На правах рукописи

Гавриков Александр Владимирович

ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕКОНСТРУКЦИИ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

01.01.09 — дискретная математика
и математическая кибернетика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Санкт-Петербург — 2018

Работа выполнена на кафедре теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии в ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

Научный руководитель:

Салий Вячеслав Николаевич, кандидат физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского».

Официальные оппоненты:

Дольников Владимир Леонидович, доктор физико-математических наук, профессор ФГАОУ ВПО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»;

Бабенко Максим Александрович, кандидат физико-математических наук, доцент ФГАУ Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики».

Ведущая организация: ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина».

Защита диссертации состоится 17 апреля 2019 г. в 16:00 часов на заседании диссертационного совета Д002.202.02 на базе ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан «____» ________________ г.

Ученый секретарь
диссертационного совета, д. ф.-м. н. Малютин А. В.

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Под *ориентированным графом* (или, для краткости, *орграфом*) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V — конечное непустое множество (вершины орграфа), а α — отношение смежности на множестве V (дуги орграфа). *Неориентированный граф* (или, для краткости, *граф*) — пара $G = (V, \alpha)$, где α — симметричное и антирефлексивное отношение на множестве V (ребра графа). Все используемые ниже в тексте понятия можно найти в [30], [36].

Пусть K представляет собой некоторый класс графов (орграфов), а G — произвольный граф (орграф), не принадлежащий классу K. Требуется произвести те или иные реконструкции, т. е. изменения в структуре графа (орграфа) G, чтобы полученный граф (орграф) G' оказался K-графом (орграфом). В качестве допустимых реконструкций данного графа (орграфа) обычно рассматриваются: отождествление вершин графа (орграфа), ориентация ребер неориентированного графа, переориентация дуг орграфа, добавление новых ребер (дуг), удаление некоторых ребер (дуг) (см. [42]).

Реконструкциям ориентированных графов посвящен ряд публикаций. Если K — некоторый класс орграфов и $G \notin K$, то под K-конгруэнцией орграфа G понимается такая эквивалентность $\theta \subseteq V \times V$, что $G/\theta \in K$. Для класса K функциональных орграфов Кабанов М.А. [31] указал наименьшую K-конгруэнцию на произвольном орграфе и установил некоторые свойства решетки функциональных конгруэнций орграфов. Он же решил аналогичные задачи для классов ориентированных деревьев [33]. Конгруэнциям ориентированных деревьев посвящена публикация Киреевой А.В. [34]. Мирзаянов М.Р. [39] рассматривал случай, когда K — класс сильно связных орграфов, и предложил полиномиальный алгоритм построения сильно связной конгруэнции произвольного орграфа, наибольшей по числу вершин в фактор-графе. Фан Р.К. Чунг, Майкл Р. Гарей, Тарьян Р.Э. в работе [3] рассматривали сильно связные ориентации смешанных мультиграфов.

В диссертации рассмотрены три задачи оптимальных эйлеровых реконструкций: методом переориентации, добавления и удаления дуг. Решения каждой из них докладывались на научных конференциях (см. [A1, A2, A3, A6, A7]) и опубликованы в [A4, A8]. Помимо теоретических выкладок, составлена программа для ЭВМ, реализующая алгоритмы оптимальных эйлеровых реконструкций орграфов [A5].

Расширение орграфа $G = (V, \alpha)$ — орграф $H = (W, \beta)$, такой, что $|W| = |V| + 1$ и орграф G вкладывается в каждый максимальный подграф орграфа H. Граф $G' = (V, \alpha')$ называется *минимальным K-расширением* графа G, если $\alpha \subset \alpha'$, $G' \in K$ и количество дуг $|\alpha'|$ минимально при соблюдении этих условий. Конструкции минимальных K-расширений тесно связаны с работами Хейза Дж.П. [9], которые основаны на идеях формализации понятия полной отказоустойчивости технических систем. *Тривиальное расширение* (для краткости, ТР) орграфа G — соединение $G + K_1$ исходного орграфа G с одновершинным графом K_1. В силу того, что тривиальное расширение орграфа G единственно с точностью до изоморфизма, возможно ввести функцию ТР(G). Помимо минимальных K-расширений Салием В.Н. предложена еще одна модификация конструкции минимального K-ядра в [41]. Пусть G — некоторый n-вершинный граф. Классу $K(G)$ всегда принадлежит тривиальное расширение $G + K_1$, то есть соединение графа G с одновершинным графом K_1. Неприводимые $K(G)$-ядра называются *Т-неприводимыми расширениями* (для краткости, ТНР) исходного графа G. Конструкция ТНР нашла интересное применение в криптографии (см. [41]) и в задачах отказоустойчивости (см. [23]). ТНР для некоторых классов неориентированных графов и их объединений рассматривались Курносовой С.Г. в диссертации [38]. *Минимальным Т-неприводимым расширением* орграфа G называется расширение исходного орграфа G, полученное удалением максимального количества дуг из ТР(G). То есть минимальное ТНР орграфа G — одно из ТНР, содержащее минимальное количество дуг среди всех других ТНР этого орграфа. Во второй главе диссертации исследованы ТНР и минимальные ТНР для некоторых классов орграфов.

