На правах рукописи

Исаев Константин Петрович

Представление функций рядами экспонент

01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Уфа – 2021

Работа выполнена в Институте математики с вычислительным центром — обособленном структурном подразделении ФГБНУ УФИЦ РАН

Научный консультант: доктор физико–математических наук, профессор **Юлмухаметов Ринад Салаватович**

Официальные оппоненты:

Белов Юрий Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет»

Брайчев Георгий Генрихович
доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет»

Шерстюков Владимир Борисович
доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ»

Ведущая организация:
ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет».

Защита состоится «____» ____________ 2021 г. в ____ часов на заседании диссертационного совета Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, д. 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук, http://www.pdmi.ras.ru.

Автореферат разослан «____» ____________ 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Зайцев А.Ю.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ДИССРТАЦИИ

Актуальность темы исследования. Диссертация посвящена вопросам о представлении функций рядами по системам экспонент $\{e^{\lambda_k z}\}$:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}.$$

Исторически сначала изучались системы экспонент с вещественными показателями $\{\lambda_k\}$, но впоследствии теория рядов по системам экспонент с комплексными показателями оказалась более содержательной. Основные результаты по рядам экспонент, полученные исключительно аналитическим методами, изложены в монографии А. Ф. Леонтьева ([20]).

Начиная с 70-х годов прошлого века в теории рядов экспонент стали активно применяться методы функционального анализа и стало возможным изучение вопросов представления рядами экспонент функций из различных локально выпуклых подпространств $H(D)$, где $H(D)$ — пространство функций аналитических в выпуклой области $D \subset \mathbb{C}$ (с топологией равномерной сходимости на компактах из D). Большей частью изучались проективные пределы весовых нормированных пространств вида

$$H(D, \varphi) = \left\{ f(z) \in H(D) : \ \|f\| := \sup_{z \in D} |f(z)| e^{-\varphi(z)} < \infty \right\},$$

где D — ограниченная выпуклая область комплексной плоскости и φ — неотрицательная выпуклая функция в этой области. В меньшей степени — индуктивные пределы пространств вида

$$H(D, \mathcal{M}) = \left\{ f \in H(D) : \ \sup_{n \in \mathbb{N}} \sup_{z \in D} |f^{(n)}(z)| M_n^{-1} < \infty \right\},$$

где $\mathcal{M} = (M_n)_{n=1}^{\infty}$ — логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел.

Характерные результаты в этом направлении изложены в работе Ю. Ф. Коробейника ([19]). Далее будем пользоваться понятием представляющих систем из этой работы. Система элементов e_n, $n \in \mathbb{N}$, в локально выпуклом пространстве X называется представляющей, если любой элемент этого пространства представляется в виде ряда

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n e_n,$$

сходящегося в топологии пространства X. Если для каждого элемента это представление единственное, то представляющая система становится базисом. Если представляющая система не является базисом, то некоторая часть элементов этой системы может быть удалена, а оставшаяся часть продолжает быть представляющей в пространстве X, то есть представляющие системы, не являющиеся базисом, обладают некоторой избыточностью. Таким образом, в задаче о построении представляющих систем возникает дополнительный вопрос об оценке степени избыточности системы.

Вследствие систематического применения методов функционального анализа в проблеме представления функций рядами экспонент явным образом выяснилось, что эта задача распадается на две аналитические задачи:
1. конструкция целых функций с заданными асимптотическими свойствами;
2. описание сопряженных пространств в терминах преобразований Фурье–Лапласа.

Здесь мы имеем в виду метод, основанный на понятии достаточного множества для локально выпуклого пространства целых функций, введенного Л. Эренпрайсом.

Задача о существовании и конструировании целых функций с заданными асимптотическими свойствами возникла как внутренняя задача теории целых функций. В наиболее общем виде такая задача решена В. С. Азариным в 1969 году. В 1985 г. теорема В. С. Азарина была существенно уточнена Р. С. Юлмухаметовым. Теоремы В. С. Азарина и Р. С. Юлмухаметова не могут быть непосредственно применены в вопросах разложения в ряды экспонент. Дополнительно нужно иметь некоторую разделенность нулей целой функции. Кроме того, для аппроксимируемой субгармонической функции обычно выполняются дополнительные хорошие свойства, что позволяет получать более точные результаты.

Пусть E — линейное топологическое подпространство пространства $H(D)$ на некоторой ограниченной выпуклой области плоскости, E^* — сильно сопряженное к нему пространство. Если система экспонент $\{e^{\lambda z},\ \lambda \in \mathbb{C}\}$, полна в пространстве E, то преобразование Фурье–Лапласа $\mathcal{L} : S \longmapsto \widehat{S}$, определяемое как $\widehat{S}(\lambda) = S(e^{\lambda z})$, $S \in E^*$, линейно и взаимно однозначно отображает пространство E^* в некоторое линейное подпространство $\widehat{E}$ пространства целых функций $H(\mathbb{C})$. Рассматривая в пространстве $\widehat{E}$ наведенную топологию, будем считать, что $\mathcal{L}$ является линейным топологическим изоморфизмом. Результаты об описании пространства $\widehat{E}$ с помощью весовых полунорм оказываются полезными во многих вопросах комплексного анализа. Такого рода теорем для случая, когда E — нормированное пространство, мало. Например, в работах Б. Я. Левина, Ю. И. Любарского, В. И. Луценко, Р. С. Юлмухаметова, К. П. Исаева описаны сопряженные для пространства Смирнова и Бергмана. Локально выпуклые пространства, являющиеся проективным пределом нормированных пространств, исследовались чаще, например, в работах В. В. Напалкова, О. В. Епифанова, Н. Ф. Абузяровой, Р. С. Юлмухаметова.

Представление рядами экспонент в локально выпуклых ненормированных пространствах рассматривалось, например, в работах А. Ф. Леонтьева, В. В. Напалкова, Р. С. Юлмухаметова, Ю. Ф. Коробейника, А. В. Абанина.

В пространствах нормированного типа более естественным оказалось не просто разложение в ряды экспонент, а изучение безусловных базисов из экспонент. Мы придерживаемся следующего определения. Базис $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в нормированном пространстве называется безусловным базисом, если для любого элемента

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$$

выполняется соотношение

$$\|x\|^2 \asymp \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 \|e_n\|^2.$$

Понятие базиса Рисса обозначает образ ортонормированного базиса при ограниченном обратимом операторе. Безусловный базис $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ становится базисом Рисса тогда и только тогда, когда $0 < \inf ||e_k|| \le \sup ||e_k|| < \infty$.

Б. Я. Левиным и Ю. И. Любарским были построены безусловные базисы из экспонент в пространствах Смирнова на выпуклых многоугольниках. Этот значительный результат Ю. И. Любарскому удалось перенести на случай пространств Смирнова на областях с гладкой границей, но с ослаблением нормы. А именно, были построены базисы в пространстве Смирнова на ограниченной выпуклой области с гладкой границей, ряд по этому базису суммируется по норме большего гильбертова пространства. В. И. Луценко доказал, что безусловных базисов из экспонент в пространствах Смирнова на ограниченной выпуклой области с гладкой дугой на границе не существует.

Р. А. Башмаковым и Р. С. Юлмухаметовым рассматривалась задача о существовании безусловных базисов из экспонент $\{e^{\lambda_k t}\}_{k=1}^{\infty}$ в гильбертовых пространствах

$$L^2((-1;1),h) = \left\{ f \in L_{\mathrm{loc}}(-1,1) : ||f||^2 = \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\, dt < \infty \right\},$$

где h — выпуклая функция на $(-1,1)$. Было доказано, что если для любого $\alpha > 0$ выполняется соотношение $e^{h(t)}(1-|t|)^{\alpha} \to \infty,\ |t| \to 1$, то в пространстве $L^2((-1;1),h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

В классическом случае, когда $h(t) \equiv 0$, базисы из экспонент рассматривались в виде возмущений классической системы Фурье, образующей ортонормированный базис в этом пространстве. Наиболее точный результат в этом направлении — это теорема М. И. Кадеца. Другое направление исследований связано с методом описания множества показателей базиса как нулей целой функции с определенными свойствами. В этом направлении работали многие математики, например, Б. Я. Левин, В. Э. Кацнельсон, С. А. Авдонин, Б. С. Павлов, Н. К. Никольский, С. В. Хрущев. Проблеме базисности систем экспонент в пространствах Соболева посвящены работы таких математиков, как С. А. Авдонин, С. А. Иванов, D. L. Russell.

С темой безусловных базисов из экспонент тесно связана задача о безусловных базисах из значений воспроизводящего ядра в гильбертовых пространствах целых функций.

Пусть E — некоторое гильбертово пространство целых функций, в котором все точечные функционалы $\delta_z: \ f \to f(z)$ ограничены. В силу самосопряженности каждый точечный функционал порождается элементом $K_z \in E$:

$$F(z) = (F, K_z)_E, \ F \in E.$$

Функция $K_z(w) := K(w,z)$ называется воспроизводящим ядром пространства E.

