ann. 1927. Vol. 96. P. 169–175.

[45] Furtwängler H. Über die simulatene Approximation von Irrationalzahlen. II // Math. Ann. 1928. Vol. 99. P. 71–83.

[46] Gruber. P. M., Lekkerkerker. C. G. Geometry of numbers. – Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1987.

[47] Hermite C. Sur une extension donnee a la theorie des fractions continues par M. Tchebychev // J. reine angew. Math. 1879. Vol. 88 P. 10-15.

[48] Hurwitz A. Über die angenaherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationaleBriiche // Math. Ann. 1891. Vol. 39. P. 279–284.

[49] Korkine A., Zolotareff G. Sur les formes quadratiques // Mathematische Annalen. 1873. Vol. 6. P. 366–389.

[50] Krass S. Estimates for $n$-dimensional Diophantine approximation constants for $n \geq 4$ // J. Number Theory. 1985. Vol. 20(2). P. 172-176.

[51] Krass S. The $N$-dimensional diophantine approximation constants // Australian Mathematical Society. 1985. Vol 32(2). P. 313–316.

[52] Minkovski H. Geometrie der Zahlen. Berlin: Teubner, 1896.

[53] Mordell L. Lattice points in some n-dimensional non-convex regions. I, II // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1946. Vol. 49. P. 773–781, 782–792.

[54] Mullender P. Lattice points in non-convex regions. I // Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Sect. Sci. 1948. Vol. 51. P. 874–884.

[55] Nowak W. G. A note on simultaneous Diophantine approximation // Manuscr. Math. 1981. Vol. 36. P. 33–46.

[56] Nowak W. G. A remark concerning the s-dimensional simultaneous Diophantine approximation constants // Graz. Math. Ber. 1993. Vol. 318. P. 105–110.

[57] Nowak W. G. Lower bounds for simultaneous Diophantine approximation constants. // Comm. Math. 2014. Vol. 22, Is. 1, P. 71–76.

[58] Nowak W. G. Simultaneous Diophantine approximation: Searching for analogues of Hurwitz's theorem // In: T.M. Rassias and P.M. Pardalos (eds.), Essays in mathematics and its applications. Springer/ Switzerland. 2016. P. 181–197.

[59] Spohn W.G. Blichfeldt's theorem and simultaneous Diophantine approximation // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. pp. 885–894.

[60] Szekers G. The $n$-dimensional approximation constant // Bull. Austral. Math. Soc. 1984. Vol. 29. P. 119–125.

**Работы автора по теме диссертации**

[61] Басалов Ю. А. Об истории оценок константы наилучших совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник, Т. 19, Вып. 2, 2018, С. 388-405. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-19-2-394-411

[62] Басалов Ю.А. Об оценке константы наилучших диофантовых приближений для n > 4 // XV Международная конференция Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения, посвященной столетию со дня рождения профессора Коробова Николая Михайловича. 2018. С. 245-248.

[63] Басалов Ю. А. О методах оценок критических определителей // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVI Междунар. Конф., посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза.– Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2019. С. 227-228.

[64] Ю. А. Басалов. Оценка константы наилучших диофантовых приближений для n=5 и n=6 // Чебышевский сборник, Т. 20, Вып. 1, 2019, с. 66–81. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-1-66-81

[65] Басалов Ю. А. О методике оценки критических определителей в рамках вопроса оценки константы совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник. Т. 20, Вып. 2, 2019, С. 22-38. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-2-22-38

[66] Басалов Ю. А. Оценки константы совместных диофантовых приближений // Чебышевский сборник. Т. 20, Вып. 3, 2019, С. 405-429. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-405-429

[67] Басалов Ю. А. О русской научной школе диофантовых приближений // Чебышевский сборник. Т. 21, Вып. 1, 2020, С. 388-403. https://doi.org/10.22405/2226-8383-2020-21-1-388-403

[68] Басалов Ю. А. О решетках наилучших совместных диофантовых приближений // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории: Материалы XVIII Международной конференции, посвящённой столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина. — Тула: Тул. гос. пед. ун-т им. Л. Н. Толстого, 2020. – с. 237-241.