На сегодняшний день доказано [26], что задача построения оптимальной k-отказоустойчивой реализации для произвольного графа относится к классу NP-полных задач. В поисках аналитического решения предпринимались попытки ослабить требование минимальности и рассматривались неприводимые, Т-неприводимые, почти оптимальные реализации. Однако это не позволяет выйти из класса вычислительно сложных задач. В связи с этим последующее развитие исследований связано с описанием Т-неприводимых реализаций для наиболее интересных с точки зрения практического применения классов графов. В своей монографии [29] Абросимов М.Б. рассматривает вершинные и реберные расширения для многих классов графов.

Характеризациям минимальных расширений для различных классов орграфов посвящено много публикаций. Процедура построения k-отказоустойчивой реализации для цепи впервые была предложена Хейзом Дж.П. в [9]. Автором описаны Т-неприводимые и минимальные Т-неприводимые расширения для класса цепей и класса объединения цепей. Разработан полиномиальный алгоритм построения ТНР для ориентированной цепи, которое не изоморфно контору (см. [А10]). Также доказана теорема о построении одного из ТНР для объединения цепей и описан полиномиальный алгоритм построения минимального ТНР для класса объединения цепей (см. [А10]).

Задача нахождения оптимальных k-отказоустойчивых реализаций циклов для отказа элементов впервые была решена Хейзом Дж.П. в [9]. Задача нахождения оптимальных k-отказоустойчивых реализаций циклов для отказов связей между элементами решена Харари Ф. и Хейзом Дж.П. в [6]. Многоугольным орграфом порядка n называется всякий орграф, полученный произвольной ориентацией некоторых дуг цикла C_n. Автором исследованы ТНР для многоугольных орграфов. Доказана теорема о построении одного из ТНР для многоугольных орграфов с четным количеством вершин. Получен полиномиальный алгоритм построения ТНР для произвольного многоугольного орграфа [А11, А12]. Доказана теорема о корректности предложенного алгоритма. Построенный алгоритм позволяет описать семейства многоугольных орграфов, на которых достигаются верхняя и нижняя оценки количества добавленных дуг.

Деревья являются чрезвычайно распространенными в различных практических областях. Курносова С.Г. нашла конструкции Т-неприводимых расширений для полных бинарных деревьев (см. [37]). Абросимовым М.Б. были изучены минимальные расширения направленных звезд (см. [27]). Полное описание минимальных вершинных 1-расширений для неориентированных звезд было найдено в [4]. Автором описаны Т-неприводимые и минимальные Т-неприводимые расширения для звезд, предложен полиномиальный алгоритм построения для звезды $S_{l,m}$ $\min(l, m)$ неизоморфных друг другу ТНР и полиномиальный алгоритм построения для звезды минимального ТНР.

Научная новизна и выносимые на защиту положения. В работе получены следующие основные результаты:

1. получены полиномиальные алгоритмы построения оптимальных эйлеровых реконструкций орграфов методом переориентации, добавления и удаления дуг. Доказаны теоремы о корректности предложенных алгоритмов и приведены оценки их асимптотической сложности;

2. описаны Т-неприводимые и минимальные Т-неприводимые расширения для цепей, звезд и объединения цепей;

3. найден явный вид одного из Т-неприводимых расширений для многоугольных орграфов с четным количеством вершин;

4. получен полиномиальный алгоритм построения Т-неприводимого расширения для произвольного многоугольного орграфа. Доказана теорема о корректности предложенного алгоритма и оценена его асимптотическая сложность;

5. доказана теорема о построении одного из Т-неприводимых расширений для ориентированных сверхстройных деревьев.

Все результаты диссертации являются новыми.

Личный вклад автора. Все выносимые на защиту результаты диссертации принадлежат лично автору.

Методы исследования. При решении перечисленных задач применяются понятийный аппарат и методы теории графов, теории алгоритмов.

Достоверность полученных результатов. Все полученные в диссертации результаты имеют строгое математическое доказательство. Кроме того, достоверность теоретических результатов подтверждают вычислительные эксперименты.

Апробация работы. Результаты работы были представлены на межвузовской научной конференции «Компьютерные науки и информационные технологии» (Саратов, 2008, 2010 годы), на 11-й региональной научно-практической конференции аспирантов, студентов и учащихся (Бийск, 2009 год), на VIII всероссийской межвузовской конференции молодых ученых (Санкт-Петербург, 2011 год), на международной научно-практической конференции «Современные информационные технологии и ИТ-образование» (Москва, 2011 год), на XVIII международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» МГУ (Москва, 2011 год), на XVI международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики» (Нижний Новгород, 2011 год), на финальном туре Шестнадцатого конкурса студенческих и аспирантских работ имени Августа Мебиуса НМУ (Москва, 2012 год), на XXI международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» МГУ (Москва, 2013 год), на 56-ой научной конференции МФТИ (Москва-Долгопрудный-Жуковский, 2013 год), на XXI международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» МГУ (Москва, 2014 год), на XII Сибирской научной школе-семинаре с международным участием «Компьютерная безопасность и криптография» (Екатеринбург, 2014 год), на 58-ой научной конференции МФТИ (Москва-Долгопрудный-Жуковский, 2015 год), на научных и учебных семинарах кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии СГУ им. Н.Г.Чернышевского.

Задача нахождения оптимальной эйлеровой реконструкции орграфов методом переориентации дуг отмечена медалью за лучшую научную студенческую работу по итогам открытого конкурса студентов по естественным, техническим и гуманитарным наукам в вузах РФ (приказ Федерального агентства по образованию №470 от 27 мая 2010 года).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [A1 - A13]. Работы автора [A8], [A12] и [A13] опубликованы в изданиях, включенных в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий» ВАК, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций. Имеется свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2010616499 от 2 августа 2010 года «Оптимальные эйлеровы реконструкции ориентированных графов» (см. [A5]).