Связь между безусловными базисами из экспонент и из значений воспроизводящих ядер устанавливается с помощью преобразования Фурье–Лапласа. Пусть $E(D)$ — некоторое гильбертово пространство функций на множестве D, причем система всех экспонент $\{e^{\lambda z}, \ \lambda \in \mathbb{C}\}$, полна в пространстве $E(D)$. Функционалы, порождаемые экспонентами $e^{\lambda z}$, отображаются в значения воспроизводящего ядра $K(w,\lambda)$ пространства $\widehat{E}(D)$. Таким образом, безусловный базис из экспонент в пространстве $E(D)$ отображается в безусловный базис из значений воспроизводящего ядра в пространстве $\widehat{E}(D)$. По этой схеме классической системе Фурье в пространстве $L_2(-1;1)$, например, соответствует безусловный базис из значений воспроизводящих ядер в пространстве Пэли–Винера.

Проблеме существования и конструирования безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в пространствах типа Фока

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ F \in H(\mathbb{C}) : \ \int\limits_{\mathbb{C}} |F(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)} \, dm(\lambda) < \infty \right\},$$

где $\varphi(\lambda)$ — субгармоническая функция на комплексной плоскости, посвящены работы таких, например, математиков, как K. Seip, R. Wallsten, R. Dhuez, K. Kellay, A. Dumont, A. Hartmann, Y. Omari, А. Д. Баранов, А. А. Боричев, Ю. С. Белов, Ю. И. Любарский.

Цели диссертационной работы. Основными целями диссертации являются:

1) получить теоремы об аппроксимации субгармонических функций логарифмом модуля целой функции, которые могут применяться в вопросах разложения в ряды экспонент;

2) по данным нормированным пространствам $H(D,\varphi)$ и $H(D,\mathcal{M})$ построить соответствующие локально выпуклые пространства аналитических в области D функций, допускающие представляющие системы из экспонент. Описать избыточность этих систем;

3) доказать теоремы о представлении функций из пространств $H(D,\varphi)$ и $H(D,\mathcal{M})$ в виде рядов экспонент, сходящихся в ослабленной норме;

4) получить условия отсутствия безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в гильбертовых пространствах целых функций;

5) для пространств типа Фока $\mathcal{F}_\varphi$ исследовать некоторые вопросы существования и конструирования безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра;

6) для весовых пространств $L^2((-1;1),h)$ исследовать вопрос о существовании безусловных базисов из экспонент в случае весов, растущих не быстрее степенных.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1) Доказана теорема о существовании целой функции, логарифмически приближающей достаточно гладкую субгармоническую функцию и имеющей разделенное множество нулей.

2) Доказана теорема о существовании целой функции, логарифмически приближающей субгармоническую функцию, удовлетворяющей условию Липшица.

3) По нормированному равномерно весовому пространству $H(D,\varphi)$ определяются специальный индуктивный предел $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ нормированных пространств и специальный проективный предел $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ нормированных пространств. Доказано, что $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ — это наименьшее локально выпуклое пространство, содержащее $H(D,\varphi)$ и инвариантное относительно дифференцирования, а $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ — это наибольшее локально выпуклое пространство, содержащееся в $H(D,\varphi)$ и инвариантное относительно дифференцирования. В пространствах $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ и $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ построены представляющие системы экспонент и дана оценка избыточности этих систем. Аналогичные результаты получены для пространства $H(D,\mathcal{M})$.

4) Для пространств $H(D,\varphi)$ и $H(D,\mathcal{M})$ построены системы экспонент, сходящиеся в ослабленной норме.

5) Получены условия, при которых отсутствуют безусловные базисы из воспроизводящих ядер в функциональных гильбертовых пространствах целых функций, устойчивых относительно деления.

6) Доказано существование сколь угодно медленно растущих функций $\varphi(r)$, для которых $\ln r = o(\varphi(r))$, $r \longrightarrow \infty$, и в пространстве типа Фока $\mathcal{F}_\varphi$, $\varphi(\lambda)=\varphi(|\lambda|)$, нет безусловных базисов из воспроизводящих ядер.

7) Построены безусловные базисы из воспроизводящих ядер в пространствах типа Фока $\mathcal{F}_\varphi$ в случае нерадиальной весовой функции φ, сравнимой с $\ln^2(|z|+1)$. Метод построения позволяет получать безусловные базисы из воспроизводящих ядер в пространствах с весами, растущими медленнее $\ln^2(|z|+1)$.

8) Доказано, что в пространстве $L^2((-1;1),h)$ с весовой функцией $h(t) = -\alpha\ln(1-|t|)$, $t\in(-1;1)$, $\alpha>0$, безусловных базисов из экспонент не су-

ществует. Построены примеры выпуклых функций h на интервале $(-1;1)$ сколь угодно медленного роста на концах интервала, таких что в пространстве $L^2((-1;1),h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Методика исследования. В работе используются методы функционального анализа и аналитические методы из теории целых и субгармонических функций.

Теоретическая и практическая ценность. Полученные в диссертации результаты носят теоретический характер и дополняют исследования задач о представляющих системах экспонент в локально выпуклых пространствах и их избыточности, а также о безусловных базисах из экспонент и воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах. Интерес к данным представлениям связан в первую очередь с их потребностью в таких областях как (не)квазианалитичность, спектральный синтез, теория уравнений свертки, исследование систем собственных функций дифференциальных операторов, интерполяции и др.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на семинарах:

1. Санкт-Петербургский семинар по теории операторов и теории функций, ПОМИ, г. Санкт-Петербург, руководитель академик РАН С. В. Кисляков.

2. Городской семинар им. А.Ф. Леонтьева по теории функций, БашГУ, г. Уфа, руководитель профессор Р. С. Юлмухаметов.

3. Семинар по теории функций и комплексному анализу, Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, г. Уфа, руководитель член–корр. РАН В. В. Напалков.

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

1. 20th Summer St. Petersburg Meeting In Mathematical Analysis, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia, June 24–29, 2011.

2. VI Уфимская международная конференция "Комплексный анализ и дифференциальные уравнения г. Уфа, 3–7 октября 2011 г.

3. Международная научная конференция "Нелинейный анализ и спектральные задачи г. Уфа, 18–22 июня 2013 г.

4. Одиннадцатая международная Казанская летняя научная школа–конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы г. Казань, 22–28 августа 2013 г.

5. Международная научная конференция "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ г. Уфа, 24–26 сентября 2014 г.

6. Международная научно-практической конференция "Комплексный анализ и его приложения г. Брянск, 16–19 июня 2015 г.

7. Международная конференция "Спектральные задачи, нелинейный и комплексный анализ г. Уфа, 1–3 октября 2015 г.

8. Международная конференции по алгебре, анализу и геометрии, посвя-

щенная юбилеям П.А. и А.П. Широковых, г. Казань, 26 июня – 2 июля 2016 г.

9. Уфимская международная математическая конференция, г. Уфа, 27–30 сентября 2016г.

10. Международная математическая конференция по теории функций, посвященная 100-летию чл.–корр. АН СССР А.Ф. Леонтьева, г. Уфа, 24–27 мая 2017 г.

11. Complex Analysis and Related Topics, Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, Russia, April 23–27, 2018.

12. Международная школа-конференция "Комплексный анализ и его приложения филиал ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», г. Геленджик, 02–09 июня 2018 г.

13. Международная конференция "Современные методы теории краевых задач"(Понтрягинские чтения — XXIX), МГУ, г. Москва, 2–6 мая 2018 г.

14. Международная конференция "Комплексный анализ и теория аппроксимаций г. Уфа, 29–31 мая 2019 г.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 17 работ в изданиях, входящих в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК, или в ведущих рецензируемых иностранных научных изданиях. ([1]–[17]). Из совместных работ ([1]–[8], [10], [13], [15]–[17]) в диссертацию включены только результаты автора.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, содержащего 79 наименований. Общий объем диссертации — 276 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во Введении излагается история вопроса, приведен краткий обзор литературы по теме диссертации, излагается краткое содержание работы, сформулированы основные результаты, которые выносятся на защиту.

Первая глава диссертации посвящена конструированию целых функций со свойствами, необходимыми при применениях в теории рядов экспонент.

Через $B(z,t)$ мы обозначаем открытый круг с центром в точке z радиуса t. Для меры μ через $\mu(z,t)$ мы обозначаем μ-меру круга $B(z,t)$ и пусть $\mu(t) = \mu(0,t)$. Запись $A(x) \asymp B(x),\ x \in X$, для положительных функций A, B означает, что для некоторых констант $C, c > 0$ для всех $x \in X$ выполняются оценки $cB(x) \le A(x) \le CB(x)$, символ $A(x) \prec B(x),\ x \in X$, $(A(x) \succ B(x),\ x \in X)$, означает существование константы $C > 0$, такой что $A(x) \le CB(x)$ $(B(x) \le CA(x))$. Для целой функции L через $N(L)$ будем обозначать множество нулей функции L.