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников. Полный ее объём – 127 страниц.

Содержание работы

Во **введении** содержатся основные определения, формулируется общая постановка задач диссертации, обосновывается актуальность темы исследования, дается характеристика методов исследования, перечень новых научных результатов, содержащихся в работе и выносимых на защиту, характеристика практической ценности и полезности работы, сведения об апробации результатов работы.

Первая глава посвящена рассмотрению оптимальных эйлеровых реконструкций ориентированных графов. В ней рассматриваются оптимальные эйлеровы реконструкции методом переориентации дуг, методом добавления дуг и методом удаления дуг. Решением каждой задачи является полиномиальный алгоритм, который имеет доказательство корректности и оптимальности.

Задача нахождения оптимальной эйлеровой реконструкции методом переориентации дуг формулируется следующим образом: дан произвольный связный орграф, необходимо путем переориентации минимального количества дуг преобразовать его в эйлеров.

Критерий существования решения задачи об оптимальной эйлеровой реконструкции сформулирован в следующей лемме.

Лемма 1.1. *Связный орграф $G = (V, \alpha)$ допускает эйлерову реконструкцию методом переориентации дуг тогда и только тогда, когда для любой его вершины $v \in V$ сумма $d^+(v) + d^-(v)$ четна.*

Балансом вершины v в орграфе $G = (V, \alpha)$ назовем число $bal(v) = d^+(v) - d^-(v)$. При этом вершина $v \in V$ считается положительной, отрицательной или нулевой в зависимости от соответствующего свойства числа $bal(v)$.

Следующий алгоритм строит оптимальную эйлерову реконструкцию орграфов методом переориентации дуг.

Алгоритм 1.1.

1. Если исходный орграф $G = (V, \alpha)$ не является связным или в нем существует хотя бы одна вершина $v \in V$, сумма степени исхода и степени захода которой нечетна, то данный орграф не допускает реконструкцию методом переориентации дуг. Выводится сообщение об этом и алгоритм завершает свою работу. Иначе переходим к пункту 2.

2. Преобразуем исходный связный орграф $G = (V, \alpha)$ в транспортную сеть $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ следующим образом:

— придаем каждой дуге $(u, v) \in \alpha$ пропускную способность $cap(u, v)$, равную 1;

— придаем каждой дуге $(u, v) \in \alpha$ стоимость $cost(u, v)$, равную 1;

— добавляем две новые вершины: источник s и сток t;

— для каждой положительной вершины $v \in V$ добавляем $\dfrac{|bal(v)|}{2}$ дуг (s, v), полагая их пропускную способность $cap(s, v)$ и цену $cost(s, v)$ равными 1;

— для каждой отрицательной вершины $v \in V$ добавляем $\dfrac{|bal(v)|}{2}$ дуг (v, t), полагая их пропускную способность $cap(v, t)$ и цену $cost(v, t)$ равными 1;

Получаем транспортную сеть $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$, в которой каждая дуга $(u, v) \in \beta$ имеет пропускную способность $cap(u, v)$ и цену $cost(u, v)$, равные 1.

3. Находим максимальный поток минимальной стоимости в построенной транспортной сети $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ между источником s и стоком t алгоритмом Басакера-Гоуэна (см. [44]).

4. Дуги в транспортной сети $N = (V \cup \{s,t\}, \beta)$, насыщенные потоком и соответствующие дугам исходного связного орграфа $G = (V, \alpha)$, переориентируем в орграфе $G = (V, \alpha)$. Полученный орграф является эйлеровым.

Асимптотическая сложность алгоритма 1.1 равна асимптотической сложности алгоритма Басакера-Гоуэна поиска максимального потока минимальной стоимости, который применяется в пункте 3. На данный момент известна реализация этого алгоритма за $O(|V|^4)$ (см. [44]). Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 1.3.

Задача нахождения оптимальной эйлеровой реконструкции методом добавления дуг формулируется следующим образом: дан произвольный орграф, необходимо путем добавления минимального количества дуг преобразовать его в эйлеров.

Орграф G — это множество компонент связности, из которых часть, быть может, является эйлеровыми компонентами связности, а остальные — неэйлеровыми. Пусть c — количество неэйлеровых компонент связности, а e — количество эйлеровых компонент связности в орграфе G.

Реконструкцию, содержащую среди всех реконструкций исходного орграфа минимальное количество добавленных дуг, назовем оптимальным добавлением по принципу путей (для краткости, ОДПП).

Доказательства следующих двух лемм дают конструктивный способ преобразования орграфа, у которого каждая компонента связности эйлерова, в эйлеров орграф, используя при этом минимальное количество добавленных дуг.

Лемма 1.2. *После нахождения произвольной реконструкции ОДПП возможно все c неэйлеровых компонент связности «соединить» в одну компоненту путем действий с добавленными дугами в дополнении* $\overline{G} = (V, \overline{\alpha} - \Delta)$ *исходного орграфа* $G = (V, \alpha)$.

После применения леммы 1.2 полученный орграф состоит из $e + 1$ компонент связности, e из которых были эйлеровыми компонентами в исходном орграфе $G = (V, \alpha)$. Эйлерову компоненту, которая получена после преобразований в лемме 1.2, назовем, для краткости, «базисной».

Лемма 1.3. *После нахождения произвольной реконструкции ОДПП и построения «базисной» компоненты возможно уменьшить количество компонент связности на* $\sum_{i=1}^{k}(l_i - 1) = m - k$, *где* k *— количество путей в найденной ОДПП,* $l_0, l_1, \cdots, l_{k-1}$ *— длины путей в найденной реконструкции ОДПП,* m *— количество дуг в найденной ОДПП,* $m = \sum_{i=1}^{k}(l_i - 1)$.

Алгоритм 1.2.

1. Если исходный орграф $G = (V, \alpha)$ является эйлеровым, то поставленная задача решена, следовательно, не производим никаких действий и алгоритм завершает свою работу. Иначе переходим к пункту 2.

2. Если в исходном орграфе $G = (V, \alpha)$ нет неэйлеровых компонент связности, то выбираем из каждой эйлеровой компоненты связности по одной вершине и добавляем цикл из e дуг, проходящий последовательно через все выбранные вершины. Полученный орграф стал эйлеровым орграфом, алгоритм завершает свою работу. Иначе переходим к пункту 3.

3. Преобразуем исходный орграф $G = (V, \alpha)$ следующим образом.

— придаем каждой дуге $(u, v) \in \alpha$ пропускную способность $cap(u, v) = 0$ и цену $cost(u, v) = 0$;

— к исходному орграфу $G = (V, \alpha)$ добавляем две новые вершины: источник s и сток t;

— для каждой отрицательной вершины v добавляем $|bal(v)|$ дуг (s, v), с пропускной способностью $cap(u, v) = 1$ и ценой $cost(u, v) = 1$;

— для каждой положительной вершины v добавляем $|bal(v)|$ дуг (v, t), с пропускной способностью $cap(u, v) = 1$ и ценой $cost(u, v) = 1$;

— в орграф $G = (V, \alpha)$ добавляем всевозможные дуги $(u, v) \in \beta$ из его дополнения $\overline{G} = (V, \overline{\alpha} - \Delta)$, полагая их пропускную способность $cap(u, v) = 1$ и цену $cost(u, v) = 1$.

Получаем транспортную сеть $N = (V \cup \{s\} \cup \{t\}, \beta)$.

4. Находим максимальный поток минимальной стоимости в построенной транспортной сети $N = (V \cup \{s, t\}, \beta)$ между источником s и стоком t алго-

ритмом Басакера-Гоуэна.

5. Дуги в транспортной сети $N = (V \cup \{s,t\}, \beta)$, насыщенные потоком и соответствующие дугам дополнения $\overline{G} = (V, \overline{\alpha} - \Delta)$ исходного орграфа $G = (V, \alpha)$, добавляем в орграф $G = (V, \alpha)$. После действия в этом пункте в полученном орграфе каждая компонента связности является эйлеровой.

6. «Присоединяем» все неэйлеровы компоненты связности и еще как максимум $m - k$ эйлеровых к «базисной» компоненте по схеме доказательства леммы 1.2 и леммы 1.3.

7. Добавляем еще $\max(e-m+k, 0)$ дуг, чтобы «присоединить» оставшиеся компоненты связности.

Асимптотическая сложность алгоритма 1.2 равна асимптотической сложности алгоритма Басакера-Гоуэна поиска максимального потока минимальной стоимости, который применяется в пункте 4. Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 1.6.

Задача нахождения оптимальной эйлеровой реконструкции методом удаления дуг формулируется следующим образом: дан произвольный орграф, необходимо методом удаления минимального количества дуг получить орграф, у которого каждая компонента связности является эйлеровой.

Следующий алгоритм строит оптимальную эйлерову реконструкцию орграфов методом удаления дуг.

Алгоритм 1.3.

1. Преобразуем исходный орграф $G = (V, \alpha)$ в транспортную сеть $N = (V \cup \{s,t\}, \beta)$ следующим образом.

— придаем каждой дуге $(u,v) \in \alpha$ пропускную способность $cap(u,v)$, равную 1;

— придаем каждой дуге $(u,v) \in \alpha$ стоимость $cost(u,v)$, равную 1;

— добавляем две новые вершины: источник s и сток t;

— для каждой положительной вершины $v \in V$ добавляем $|bal(v)|$ дуг (s,v), полагая их пропускную способность $cap(s,v)$ и цену $cost(s,v)$ равными 1;

— для каждой отрицательной вершины $v \in V$ добавляем $|bal(v)|$ дуг (v,t), полагая их пропускную способность $cap(v,t)$ и цену $cost(v,t)$ равными 1;

Получаем транспортную сеть $N = (V \cup \{s,t\}, \beta)$, в которой каждая дуга $(u,v) \in \beta$ имеет пропускную способность $cap(u,v)$ и цену $cost(u,v)$, равные 1.

2. Находим максимальный поток минимальной стоимости в построенной транспортной сети $N = (V \cup \{s,t\}, \beta)$ между источником s и стоком t алгоритмом Басакера-Гоуэна.

3. Дуги в транспортной сети $N = (V \cup \{s,t\}, \beta)$, насыщенные потоком и соответствующие дугам исходного орграфа $G = (V, \alpha)$, удаляем в орграфе $G = (V, \alpha)$. В полученном орграфе каждая компонента связности является эйлеровой.

Асимптотическая сложность алгоритма 1.3 равна асимптотической сложности алгоритма Басакера-Гоуэна поиска максимального потока минимальной стоимости, который применяется в пункте 2. Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 1.8.