В диссертации доказана теорема о существовании целой функции, логарифмически приближающей достаточно гладкую субгармоническую функцию и имеющей разделенное множество нулей.

Теорема 1.1. *Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, имеющая конечный тип при порядке роста ρ, μ — мера, ассоциированная с ней по Риссу. Если для некоторых $a,\ \alpha > 0$, для всех точек $z \in \mathbb{C}$ выполняется условие*

$$\mu(z,t) \le a(|z|+1)^{\alpha} t,\ t \in (0;(|z|+1)^{-\alpha}),$$

то существует целая функция f с простыми нулями λ_n, такими что при некоторых $\delta > 0, \beta \ge 0$ круги $B_n(\delta) = B(\lambda_n, \delta(|\lambda_n|+1)^{-\beta})$ попарно не пересекаются и сама функция для некоторых постоянных A, B удовлетворяет соотношениям

$$|u(\lambda) - \ln|f(\lambda)|| \le A\ln(|\lambda|+e),\ \lambda \notin \bigcup_n B_n(\delta),$$

$$\ln|f'(\lambda)| \ge u(\lambda) - B\ln(|\lambda|+e),\ n \in N(f).$$

Постоянные A, B зависят от ρ, α, a и не зависят от конкретного вида функции u.

В диссертации целые функции с асимптотическими свойствами применяются в качестве порождающих функций представляющих систем экспонент в локально выпуклых пространствах, связанных с весовыми нормированными пространствами $H(D,\varphi)$ и $H(D,\mathcal{M})$. Для этих целей целые функции должны асимптотически аппроксимировать сопряженную по Юнгу

$$\widetilde{\varphi}(\lambda) = \sup_{z\in D}(\mathrm{Re}\ \lambda z - \varphi(z)),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

к весовой функции φ (в случае пространств $H(D,\varphi)$) или функции вида

$$H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|),\ \lambda \in \mathbb{C},$$

где $H_D(\lambda) = \max_{z\in\overline{D}} \mathrm{Re}\ \lambda z$ — опорная функция области D, $T(r) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{r^n}{M_n}$, $r \ge 0$, — функция следа последовательности $\mathcal{M} = (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (в случае пространств $H(D,\mathcal{M})$).

Поскольку функции вида $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяют условию Липшица, то, в частности, их ассоциированные меры удовлетворяют условию

$$\mu(z,t) \le Mt,\ z \in \mathbb{C},\ t \ge 0.$$

Это обстоятельство позволяет существенно уточнить теорему 1.1.

Теорема 1.2. *Пусть u — субгармоническая функция на плоскости, μ — мера, ассоциированная с ней по Риссу. Если для некоторого $M > 0$ для всех точек $z \in \mathbb{C}$ выполняется условие*

$$\mu(z,t) \le Mt,\ t \in (0;1),$$

то существует целая функция f с простыми нулями λ_n, такими что при некотором $\delta \in (0;1)$ круги $B_\delta(\lambda_n) = B(\lambda_n, \delta(|\lambda_n|+1)^{-1})$ попарно не пересекаются и сама функция удовлетворяет соотношению

$$|\ln|f(\lambda)| - u(\lambda)| \le A\ln(|\lambda|+1) + C,\ \lambda \notin \bigcup_n B_\delta(\lambda_n),$$

а производная оценке

$$|\ln|f'(\lambda)| - u(\lambda)| \le A\ln(|\lambda|+1) + C',\ \lambda \in N(f),$$

при этом постоянная $A > 0$ не зависит от M и функции u, а постоянные C, C', δ зависят от M, но не зависят от функции u.

Для приближения функций вида $H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|)$ можно было бы воспользоваться теоремой 1.2, но в применениях требуется раздельная аппроксимация слагаемых. Можно было бы применить теорему 1.2 к каждому из слагаемых (каждое из них удовлетворяет условию Липшица). Но при этом пропадает важное свойство — разделенность множества нулей. Поэтому в диссертации доказывается отдельная теорема о "раздельной" аппроксимации.

Теорема 1.3. *Пусть u_j — субгармонические функции на плоскости, μ_j, $j = 1, 2$, — меры, ассоциированные с ними по Риссу, для некоторого $M > 0$ удовлетворяющие условию*

$$\mu_j(z,t) \le Mt,\ t \in (0;1),$$

а мера μ_2, кроме того, удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty \frac{\mu_2(r)\,dr}{r^2} < \infty.$$

Тогда существуют целые функции f_j, $j = 1, 2$, такие что все нули произведения $f = f_1 f_2$ простые, при некотором $\delta > 0$ круги $B_\delta(\lambda) = B(\lambda, \delta(|\lambda|+1)^{-1})$, $\lambda \in N(f)$, попарно не пересекаются, и для некоторых постоянных $B, C, C' > 0$ выполняются соотношения

$$|\ln|f_j(\lambda)| - u_j(\lambda)| \le B\ln(|\lambda|+1) + C,\ \lambda \notin \bigcup_{z\in N(f_j)} B_\delta(z),$$

$$|\ln|f_j'(\lambda)| - u_j(\lambda)| \le B\ln(|\lambda|+1) + C',\ \lambda \in N(f_j),$$

при этом постоянная $B > 0$ не зависит от M и функций u_j, а постоянные C, C', δ зависят от M, но не зависят от функций u_j.

Целых функций, имеющих асимптотические оценки логарифмической точности, в качестве инструмента для изучения безусловных базисов уже не достаточно. Для медленно растущих субгармонических функций удается построить аппроксимирующие целые функции с более точными оценками.

Теорема 1.7. *Пусть ассоциированная мера μ радиальной субгармонической функции u, $u(0) = 0$, удовлетворяет условию: для некоторого $a > 1$*

$$\mu(at) - \mu(t) \asymp 1, \ t > 0.$$

Тогда существует целая функция L с простыми нулями в точках w_n, так что

1) для достаточно малых $\sigma > 0$ круги $B_n(\sigma) := \{z : |z - w_n| \le \sigma |w_n|\}$, $n = 0, 1, 2, \ \dots$, попарно не пересекаются;

2) имеет место соотношение

$$|L(z)| \asymp \frac{\text{dist }(z, W)}{1 + |z|} e^{u(z)}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Теорема 1.8. *Пусть ассоциированная мера μ радиальной субгармонической функции u представляется в виде*

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n,$$

где μ_n — неотрицательные борелевские меры с массой $\mu_n(\mathbb{C}) = 1$ с носителями в непересекающихся кольцах $\{z : \ R_n \le |z| \le R'_n\}$, при этом последовательность R_n возрастающая, $2R_n \le R_{n+1}$ и $\frac{R'_n}{R_n} \le c < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Определим последовательность r_n, $n \in \mathbb{N}$, из равенств

$$\int\limits_{R_n}^{R'_n} \ln t \, d\mu(t) = \ln r_n, \ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для произвольных φ_n, $w_n = r_n e^{i\varphi_n}$, целая функция

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{w_n}\right)$$

удовлетворяет условиям

1) для достаточно малых $\sigma > 0$ круги $B_n(\sigma) := \{z : |z - w_n| \le \sigma |w_n|\}$, $n = 0, 1, 2, \ \dots$, попарно не пересекаются;

2) имеет место соотношение

$$|L(z)| \asymp \frac{\text{dist }(z, W)}{1 + |z|} e^{u(z)}, \ z \in \mathbb{C}.$$

Как уже отмечалось выше, конструирование представляющих систем экспонент в равномерно аналитических пространствах с помощью достаточных множеств приводит к двум аналитическим задачам — построение целых функций с заданной асимптотикой и разделенным множеством нулей и описание сопряженного пространства с помощью преобразования Фурье–Лапласа в терминах равномерно весовых норм. Первая из этих аналитических задач рассмотрена в первой главе диссертации. Второй задаче посвящены параграфы 2.1 и 2.2 второй главы.

Опишем отличие нашего подхода к задаче от подхода в предыдущих работах. Обычно рассматривались проективные пределы равномерно весовых пространств $H(D,\varphi_j)$ с убывающей последовательностью выпуклых весовых функций φ_j. Неизбежная избыточность полученных представляющих систем экспонент при этом зависела, в частности, от роста разностей $\varphi_j-\varphi_{j+1}$ вблизи границы D. Мы за отправную точку берем одно нормированное пространство $E\subset H(D)$ и определяем локально выпуклые пространства, названные инвариантной оболочкой и инвариантным ядром пространства E. А именно, инвариантное ядро $\mathcal{E}_p$ пространства E — это наибольшее линейное пространство, содержащееся в E и инвариантное относительно дифференцирования, а инвариантная оболочка $\mathcal{E}_i$ пространства E — это наименьшее линейное пространство, содержащее E и инвариантное относительно дифференцирования.

В первом параграфе второй главы доказывается теорема о преобразованиях Фурье–Лапласа линейных непрерывных функционалов на нормированном пространстве $H(D,\varphi)$.