Вторая глава посвящена рассмотрению Т-неприводимых расширений некоторых ориентированных графов. В ней рассматриваются ТНР для цепей, звезд, объединения цепей, многоугольных орграфов и ориентированных сверхстройных деревьев.

Следующий алгоритм позволяет построить ТНР, не изоморфное контуру C_{n+1}, для цепи P_n, где $n \geq 4$ (см. [A9, A10]).

Алгоритм 2.1. Дана цепь $P_n = (V, \alpha)$, при этом $n \geq 4$. Построим одно из ее ТНР $H = (W, \beta)$, такое что $H \ncong C_{n+1}$, следующим образом.

1. Добавим к P_n вершину w.

2. Добавим дуги (v_0, w) и (v_1, w).

3. Добавим дуги (w, v_{n-2}) и (w, v_{n-1}).

4. Для каждой вершины $v_i \in V$, где $2 \leq i \leq n-3$, добавим дуги (v_i, w) и (w, v_i).

Количество дуг $|\beta|$ в $H = (W, \beta)$ равно $(n-1) + 4 + 2(n-4) = 3n - 5$.

Асимптотическая сложность алгоритма 2.1 равна $O(n)$. Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 2.2.

Звезду с k листьями можно задать парой чисел l и m, где $d^+(c) = l$ и $d^-(c) = m$, при этом $l + m = k$.

Следующий алгоритм позволяет для звезды $S_{l,m}$ построить $\min(l, m)$ неизоморфных ТНР, содержащих $2(l + m) + 2$ дуг.

Алгоритм 2.2. Дана звезда $S_{l,m}$, в которой $l > 0$ и $m > 0$. Построим $\min(l, m)$ ее попарно неизоморфных ТНР следующим образом.

1. Добавим к звезде $S_{l,m}$ вершину w.

2. Выберем некоторое число q, такое что $1 \leq q \leq \min(l, m)$.

3. Выберем любые q листьев-источников. Для каждого листа-источника u, вошедшего в это выборку, добавим дугу (w, u). Для каждого листа-источника v, не вошедшего в эту выборку, добавим дугу (v, w).

4. Выберем любые q листьев-стоков. Для каждого листа-стока u, вошедшего в эту выборку, добавим дугу (u, w). Для каждого листа-стока v, не вошедшего в эту выборку, добавим дугу (w, v).

5. Добавим встречные дуги (c, w) и (w, c) между корнем c и вершиной w.

Асимптотическая сложность алгоритма 2.2 равна $O(l + m)$, так как за $O(1)$ требуется проанализировать каждую из $l + m + 1$ вершин звезды $S_{l,m}$. Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 2.3.

Следующий алгоритм позволяет построить минимальное ТНР для звезды $S_{l,m}$ (см. [A9, A10]).

Алгоритм 2.3. Дана звезда $S_{l,m}$. Построим ее минимальное ТНР $H = (W, \beta)$ следующим образом.

1. Добавим к звезде $S_{l,m}$ вершину w.

2. Для каждого листа-источника v_i добавим дугу (v_i, w).

3. Для каждого листа-стока v_i добавим дугу (w, v_i).

4. Добавим дугу (c, w).

Асимптотическая сложность алгоритма 2.3 равна $O(l + m)$.

Рассмотрим тип орграфов, являющихся объединением цепей $P^0_{n_0} = (V_0, \alpha_0)$, $P^1_{n_1} = (V_1, \alpha_1)$, $\cdots$, $P^{k-1}_{n_{k-1}} = (V_{k-1}, \alpha_{k-1})$. Пусть орграф $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P^i_{n_i}$ является объединением k цепей. В орграфе G существует $\sum_{i=0}^{k-1} n_i$ вершин и $\sum_{i=0}^{k-1}(n_i -$

$1) = \sum_{i=0}^{k-1} n_i - k$ дуг. Обозначим $\sum_{i=0}^{k-1} n_i$ через n.

Теорема 2.5 диссертации позволяет построить одно из ТНР для объединения цепей. Алгоритм 2.4 дает конструкцию минимального ТНР для объединения цепей (см. [A10]).

Алгоритм 2.4. Пусть орграф $G = \bigcup_{i=0}^{k-1} P_{n_i}^i$, является объединением k цепей $P_{n_i}^i = (V_i, \alpha_i)$, где $0 \le i \le k-1$. Тогда построим его минимальное ТНР $H = (W, \beta)$ следующим образом.

1. Добавим в орграф G вершину w.

2. Для каждого источника $v_{i,0} \in V_i$, где $0 \le i \le k-1$ добавим дугу $(w, v_{i,0})$.

3. Для каждого стока $v_{i,n_i} \in V_i$, где $0 \le i \le k-1$ добавим дугу (v_{i,n_i}, w).

Асимптотическая сложность алгоритма 2.4 оценивается как $O(n)$.

Многоугольным орграфом порядка n называется всякий орграф, полученный переориентацией некоторых дуг контура C_n. Под четными многоугольными орграфами будем понимать многоугольные орграфы с четным количеством вершин. Теорема 2.9 диссертации позволяет сконструировать одно из ТНР для четных многоугольных орграфов в явном виде. Для многоугольных орграфов общего вида, как четных, так и нечетных, предложен полиномиальный алгоритм, позволяющий построить их ТНР, имеющий асимптотическую сложность $O(n^3)$ (см. [A11, A12]).

Алгоритм 2.5. Дан многоугольный орграф $M = (Z, \gamma)$. Построим его ТНР следующим образом.

1. Добавим к M вершину w.

2. Для каждой вершины $v \in Z$ добавим дуги:

— если $v \in Z$ является источником, то добавим дугу (v, w);

— если $v \in Z$ является стоком, то добавим дугу (w, v);

— если $v \in Z$, такая что $d^+(v) = 1$ и $d^-(v) = 1$, то добавим дуги (v, w) и (w, v).

Орграф, построенный после вышеописанных пунктов, обозначим через $H_0 = (W, \beta_0)$. Положим $k = 0$;

Если $n \equiv 0 \pmod 2$, то есть многоугольный орграф M является четным, то завершаем работу алгоритма, так как построенный орграф H_0 является искомым ТНР. Иначе, в случае $n \equiv 1 \pmod 2$, переходим к следующему пункту алгоритма.

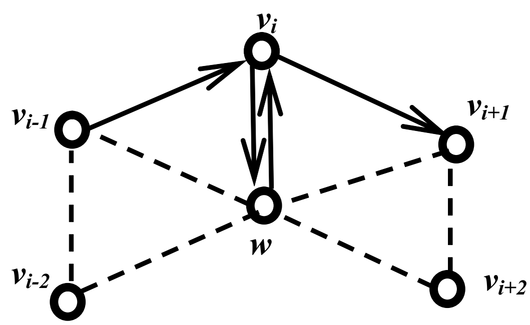

Рисунок 2.1. Иллюстрация п. 3 алгоритма 2.5

3. Рассматриваем вершины v_i, имеющие степень исхода и степень захода, равные 1, $d^+(v_i) = 1$ и $d^-(v_i) = 1$, в многоугольном орграфе M, в порядке возрастания их индексов.

Пусть, для определенности, вершины пронумерованы таким образом, что если рассматриваемая вершина $v_i \in Z$ в пункте 3 имеет степень исхода и степень захода, равные 1, то $\exists v_{i-1} \in Z : (v_{i-1}, v_i) \in \gamma$ и $\exists v_{i+1} \in Z : (v_i, v_{i+1}) \in \gamma$ (рис. 2.1). Также, по построению в пункте 2 алгоритма, вершина v_i соединена с вершиной w дугами (v_i, w) и (w, v_i). Возможны следующие случаи.

Случай A: многоугольный орграф M вкладывается в орграф $H_k - v_{i-1} - (w, v_i)$. Строим орграф $H_{k+1} = (W, \beta_{k+1})$, такой что $H_{k+1} = H_k - (w, v_i)$, $\beta_{k+1} = \beta_k - (w, v_i)$. Далее алгоритм продолжает работу с орграфом H_{k+1}, переходим к следующей вершине в пункте 3;

Случай B: многоугольный орграф M вкладывается в орграф $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$. Строим орграф $H_{k+1} = (W, \beta_{k+1})$, такой что $H_{k+1} = H_k - (v, w)$, $\beta_{k+1} = \beta_k - (v_i, w)$. Далее алгоритм продолжает работу с орграфом H_{k+1}, переходим к следующей вершине в пункте 3;

Случай C: многоугольный орграф M не вкладывается ни в орграф $H_k -$

$v_{i-1} - (w, v_i)$, ни в орграф $H_k - v_{i+1} - (v_i, w)$. Не производим никаких действий, переходим к следующей вершине в пункте 3;

После того, как все вершины рассмотрены, алгоритм завершает свою работу. Построенный из орграфа H_0 орграф H_k, где k — это количество дуг, удаленных в пункте 3 алгоритма, является ТНР для многоугольного орграфа M.

Доказательство корректности алгоритма приведено в теореме 2.10.

Теорема 2.11 и теорема 2.12 дают верхнюю и нижнюю оценки количества добавленных дуг в ТНР для многоугольных орграфов соответственно.

Дерево, в котором только одна вершина имеет степень больше 2, называется *сверхстройным* (или *звездоподобным*). На сверхстройное дерево можно смотреть как на объединение k цепей P_{n_0}, P_{n_1}, $\cdots$, $P_{n_{k-1}}$, где $k > 2$, с общей корневой вершиной. Корневую вершину обозначим через v_0. Вершины, принадлежащие цепи P_{n_i} длины n_i, $0 \leq i \leq k-1$, обозначим через $v_{i,j}$, $1 \leq j \leq n_i - 1$, где индекс j соответствует расстоянию вершины $v_{i,j}$ от концевой вершины v_0. Под *сверхстройным ордеревом* будем понимать ориентацию сверхстройного дерева, при которой каждое ребро ориентируется в направлении от корневой вершины v_0 к листьям: ребра $(v_0, v_{i,1})$, $0 \leq i \leq k-1$, будут ориентированы от вершины v_0 к вершине $v_{i,1}$, ребра $(v_{i,j}, v_{i,j+1})$, $0 \leq i \leq k-1$, $0 \leq j \leq n_i - 2$, от вершины $v_{i,j}$ к вершине $v_{i,j+1}$. Теорема 2.13 диссертации позволяет построить одно из ТНР для сверхстройных ордеревьев.

Список литературы

1. *Boesch F. and Tindell R.* Robbins's theorem for mixed multigraphs. // Am. Math. Monrhly 87 — 1980 — P. 716–719.