Теорема 2.1.1. *Пусть φ — выпуклая функция на ограниченной выпуклой области комплексной плоскости D, $0\in D$.*

1. *Пусть S — линейный непрерывный функционал на пространстве $H(D,\varphi)$ и $\widehat{S}(\lambda)$ — преобразование Фурье–Лапласа этого функционала:*

$$\widehat{S}(\lambda)=S_z(e^{\lambda z}),\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Тогда

$$|\widehat{S}(\lambda)|\le\|S\|_{H^*(D,\varphi)}e^{\widetilde{\varphi}(\lambda)},\ \lambda\in D,$$

тем самым,

$$\|\widehat{S}\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi})}\le\|S\|_{H^*(D,\varphi)}.$$

2. *Если функция $\widetilde{\varphi}$ удовлетворяют условию*

$$\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}(y)}{\partial y_j\partial y_k}a_ja_k\ge\frac{b}{1+|y|^2}|a|^2,\ a,y\in\mathbb{R}^2,\ |y|\ge R, \tag{1}$$

для некоторой константы $b>12$, и целая функция F такова, что

$$|F(\lambda)|\le Ce^{\widetilde{\varphi}(\lambda)}(1+|\lambda|)^{-10},\ \lambda\in\mathbb{C},$$

то функция F является преобразованием Фурье–Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $H(D,\varphi)$. Причем

$$\|S\|_{(H(D,\varphi))^*}\le M\|F\|_{H(\mathbb{C},\widetilde{\varphi}_{10})},$$

где $\widetilde{\varphi}_a(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda) - a\ln(1+|\lambda|)$, *и константа* M *зависит только от постоянной* b *в* (1).

Из этой теоремы выводится описание пространства преобразований Фурье–Лапласа линейных непрерывных функционалов на проективном пределе $\bigcap_j H(D,\varphi_j)$ равномерно весовых пространств $H(D,\varphi_j)$ с убывающей последовательностью выпуклых на выпуклой области D весов φ_j и на индуктивном пределе $\bigcup_j H(D,\varphi_j)$ равномерно весовых пространств $H(D,\varphi_j)$ возрастающей последовательностью весов φ_j .

Далее в первом параграфе рассматриваются преобразования Фурье–Лапласа функционалов в подпространствах $A^\infty(D)$ типа классов Карлемана. Сначала рассматриваются функционалы на нормированных пространствах.

Теорема 2.1.4. *Пусть* D *— ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку 0,* $\mathcal{M} = (M_n)_{n=0}^\infty$ *— неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_k}{M_{k+1}} < \infty. \tag{2}$$

Для $a \in \mathbb{R}$ *обозначим*

$$\psi_a(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|) - a\ln(1+|\lambda|)).$$

Тогда

1) *если* S *— линейный непрерывный функционал на* $H(D,\mathcal{M})$ *и* $\widehat{S}(\lambda)$ *— преобразование Фурье–Лапласа этого функционала:*

$$\widehat{S}(\lambda) = S_z(e^{\lambda z}),\ \ \lambda \in \mathbb{C},$$

то $\widehat{S} \in H(\mathbb{C},\psi_0)$ *и*

$$\|\widehat{S}\|_{H(\mathbb{C},\psi_0)} \le \|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})};$$

2) *существует* $\alpha > 0$, *не зависящее от области* D *и последовательности* $\mathcal{M}$, *такое что для любой целой функции* $F \in H(\mathbb{C},\psi_\alpha)$ *существует единственный линейный непрерывный функционал* S *на* $H(D,\mathcal{M})$, *для которого функция* F *является его преобразованием Фурье–Лапласа, и*

$$\|S\|_{H^*(D,\mathcal{M})} \le C\|F\|_{H(\mathbb{C},\psi_\alpha)},$$

где константа $C > 0$ *зависит только от области* D *и последовательности* $\mathcal{M}$.

Из этой теоремы выводится описание сопряженных пространств в терминах преобразований Фурье–Лапласа для индуктивных и проективных пределов нормированных пространств $H(D,\mathcal{M}^{(k)})$, по возрастающей или убывающей последовательности $\mathcal{M}^{(k)}$.

Второй параграф второй главы диссертации посвящен более подробному изучению инвариантной оболочки и инвариантного ядра для равномерно весовых нормированных пространств $H(D,\varphi)$ и нормированных пространств типа классов Карлемана $H(D,\mathcal{M})$. В следующей теореме дается (внешнее) описание инвариантной оболочки и инвариантного ядра пространства $H(D,\varphi)$.

Теорема 2.2.2. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z=0$. Для выпуклой в D функции φ и $a\in\mathbb{R}$ положим*

$$\widetilde{\varphi}_a(\lambda)=\widetilde{\varphi}(\lambda)-a\ln(1+|\lambda|),\ \lambda\in\mathbb{C},$$
$$\varphi_a(z)=\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}(\mathrm{Re}\,\lambda z-\widetilde{\varphi}_a(\lambda)),\ z\in D.$$

Предположим, что для некоторых $b_n>12$ выполняются условия

$$\sum_{j,k=1}^{2}\frac{\partial^2\widetilde{\varphi}_n(y)}{\partial y_j\partial y_k}a_ja_k\geq\frac{b_n}{1+|y|^2}|a|^2,\ a,y\in\mathbb{R}^2,\ |y|\geq R,\ n\in\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Тогда

1) *инвариантная оболочка $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ пространства $H(D,\varphi)$ совпадает с $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}H(D,\varphi_n)$. Если в этом объединении рассматривать топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве;*

2) *инвариантное ядро $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ пространства $H(D,\varphi)$ совпадает с $\bigcap_{-n\in\mathbb{N}}H(D,\varphi_n)$. Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

Если весовая функция φ имеет конечный порядок роста в смысле выполнения соотношения

$$\overline{\lim}_{d(z)\longrightarrow 0}\frac{\ln\varphi(z)}{-\ln d(z)}<\infty,$$

где $d(z)$ — расстояние от точки z до границы области D, то инвариантные оболочка и ядро могут быть описаны более непосредственным (внутренним) образом.

Теорема 2.2.3. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z=0$, φ — положительная выпуклая функция на D, имеющая конечный порядок роста, такая что для некоторых $b_n>12$ выполняются условия (3). Положим для $a\in\mathbb{R}$*

$$\psi_a(z)=\varphi(z)-a\ln d(z),\ z\in D.$$

Тогда

1) *инвариантная оболочка* $\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ *пространства* $H(D,\varphi)$ *совпадает с* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H(D,\psi_n)$. *Если в этом объединении ввести топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве;*

2) *инвариантное ядро* $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ *пространства* $H(D,\varphi)$ *совпадает с* $\bigcap_{-n\in\mathbb{N}} H(D,\psi_n)$. *Если в этом пересечении ввести топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

Для пространств $H(D,\mathcal{M})$ инвариантные оболочка и ядро описываются более естественным образом.

Пусть $\mathcal{M}=(M_n)_{n=0}^{\infty}$ неубывающая логарифмически выпуклая последовательность. Положим $M_n=M_0$ для $-n\in\mathbb{N}$ и для $k\in\mathbb{Z}$ через $\mathcal{M}_k$ будем обозначать последовательность со сдвигом $(M_{n+k})_{n=0}^{\infty}$.

Теорема 2.2.4. *Предположим, что последовательность* $\mathcal{M}$ *удовлетворяет условию* (2). *Тогда*

1) *инвариантная оболочка* $\mathcal{H}_i(D,\mathcal{M})$ *пространства* $H(D,\mathcal{M})$ *совпадает с объединением пространств* $H(D,\mathcal{M}_k)$, $k\in\mathbb{N}$. *Если в этом объединении рассматривать топологию индуктивного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве;*

2) *инвариантное ядро* $\mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})$ *пространства* $H(D,\mathcal{M})$ *совпадает с пересечением пространств* $H(D,\mathcal{M}_k)$, $-k\in\mathbb{N}$. *Если в этом пересечении рассматривать топологию проективного предела, то оператор дифференцирования непрерывно действует в этом пространстве.*

В третьем параграфе второй главы диссертации с помощью целых функций с заданной асимптотикой из первой главы мы конструируем дискретные достаточные множества для локально выпуклых пространств, образующих модуль над кольцом многочленов. А также дается оценка меры "избыточности" построенных достаточных множеств.

Пусть $\eta(t)$ — считающая функция дискретного множества S с одной предельной точкой в бесконечности:

$$\eta(t)=\sum_{\lambda\in S,\ |\lambda|\le t} 1,\ t>0.$$

Множество будем называть регулярным, если его считающая функция удовлетворяет условию

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\ln r}\int\limits_1^r \ln t\, d\eta(t)=\infty.$$

Для целой функции L для $\delta>0$ положим

$$E_L(\delta)=\bigcup_{\lambda\in N(L)} B(\lambda,\delta(1+|\lambda|)^{-1}).$$

Теорема 2.3.1. *Пусть ψ — субгармоническая функция на плоскости, удовлетворяющая условию Липшица и*

$$\psi_n(\lambda) = \psi(\lambda) - n\ln(1+|\lambda|) + c_n,\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ c_n \in \mathbb{R}.$$

Тогда для проективного предела $\mathcal{H}_p(\mathbb{C},\psi)$ пространств $H(\mathbb{C},\psi_n)$ существует дискретное достаточное множество S, такое что из него можно удалить любое конечное подмножество сохраняя свойство достаточности, а после удаления любого регулярного подмножества оно перестает быть достаточным.

Для индуктивных пределов нормированных пространств целых функций оценка избыточности достаточных множеств оказывается несколько более сложной: приходится задаться изначально некоторым "лишним" количеством точек, так что удаление меньшего количества сохраняет достаточность, а при удалении большего количества достаточность теряется.

Бесконечно возрастающую неотрицательную функцию $m(t)$, $t \geq 0$, $(m(0) = 0)$, удовлетворяющую условию

$$\sup_{t>0}(m(2t) - m(t)) \leq 1$$

будем называть медленно растущей. С каждой медленно растущей функцией свяжем ассоциированную функцию скачков. А именно, определим последовательности R_n, r_n по формулам

$$m(R_0) = 1,\ m(R_{n+1}) - m(R_n) = 1,\ n = 0,1,2,\ \dots\ ,$$

$$\int\limits_{R_n}^{R_{n+1}} \ln t\, dm(t) = \ln r_n,\ n = 0,1,2,\ \dots\ .$$

Ассоциированной с $m(t)$ функцией скачков назовем функцию $m_0(t)$, $t \geq 0$, $(m_0(0) = 0)$ с единичными скачками в точках $r_n,\ n = 1,2,\ \dots$. Из определения следует соотношение

$$|m(t) - m_0(t)| \leq 1,\ t \geq 0.$$

Теорема 2.3.2. *Пусть ψ — субгармоническая функция на плоскости, удовлетворяющая условию Липшица и*

$$\psi_n(\lambda) = \psi(\lambda) + n\ln(1+|\lambda|) + c_n,\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},\ c_n \in \mathbb{R}.$$

И пусть неотрицательная функция $m(t)$, $t > 0$, является функцией медленного роста, $m_0(t)$ — ассоциированная с ней функция скачков. Тогда для индуктивного предела $\mathcal{H}_i(\mathbb{C},\psi)$ пространств $H(\mathbb{C},\psi_n)$ существует дискретное достаточное множество $S = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, такое что если из него *удалить подмножество* $\{\eta_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, *считающая функция* $\eta(t)$ *которого удовлетворяет условию*

$$m_0(t)-\eta(t)\nearrow+\infty,$$

то множество $\widetilde{S}=S\setminus\{\eta_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ *остается достаточным. Если же* $m_0(t)-\eta(t)\le C<\infty,\ t\ge 0$, *то множество* $S\setminus\{\eta_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ *не будет достаточным.*

В четвертом параграфе второй главы, используя метод достаточных множеств (метод Эйренпрайса), из теорем 2.3.1 и 2.3.2 мы выводим теоремы о представляющих системах экспонент в инвариантных оболочке и ядре нормированных пространств $H(D,\varphi)$ и $H(D,\mathcal{M})$.

Теорема 2.4.1. *Пусть* D *— ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку* $z=0$, φ *— выпуклая функция в этой области. Положим*

$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda)=\widetilde{\varphi}(\lambda)-n\ln(1+|\lambda|),\ \lambda\in\mathbb{C},\ n\in\mathbb{N},$$

$$\varphi_n(z)=\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}(\mathrm{Re}\ \lambda z-\widetilde{\varphi}_n(\lambda)),\ z\in D.$$

Предположим, что для некоторых $b_n>12$ *выполнены условия* (3). *Тогда в инвариантной оболочке*

$$\mathcal{H}_i(D,\varphi)=\bigcup_{k=1}^{\infty}H(D,\varphi_k)$$

пространства $H(D,\varphi)$ *существует представляющая система* $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$, *то есть любая функция* $f\in\mathcal{H}_i(D,\varphi)$ *представляется в виде ряда по данной системе экспонент*

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n e^{\lambda_n z},$$

этот ряд сходится в топологии индуктивного предела пространств $H(D,\varphi_k)$, $k\in\mathbb{N}$. *Пусть* $\Lambda=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *— множество показателей представляющей системы* $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$. *Тогда, если удалить из* Λ *любое конечное подмножество, то соответствующая система экспонент останется представляющей, а если удалить из* Λ *любое регулярное подмножество, то соответствующая система экспонент перестанет быть представляющей.*

Теорема 2.4.2. *Пусть* D *— ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку* $z=0$, $\mathcal{M}=\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* (3), *и* $\mathcal{M}^{(k)}=\{M_{n+k}\}_{n=0}^{\infty}$, $k\in\mathbb{N}$, *— "сдвинутые" последовательности. Тогда в инвариантной оболочке* $\mathcal{H}_i(D,\mathcal{M})=$

$\bigcup_{k=1}^{\infty} H(D,\mathcal{M}^{(k)})$ пространства $H(D,\mathcal{M})$ существует представляющая система экспонент $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$, то есть любая функция $f \in \mathcal{H}_i(D,\mathcal{M})$ представляется в виде ряда по данной системе экспонент

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e^{\lambda_n z},$$

ряд сходится в топологии индуктивного предела пространств $H(D,\mathcal{M}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество показателей представляющей системы $\{e^{\lambda_n z}\}_{n=1}^{\infty}$. Тогда, если удалить из Λ любое конечное подмножество, то соответствующая система экспонент останется представляющей, а если удалить из Λ любое регулярное подмножество, то соответствующая система экспонент перестанет быть представляющей.

Оценка избыточности представляющих систем в инвариантных ядрах оказывается более сложным, чем в инвариантных оболочках, что соответствует ситуации с достаточными множествами.

Теорема 2.4.3. *Пусть D — ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку $z = 0$, φ — выпуклая функция в этой области. Положим*

$$\widetilde{\varphi}_n(\lambda) = \widetilde{\varphi}(\lambda) + n\ln(1+|\lambda|),\ \lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N},$$
$$\varphi_n(z) = \sup_{\lambda\in\mathbb{C}}(\mathrm{Re}\ \lambda z - \widetilde{\varphi}_n(\lambda)),\ z \in D.$$

Предположим, что для некоторых $b_n > 12$ выполнены условия (3). Пусть далее положительная функция $m(t)$, $t > 0$, является медленно растущей, $m_0(t)$ — ассоциированная с ней функция скачков. Тогда существует система показателей $\Lambda = \{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, такая что система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ является представляющей в инвариантном ядре $\mathcal{H}_p(D,\varphi) = \bigcap_{n=1}^{\infty} H(D,\varphi_n)$ пространства $H(D,\varphi)$, то есть любая функция $f \in \mathcal{H}_p(D,\varphi)$ может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{z\lambda_k},$$

сходящегося в топологии проективного предела пространств $H(D,\varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$. При этом ряды из всех определяющих топологию $\mathcal{H}_p(D,\varphi)$ норм сходится

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_k e^{z\lambda_k}\|_{H(D,\varphi_m)} < \infty,\ m \in \mathbb{N},$$

а ряд из абсолютных величин сходится в топологии проективного предела пространств $H(D,\varphi_n)$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{N\longrightarrow\infty} \sup_{z\in D} \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} f_k e^{z\lambda_k} \right| e^{-\varphi_n(z)} = 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

Если из системы показателей Λ *удалить подмножество* $\{\eta_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, *считающая функция* $\eta(t)$ *которого удовлетворяет условию*

$$m_0(t)-\eta(t)\nearrow+\infty,$$

то система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ \lambda_k\in\widetilde{S}=S\setminus\{\eta_k,\ k\in\mathbb{N}\}\}$ *остается представляющей. Если же* $m_0(t)-\eta(t)\le C<\infty,\ t\ge 0$, *то оставшаяся система экспонент уже не будет представляющей.*

Теорема 2.4.4. *Пусть* D *— ограниченная выпуклая область на комплексной плоскости, содержащая точку* $z=0$, $\mathcal{M}=\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ *— неубывающая логарифмически выпуклая последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условию* (2), *и пусть* $M_{-n}=M_0,\ n\in\mathbb{N}$, *и* $\mathcal{M}^{(k)}=\{M_{n-k}\}_{n=0}^{\infty},\ k\in\mathbb{N}$, *— "сдвинутые" последовательности. Тогда для положительной медленно растущей функции* $m(t),\ t>0$, *существует система показателей* $\Lambda=\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, *такая что система экспонент* $\{e^{z\lambda_k},\ k\in\mathbb{N}\}$ *является представляющей в инвариантном ядре* $\mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})=\bigcap_{k=1}^{\infty}H(D,\mathcal{M}^{(k)})$ *пространства* $H(D,\mathcal{M})$, *то есть любая функция* $f\in\mathcal{H}_p(D,\mathcal{M})$ *может быть представлена в виде суммы ряда*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}f_ke^{z\lambda_k},$$