2. *Dutt S., Hayes J.P.* Designing fault-tolerant systems using automorphisms // J. Parallel Distrib. Comp. — 1991. — Vol. 12, № 3. — P. 249–268.

3. *Fan R.K. Chung, Michael R. Garey, Tarjan R.E.* Strongly connected orientations of mixed multigraphs. // Networks 15(4) — 1985 — P. 477–484

4. *Farrag A.A., Dawson R.J.* Designing optimal fault-tolerant star networks // Networks. — 1989. — Vol. 19. — P. 707–716.

5. *Graham N., Harary F., Livingstoun M.L., Stout Q.F.* Subcube fault tolerance in hypercubes // Inform. Comput. — 1993. — Vol. 102. — P. 280–314.

6. *Harary F., Hayes J.P.* Edge fault tolerance in graphs // Networks. — 1993. — Vol. 23. — P. 135–142.

7. *Harary F., Khurum M.* One node fault tolerance for caterpillars and starlike trees // Internet J. Comput. Math. — 1995. — Vol. 56. — P. 135–143.

8. *Harary F., Hayes J.P.* Node fault tolerance in graphs // Networks. — 1996. — Vol. 27. — P. 19–23.

9. *Hayes J.P.* A graph model for fault-tolerant computing system // IEEE Trans. Comput. — 1976. — Vol.C.-25, № 9. — P. 875–884.

10. *Hsu L.H., Lin C.K.* Graph Theory and Interconnection Networks. — New York : CRC Press, 2009.

11. *Hung C.N., Hsu L.H., Sung T.Y.* Christmas tree: a versatile 1-fault-tolerant design for token rings // Inform. Process. Lett. — 1999. — Vol. 72. — P. 55–63.

12. *Hung C.N., Hsu L.H., Sung T.Y.* On the construction of combined k-fault-tolerant hamiltonian graphs // Networks. — 2001. — Vol. 37, № 3. — P. 165–170.

13. *Kwan C.L., Toida S.* An optimal 2-FT realization of symmetric hierarchical tree systems // Networks. — 1982. — Vol. 12. — P. 231–239.

14. *Livingston M., Stout Q.* Distributing resources in hypercube computers // Proc. 3rd Cong. on Hypercube Concurrent Computers and Appl. — New York : ACM, 1988. — P. 222–231.

15. *Mukhopadhyaya K., Sinha B.P.* Hamiltonian graphs with minimum number of edges for fault-tolerant topologies // Inform. Process. Lett. — 1992. — Vol. 44. — P. 95–99.

16. *Paoli M., Wong W.W., Wong C.K.* Minimum k-hamiltonian graphs // J. Graph Theory. — 1984. — Vol. 8, № 1. — P. 155–165.

17. *Paoli M., Wong W.W., Wong C.K.* Minimum k-hamiltonian graphs II // J. Graph Theory. — 1986. — Vol. 10, № 1. — P. 79–95.

18. *Sung T.Y., Ho T.Y., Chang C.P., Hsu L.H.* Optimal k-fault-tolerance network for token rings // J. Inform. Science and Engineering. — 2000. — № 16. — P. 381–390.

19. *Sung T.Y., Lin C.Y., Chuang Y.C., Hsu L.H.* Fault tolerant token ring embedding in double loop networks // Inform. Process. Lett. — 1998. — Vol. 66. — P. 201–207.

20. *Wang J.J., Hung C.N., Hsu L.H.* Optimal 1-hamiltonian graphs // Inform. Process. Lett. — 1998. — Vol. 65, № 3. — P. 157–161.

21. *Wang J.J., Hung C.N., Tan J.J.M., Hsu L.H., Sung T.Y.* Construction schemes for fault-tolerant hamiltonian graphs // Networks. — 2000. — Vol. 35, № 3. — P. 233–245.

22. *Абросимов М.Б.* О неизоморфных оптимальных 1-отказоустойчивых реализациях некоторых графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений.— Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. — Вып. 3. — С. 3–10.

23. *Абросимов М.Б.* Некоторые вопросы о минимальных расширениях графов // Изд-во Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2006. — Т. 6, вып. 1/2. — С. 86–91.

24. *Абросимов М.Б., Долгов А.А.* Точные расширения некоторых турниров // Вестн. Томск. гос. ун-та. Приложение. — 2007. — № 23. — С. 211–216.

25. *Абросимов М.Б., Долгов А.А.* Семейства точных расширений турниров // Прикладная дискретная математика. — 2008. — № 1. — С. 101–107.

26. *Абросимов М.Б.* О сложности некоторых задач, связанных с расширениями графов // Матем. заметки, 2010. Т.88., № 5. — С. 643–650.

27. *Абросимов М.Б.* Минимальные вершинные расширения направленных звезд // Дискрет. матем. — 2011. — Т. 23, № 2. — С. 93–102.

28. *Абросимов М.Б.* О нижней оценке числа ребер минимального реберного 1-расширения сверхстройного дерева // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2011. — Т. 11, вып. 3, ч. 2. — С. 111–117.

29. *Абросимов М.Б.* Графовые модели отказоустойчивости. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2012. — 192 С.

30. *Богомолов А.М., Салий В.Н.* Алгебраические основы теории дискретных систем. — М.: Наука. Физматлит, 1997.

31. *Кабанов М.А.* Функциональные конгруэнции ориентированных графов // Упорядоченные множества и решетки. Саратов: Сигма-плюс, 1995. Вып. 11.