сходящегося в топологии проективного предела пространств $H(D,\mathcal{M}^{(k)})$, $k\in\mathbb{N}$. *Если из системы показателей* Λ *удалить подмножество* $\{\eta_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, *считающая функция* $\eta(t)$ *которого удовлетворяет условию*

$$m_0(t)-\eta(t)\nearrow+\infty,$$

то система экспонент $\{e^{z\lambda_k},\ \lambda_k\in\widetilde{S}=S\setminus\{\eta_k,\ k\in\mathbb{N}\}\}$ *остается представляющей. Здесь* $m_0(t)$ *— ассоциированная с* $m(t)$ *функция скачков. Если же* $m_0(t)-\eta(t)\le C<\infty,\ t\ge 0$, *то оставшаяся система экспонент уже не будет представляющей.*

В третьей главе диссертации рассматриваются нормированные пространства $H(D,\varphi)$ и $H(D,\mathcal{M})$ и доказывается существование систем экспонент, по которым функции из этих пространств можно разложить в ряд, сходящийся в более слабой норме. А также конструируются системы экспонент, по которым функции из собственного подпространства этих пространств можно разложить в ряд, сходящийся в норме пространства. Основой доказательств являются теоремы 1.2 и 1.3. В первом параграфе вопросы рассмотрены для пространств $H(D,\varphi)$. Так же как в теореме 2.2.2 введем обозначения

$$\widetilde{\varphi}_a(\lambda)=\widetilde{\varphi}(\lambda)-a\ln(1+|\lambda|),\ \lambda\in\mathbb{C},$$

$$\varphi_a(z)=\sup_{\lambda\in\mathbb{C}}(\mathrm{Re}\ \lambda z-\widetilde{\varphi}_a(\lambda)),\ z\in D.$$

Теорема 3.1.1. *Для выпуклой области D комплексной плоскости, содержащей точку $z = 0$, и для любой неотрицательной выпуклой функции $\varphi(z)$ в этой области, стремящейся к бесконечности при $\operatorname{dist}(z, \partial D) \longrightarrow 0$, такой что $\widetilde{\varphi}$ дважды дифференцируема, и для некоторых констант $b > 12$ и $R > 0$, выполняется соотношение (1), найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H(D, \varphi)$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \varphi_\alpha)$, где $\alpha = 2A + 13$ и A — константа из теоремы 1.2. Тем самым константа α — универсальная, то есть не зависит от области D и от весовой функции φ.

Суть этой теоремы можно передать в другой формулировке.

Теорема 3.1.2. *Для выпуклой области D комплексной плоскости, содержащей точку $z = 0$, и для любой неотрицательной выпуклой функции $\varphi(z)$ в этой области, стремящейся к бесконечности при $\operatorname{dist}(z, \partial D) \longrightarrow 0$, такой что $\widetilde{\varphi}$ дважды дифференцируема, и для некоторых констант $b > 4\alpha + 12$ (α — универсальная постоянная из теоремы 3.1.1) и $R > 0$, выполняется соотношение (1), найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H(D, \varphi_{-\alpha})$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \varphi)$.

Теоремы 3.1.1 и 3.1.2 более непосредственным образом можно сформулировать для весовых функций конечного порядка.

Теорема 3.1.3. *Для выпуклой области D комплексной плоскости, содержащей точку $z = 0$, и для любой неотрицательной выпуклой функции $\varphi(z)$ в этой области, стремящейся к бесконечности при $\operatorname{dist}(z, \partial D) \longrightarrow 0$, такой что $\widetilde{\varphi}$ дважды дифференцируема, и для некоторых констант $b > 12$ и $R > 0$, выполняется соотношение (1), при условии: для некоторого $\rho > 0$*

$$\varphi(z) \prec \operatorname{dist}^{-\rho}(z, \partial D), \ z \in D,$$

найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H(D, \varphi)$ представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H\left(D, \varphi(z) + \alpha(\rho + 1) \ln \frac{1}{\operatorname{dist}(z, \partial D)}\right)$, где α — константа из теоремы 3.1.1.

Теорема 3.1.4. *Для выпуклой области D комплексной плоскости, содержащей точку $z = 0$, и для любой неотрицательной выпуклой функции $\varphi(z)$ в этой области, стремящейся к бесконечности при* $\operatorname{dist}(z, \partial D) \longrightarrow 0$, *такой что $\widetilde{\varphi}$ дважды дифференцируема, и для некоторых констант $b > 4\alpha + 12$ (α — универсальная постоянная из теоремы 3.1.1) и $R > 0$, выполняется соотношение (1), при условии: для некоторого $\rho > 0$*

$$\varphi(z) \prec \operatorname{dist}^{-\rho}(z, \partial D), \ z \in D,$$

найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H\left(D, \varphi(z) - \alpha(\rho+1)\ln\frac{1}{\operatorname{dist}(z,\partial D)}\right)$ представляется в виде ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \varphi)$.

Во втором параграфе третьей главы изучаются системы экспонент для пространств $H(D, \mathcal{M})$.

Теорема 3.2.1. *Существует такое натуральное число s, что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$, удовлетворяющей условию (2), и для любой ограниченной выпуклой области D, содержащей точку $z = 0$, найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H(D, \mathcal{M})$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \mathcal{M}_s)$.

Для доказательства этой теоремы доказано утверждение о преобразованиях Фурье–Лапласа.

Теорема 3.2.2. *Существует такое натуральное число s, что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$, удовлетворяющей условию (2), и для любой ограниченной выпуклой области D, содержащей точку $z = 0$, каждая функция $f \in H(D, \mathcal{M})$ является преобразованием Фурье–Лапласа некоторого линейного непрерывного функционала S на пространстве $H(\mathbb{C}, \psi_s)$:*

$$f(z) = \widehat{S}(z) = S\left(e^{\lambda z}\right), \ z \in D,$$

где

$$\psi_s(\lambda) = H_D(\lambda) + \ln T(|\lambda|) - s\ln(1 + |\lambda|)).$$

Теорема 3.2.1 может быть переформулирована следующим образом.

Теорема 3.2.3. *Существует такое натуральное число s, что для любой логарифмически выпуклой возрастающей последовательности положительных чисел $\mathcal{M}$, удовлетворяющей условию* (2)*, и для любой ограниченной выпуклой области D, содержащей точку $z = 0$, найдется система экспонент $e^{\lambda_k z}$, $k \in \mathbb{N}$, обладающая свойством: каждая функция $f \in H(D)$, для которой $f^{(s)} \in H(D, \mathcal{M})$ представляется в виде ряда*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k e^{\lambda_k z}, \ z \in D,$$

сходящегося в норме пространства $H(D, \mathcal{M})$.

Четвертая глава диссертации посвящена безусловным базисам из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций. В этой главе рассматриваются гильбертовы пространства целых функций H, удовлетворяющие условиям:

1. Пространство H — функциональное в том смысле, что точечные функционалы $\delta_z : f \to f(z)$ являются непрерывными при каждом $z \in \mathbb{C}$.

2. Пространство H устойчиво относительно деления, то есть если $F \in H$, $F(z_0) = 0$, то $F(z)(z - z_0)^{-1} \in H$. Из этого условия следует в частности, что точечные функционалы отличны от нуля.

Из условия 1 следует, что каждый функционал δ_z порождается элементом $k_z(\lambda) \in H$ в смысле $\delta_z(f) = (f(\lambda), k_z(\lambda))$. Функция $k(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром. Через $K(z)$ обозначим $k(z, z)$. Тогда функция Бергмана пространства H — это $\|\delta_z\|_H = (K(z))^{\frac{1}{2}}$ ([21]).

В первом параграфе четвертой главы получены необходимые условия существования безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра в таких пространствах.

Теорема 4.1.1. *Если система $\{k(\lambda, z_i)\}_{i=1}^{\infty}$ является безусловным базисом в пространстве H, то существует целая функция L с простыми нулями в точках z_i, $i = 1, 2, \ \ldots \ ,$ для которой выполняется соотношение.*

$$\frac{1}{P} K(z) \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|L(z)|^2 K(z_i)}{|L'(z_i)|^2 |z - z_i|^2} \le P K(z), \, z \in \mathbb{C},$$

где P — некоторая положительная постоянная.

Введем одну характеристику для непрерывных на плоскости функций. Пусть z — фиксированная точка на плоскости. Для любого положительного числа $r > 0$ через $B(z, r)$ обозначим круг $\{w : \ |w - z| < r\}$ и для непрерывной в $\overline{B}(z, r)$ функции f положим

$$\|f\|_r = \max_{w \in \overline{B}(z, r)} |f(w)|.$$

Пусть $d(f,z,r)$ — расстояние от функции f до пространства гармонических в $B(z,r)$ функций:

$$d(f,z,r) = \inf\{\|f-H\|_r,\ H - \text{гармонична в}\ \ B(z,r)\}.$$

Для положительного числа p положим

$$\tau(u,z,p) = \sup\{r:\ d(u,z,r) \le p\}.$$

Через $\tau(z)$ будем обозначать функцию $\tau(\ln K(w), z, \ln(5P))$, где P — константа из теоремы 4.1.1.

В следующих двух теоремах получены условия на распределение нулей порождающей функции безусловного базиса.

Теорема 4.1.2. *Пусть $L(z)$ — целая функция с простыми нулями z_i, $i = 1, 2, \ \dots$, при некотором P удовлетворяющая двусторонней оценке*

$$\frac{1}{P}K(z) \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|L(z)|^2 K(z_i)}{|L'(z_i)|^2|z-z_i|^2} \le PK(z).$$

Тогда

1) *в любом круге $B(z, 2\tau(z))$ содержится хотя бы один нуль z_i функции L;*

2) *для любых $i, j,\ i \ne j$, выполняется неравенство*

$$|z_i - z_j| \ge \frac{\max(\tau(z_i), \tau(z_j))}{10P^{\frac{3}{2}}};$$

3) *для любого i в круге $B\left(z_i, \frac{\tau(z_i)}{20P^{\frac{3}{2}}}\right)$ справедливо соотношение*

$$\frac{1}{5^6P^8}K(z) \le \frac{K(z_i)|L(z)|^2}{|L'(z_i)|^2|z-z_i|^2} \le PK(z).$$

Теорема 4.1.3. *Пусть $z_i,\ i = 1, 2,\ \dots$, — нули функции $L(z)$, удовлетворяющей условиям предыдущей теоремы:*

$$\frac{1}{P}K(z) \le \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|L(z)|^2 K(z_i)}{|L'(z_i)|^2|z-z_i|^2} \le PK(z).$$

Тогда для любого конечного множества нулей B, содержащего хотя бы два нуля, найдется индекс n, такой что

$$\sum_{z_i \in B,\, i \ne n} \frac{\tau^2(z_i)}{|z_i - z_n|^2} \le (4P)^{12}.$$

В следующей теореме сформулированы условия, при которых безусловные базисы из воспроизводящих ядер в пространствах H отсутствуют.

Теорема 4.1.4. *Пусть H — функциональное гильбертово пространство целых функций, устойчивое относительно деления. Предположим, что для всех достаточно больших положительных чисел p найдется число $\delta = \delta(p) > 0$ и последовательность кругов $B(\zeta_j, R_j)$, такая что функция $\tau(z) = \tau(\ln K(\lambda), z, p)$ для всех $\lambda \in B(\zeta_j, R_j)$ удовлетворяет условию*

$$\inf_{z \in B(\lambda, 2\tau(\lambda))} \tau(z) \geq \delta\tau(\lambda).$$

и, кроме того,

$$\max_{z \in \overline{B}(\zeta_j, R_j)} \tau(z) = o(R_j), \ \ j \longrightarrow \infty.$$

Тогда в пространстве H безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.

Следующая теорема может служить инструментом для оценок функции $\tau(u, z, p)$.

Теорема 4.1.5. *Пусть субгармоническая на плоскости функция и дважды непрерывно дифференцируема. Если*

$$\frac{1}{b} \leq \frac{\Delta u(w)}{\Delta u(z)} \leq b, \ \forall w \in B\left(z, \sqrt{8pb}(\Delta u(z))^{-\frac{1}{2}}\right).$$

то

$$\sqrt{\frac{8p}{b\Delta u(z)}} \leq \tau(u, z, p) \leq \sqrt{\frac{8pb}{\Delta u(z)}}.$$

Во втором параграфе четвертой главы рассматриваются более конкретные гильбертовы пространства. Пусть $\varphi(\lambda)$ — субгармоническая функция на плоскости и

$$\mathcal{F}_\varphi = \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ ||f||^2 := \int\limits_{\mathbb{C}} |f(\lambda)|^2 e^{-2\varphi(\lambda)}\, dm(\lambda) < \infty \right\},$$

где dm — плоская мера Лебега. Тогда $\mathcal{F}_\varphi$ является гильбертовым пространством, удовлетворяющим условиям функциональности и устойчивости.

В следующей теореме доказано существование сколь угодно медленно растущих функций $\varphi(r)$, для которых $\ln r = o(\varphi(r))$, $r \longrightarrow \infty$, и в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$, $\varphi(\lambda) = \varphi(|\lambda|)$, нет безусловных базисов из воспроизводящих ядер.

Теорема 4.2.1. *Для произвольной положительной неограниченно возрастающей функции $\eta(t)$, $t > 0$, существует радиальная субгармоническая функция $\varphi(z)$, такая что*

$$\varphi(r) = O(\eta(r) \ln r), \ r \longrightarrow \infty,$$

и в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ безусловных базисов из воспроизводящих ядер не существует.

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы о безусловных базисах из работы [22] (весовая функция может быть нерадиальной).

Теорема 4.2.2. *Пусть ассоциированная мера μ субгармонической на плоскости функции φ удовлетворяет условиям*

1) *для некоторого положительного $\delta > 0$*

$$\delta \le \mu(2t) - \mu(t), \ \ t > 0, \tag{4}$$

$$\mu(2t) - \mu(t) \le 1, \ \ t > 0; \tag{5}$$

2) *для некоторых $A > 0, \beta \in (0;1)$ и любого $z \in \mathbb{C}$*

$$\int\limits_0^{\beta|z|} \frac{\mu(z,t)\,dt}{t} \le A. \tag{6}$$

Тогда в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер.

Утверждение теоремы 4.2.2 остается в силе, если ассоциированная мера весовой функции удовлетворяет условиям (4), (5) и (6) только кусочно.

Теорема 4.2.3. *Пусть ассоциированная мера ν субгармонической функции u представляется в виде $\nu = \nu_1 + \mu$, где $\nu_1(\mathbb{C}) \in (0,1)$ и*

$$\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n,$$

где μ_n — неотрицательные борелевские меры с массой $\mu_n(\mathbb{C}) = 1$ с носителями в непересекающихся кольцах $\{z : \ R_n \le |z| \le R'_n\}$, при этом последовательность R_n возрастающая, $2R_n \le R_{n+1}$ и $\frac{R'_n}{R_n} \le c < \infty$, $n \in \mathbb{N}$. Если, кроме того, мера μ удовлетворяет условию (6), то в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер.

Теорема 4.2.3 позволяет конструировать веса φ сколь угодно медленного роста, так что в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер.

Теорема 4.2.4. *Если ассоциированная мера μ радиальной субгармонической функции u удовлетворяет условию (5), то найдется радиальная весовая функция φ, сравнимая с u:*

$$u(z) - \ln(|z|+1) \le \varphi(z) \le u(z), \ \ z \in \mathbb{C},$$

такая что в пространстве $\mathcal{F}_\varphi$ существует безусловный базис из воспроизводящих ядер.

В третьем параграфе четвертой главы по целой функции L при некоторых условиях на распределение ее нулей $\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}$, мы определяем гильбертово пространство $\mathcal{H}=\mathcal{H}_L$, такое что в нем система $\{k(\lambda,\lambda_k),\ k\in\mathbb{N}\}$ оказывается безусловным базисом.

Пусть $L(\lambda)$ — целая функция с простыми нулями, образующими множество $\mathcal{N}=\{\lambda_k,\ k\in\mathbb{N}\}$, и $G_\delta=G_\delta(L):=\{z:\ \operatorname{dist}(z,\mathcal{N})\geq\delta\}=\mathbb{C}\setminus\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}B(\lambda_k,\delta)$. Предположим, что множество нулей удовлетворяет условию:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\sum_{j\neq k}\frac{1}{|\lambda_j-\lambda_k|}:=M<\infty. \tag{7}$$

Заметим, что из этого условия следует разделенность нулей

$$|\lambda_k-\lambda_m|\geq\frac{1}{M}:=\sigma>0,\ k\neq m.$$

Возьмем гладкую финитную функцию $\alpha(z)$ типа "шапочки", а именно, функцию со свойствами: $\alpha(z)$ — неотрицательная функция с носителем в единичном круге $B(0,1)$ и

$$\int\limits_{\mathbb{C}}\alpha(z)\,dm(z)=1,$$

где $dm(z)$ — мера Лебега на плоскости. Для удобства будем также считать, что $0<\alpha(z)\leq 1,\ z\in B(0,1)$, и $\alpha(z)\equiv 1$ в круге $B\left(0,\frac{1}{2}\right)$. Возьмем положительное δ и положим

$$\alpha_\delta(z)=\frac{1}{\delta^2}\alpha\left(\frac{z}{\delta}\right),\ z\in\mathbb{C},$$

и пусть φ — гладкая регуляризация функции $\ln|L(\lambda)|$:

$$\varphi(\lambda)=\int\limits_{\mathbb{C}}\ln|L(z)|\alpha_\delta(\lambda-z)\,dm(z),\ \lambda\in\mathbb{C}.$$