32. *Кабанов М.А.* Об отказоустойчивых реализациях графов // Теоретические задачи информатики и ее приложений. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 1997. — Вып. 1. – С. 50–58.

33. *Кабанов М.А.* О конгруэнциях ориентированных графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во «Колледж», 1998. Вып. 2.

34. *Киреева А.В.* О конгруэнциях и автоморфизмах корневых деревьев // Теория полугрупп и ее приложения. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1991. Вып. 10.

35. *Киреева А.В.* Отказоустойчивость в функциональных графах // Упорядоченные множества и решетки. Саратов: Сигма-плюс, 1995. Вып. 11.

36. *Кормен Т., Лейзерсон Ч., Риверс Р.* Алгоритмы: построение и анализ. М.: МЦНМО, 1990.

37. *Курносова С.Г.* Построение Т-неприводимых расширений для класса полных бинарных деревьев // Вестн. молодых ученых «Ломоносов». — М. : МАКС Пресс, 2006. — Вып. III. — С. 58–66.

38. *Курносова С.Г.* Т-неприводимые расширения графов.: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.09 / Курносова Светлана Геннадьевна — Саратов, 2007. — 137 С.

39. *Мирзаянов М.Р.* Сильно связные конгруэнции ориентированных графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложений. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006. Вып. 7.

40. *Пархоменко П.П.* Передача сообщений в неисправных гиперкубах с использованием исправных подкубов // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 10. — С. 171–182.

41. *Салий В.Н.* Доказательства с нулевым разглашением в задачах о расширении графов // Вестник Томского гос. ун-та. Приложение. 2003. №6

42. *Салий В.Н.* Оптимальные реконструкции графов // В кн.: Современные проблемы дифференциальной геометрии и общей алгебры. — Саратов; Изд-во Сарат. ун-та, 2008. — С. 59–65.

43. *Салий В.Н.* Упорядоченное множество связных частей многоугольного графа // Известия Сарат. гос. ун-та. — 2013. — Т. 13, вып. 2. — С. 44–51.

44. *Седжвик Р.* Фундаментальные алгоритмы на C++. Алгоритмы на графах: Пер. с англ. — СПб.: «ДиаСофтЮП», 2002.

Публикации автора по теме диссертации.

А1. *Гавриков А.В.* Оптимальная переориентация дуг орграфа, приводящая к эйлерову орграфу // Наука и образование: проблемы и перспективы: Материалы 11-й региональной науч.-практ. конференции аспирантов, студентов и учащихся (Бийск, 15-16 мая 2009 г.). В 2-х частях. — С. 271–273.

А2. *Гавриков А.В.* Оптимальная квазиэйлерова реконструкция орграфа путем удаления дуг // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета: Материалы итог. студ. науч. конф. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. — С. 52-54.

А3. *Гавриков А.В.* Оптимальная эйлерова реконструкция орграфа путем добавления дуг // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы науч. конф. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2010. — С. 41–45. — ISBN 978-5-292-03935-8.

А4. *Гавриков А.В.* Оптимальные эйлеровы реконструкции орграфов // Саратов, гос. ун-т. — Саратов, 2010. 27 С. Деп. в ВИНИТИ, № 734-В.

А5. *Гавриков А.В.* Оптимальные эйлеровы реконструкции ориентированных графов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2010616499, выданное Роспатентом. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 30 сентября 2010 г.

А6. *Гавриков А.В.* Некоторые оптимальные эйлеровы реконструкции ориентированных графов // Ломоносов-2011: Материалы XVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция «Вычислительная математика и кибернетика»; 11-15 апреля; Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК: Сборник тезисов. — М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ (лицензия ИД 05899 от 24.09.2001), 2011. — С. 14–15. — ISBN 978-5-89407-450-4

А7. *Гавриков А.В.* О минимальных эйлеровых реконструкций ориентированных графов // Проблемы теоретической кибернетики. Материалы XVI Международной конференции (Нижний Новгород, 20-25 июня 2011 г.). — Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2011. — С. 113–114.

— ISBN 978-5-91326-161-8.

A8. *Гавриков А.В.* Оптимальная эйлерова реконструкция ориентированных графов методом добавления дуг // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12 вып. 1. — С. 102–109. — ISSN 1814-733X, ISSN 1816-9791.

A9. *Гавриков А.В.* Т-неприводимые расширения для некоторых типов орграфов и их объединений // Труды 56-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе», Всероссийской молодежной научно-инновационной конференции «Физико-математические науки: актуальные проблемы и их решения». Управление и прикладная математика. Том 1. — М.: МФТИ, 2013. — С. 27-28. — ISBN 978-5-7417-0493-6.

A10. *Гавриков А.В.* Т-неприводимые расширения объединений некоторых типов орграфов // Прикладная дискретная математика, № 4 (22), 2013 г. Издательство ТГУ. — С. 47–56.

A11. *Гавриков А.В.* Алгоритм построения Т-неприводимого расширения для многоугольных орграфов // Прикладная дискретная математика. Приложение. — 2014. — № 7. — С. 124-126. — ISSN 2226-308X.

A12. *Гавриков А.В.* Т-неприводимые расширения для многоугольных орграфов // Известия вузов. Математика. — 2016. — № 2. — С. 18–23.

A13. *Гавриков А.В.* Т-неприводимые расширения для ориентированных сверхстройных деревьев // Прикладная дискретная математика. № 4 (34), 2016 г. Издательство ТГУ. — С. 74–80.