Как известно, функция φ будет гладкой субгармонической функцией на плоскости, причем $\varphi(\lambda)\geq\ln|L(\lambda)|,\ \lambda\in\mathbb{C}$, а в области G_δ выполняется равенство $\varphi(\lambda)=\ln|L(\lambda)|$. В силу субгармоничности

$$\Delta\varphi(z)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(z)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\varphi(z)\geq 0,\ z=x+iy\in\mathbb{C}.$$

Рассмотрим пространство $\mathcal{H}=\mathcal{H}_L$ целых функций F, удовлетворяющих условиям

$$|F(\lambda)|=o(e^{\varphi(\lambda)}),\ |\lambda|\to\infty,$$

$$\int\limits_{\mathbb{C}}|F(\lambda)|^2e^{-2\varphi(\lambda)}\Delta\varphi(\lambda)\,dm(\lambda):=\|F\|^2<\infty.$$

Теорема 4.3.1. *$\mathcal{H}$ — гильбертово пространство.*
Теорема 4.3.2. *Система* $\left\{ l_n(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(\lambda_n)(\lambda-\lambda_n)},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ *образует безусловный базис в пространстве $\mathcal{H}$.*

Из теоремы 4.3.2 следует следующая теорема.
Теорема 4.3.3. *Пусть множество нулей $\{\lambda_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ целой функции L удовлетворяет условию (7). Тогда система значений воспроизводящего ядра $\{K(\lambda, \lambda_k),\ k \in \mathbb{N}\}$ пространства $\mathcal{H}_L$ образует безусловный базис в этом пространстве.*

Пространства $\mathcal{H}_L$ выглядят искусственными. Но при этом основные пространства с безусловными базисами оказываются изоморфными (как нормированные пространства) соответствующим пространствам $\mathcal{H}_L$.
Теорема 4.3.4. *Пространство Пэли P, состоящее из целых функций экспоненциального типа π с нормой*

$$\|F\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(iy)|^2\, dy < \infty,$$

пространство $\widehat{E}_2(D)$ целых функций, представимых в виде

$$F(\lambda) = \int_{\partial D} e^{\lambda z}\overline{f(z)}\, ds(z),$$

где D — выпуклый многоугольник, $f \in E_2(D)$:

$$\|f\|^2 = \int_{\partial D} |f(z)|^2\, ds(z) < \infty,$$

пространство $\widehat{B}_2(D)$ на выпуклом многоугольнике D изоморфны как нормированные пространства соответствующим пространствам $\mathcal{H}_L$, где L — целая функция, порождающая базис.

Пятая глава диссертации посвящена безусловным базисам из экспонент в весовых пространствах на отрезке вещественной оси. Пусть I — ограниченный интервал вещественной оси, $h(t)$ — выпуклая функция на этом интервале и $L^2(I, h)$ — пространство локально интегрируемых функций на I, удовлетворяющих условию

$$||f|| := \sqrt{\int_I |f(t)|^2 e^{-2h(t)}\, dt} < \infty.$$

Следующая теорема, доказанная в первом параграфе пятой главы, представляет собой уточнение теоремы 4.1.4 на случай пространств $\widehat{L}^2(I, h)$.

Теорема 5.1.1. *Пусть для достаточно больших $p > 0$ найдется некоторое число $\delta = \delta(p) > 0$ со свойством: существует последовательность $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$, такая что интервалы*

$$I_k = \{x : \ |x - x_k| \le 2\tau(\ln K(z), x_k, p)\}$$

попарно не пересекаются и

$$\min_{x \in I_k} \tau(\ln K(z), x, p) \ge \delta(p)\tau(\ln K(z), x_k, p).$$

Пусть далее для любого $\varepsilon > 0$ найдется отрезок $[m; s]$, $s > m$, $s, m \in \mathbb{Z}$, со свойствами

1) *если $I_{m,s} = \bigcup\limits_{m \le k \le s} I_k$, $I^0_{m,s}$ — наименьший отрезок вещественной оси, содержащий $I_{m,s}$, $d_{m,s}$ — сумма длин интервалов, составляющих $I_{m,s}$, а $d^0_{m,s}$ — длина отрезка $I^0_{m,s}$, то $d_{m,s} \ge (1 - \varepsilon)d^0_{m,s}$;*

2) *выполняется оценка $\max_{k \in [m,s]} \tau(\ln K(z), x_k, p) \le \varepsilon d^0_{m,s}$.*

Тогда в пространстве $L^2(I, h)$ безусловного базиса из экспонент не существует.

Следующая теорема, доказанная в работе [18] (теорема 4), является непосредственным следствием теоремы 5.1.1.

Теорема 5.1.2. *Пусть I — произвольный ограниченный интервал на $\mathbb{R}$, $h(t)$— выпуклая функция на этом интервале. Предположим, что для некоторого $p > 0$ существуют последовательность промежутков $[a_m; b_m]$ и положительных чисел τ_m, $m = 1, 2, \ \ldots$, таких что*

1) *для некоторого положительного числа δ и для всех $x \in [a_m; b_m]$*

$$\delta\tau_m \le \tau(\ln K(z), x, p) \le \tau_m, \ m = 1, 2, \ \ldots \ ,$$

2) *имеет место соотношение*

$$\lim_{m \longrightarrow \infty} \frac{b_m - a_m}{\tau_m} = \infty,$$

тогда в пространстве $L^2(I, h)$ безусловного базиса из экспонент не существует.

Функция $u(z) = \ln K(z)$ гладкая, поэтому с помощью теоремы 4.1.5 последнюю теорему можно сформулировать в терминах производных.

Теорема 5.1.3. *Пусть функция $u(x) = \ln K(x)$ удовлетворяет условию: для достаточно больших $p > 0$ и некоторого $b > 0$ существует последовательность интервалов $(a_n; b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \to \infty$, $n \to \infty$, такая что для всех $x \in (a_n, b_n)$*

$$\frac{1}{b} \le \frac{u''(x)}{u''(y)} \le b, \ \forall y : \ |x - y| \le \sqrt{8bp}(u''(x)^{-\frac{1}{2}},$$

при этом

$$\frac{(b_n - a_n)^2}{u''(a_n)} \to \infty.$$

Тогда в пространстве $L^2(I, h)$ *безусловных базисов из экспонент не существует.*

Во втором параграфе пятой главы рассматриваются пространства $L^2((-1;1), h)$ со степенной весовой функцией.

Теорема 5.2.1. *В пространстве* $L^2((-1;1), h)$ *с весовой функцией*

$$h(t) = -\alpha \ln(1 - |t|),\ t \in (-1;1),\ \alpha > 0.$$

безусловных базисов из экспонент не существует.

В третьем параграфе пятой главы построены примеры выпуклых функций h на интервале $(-1;1)$ сколь угодно медленного роста на концах интервала, таких что в пространстве $L^2((-1;1), h)$ безусловных базисов из экспонент не существует.

Теорема 5.3.1. *Для любой непрерывной интегрируемой положительной функции* W *на интервале* $(-1;1)$, *стремящейся к 0 при* $|t| \to 1$ *существует выпуклая функция* h, *такая что* $e^{h(t)} \le \frac{1}{W(t)}$ *при* $|t| < 1$ *и в пространстве* $L^2((-1;1), h)$ *безусловных базисов из экспонент не существует.*

Публикации автора по теме диссертации

1. Башмаков Р. А., Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., "О геометрических характеристиках выпуклых функций и интегралах Лапласа" , Уфимский математический журнал, **2** (2010), №1, 3–16.

2. Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., "О безусловных базисах из экспонент в гильбертовых пространствах" , Уфимский математический журнал, **3** (2011), №1, 3–15.

3. Исаев К. П., Трунов К. В., "Распределение показателей безусловного базиса из экспонент в пространствах со степенным весом" , Уфимский математический журнал, **4** (2012), №1, 63–70.

4. Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., "Безусловные базисы из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций" , Уфимский математический журнал, **5** (2013), №3, 67–77.

5. Исаев К. П., Луценко А. В., Юлмухаметов Р. С., "О безусловных базисах из экспонент в слабовесовых пространствах на отрезке" , Уфимский математический журнал, **8** (2016), №4, 90–99.

6. Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., Юнусов А. А., "О безусловных базисах из экспонент в весовых пространствах на интервале вещественной оси" , Алгебра и анализ, **28** (2016), №5, 195–219.

7. Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С., "О безусловных базисах из воспроизводящих ядер в пространствах типа Фока" , Функц. анализ и его прил., **51** (2017), №4, 50–61.

8. Исаев К. П., Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С., "Представление рядами экспонент функций в локально выпуклых подпространствах $A^\infty(D)$" , Уфимский математический журнал, **9** (2017), №3, 50–62.

9. Isaev K. P., "On unconditional exponential bases in weighted spaces on interval of real axis" , Lobachevskii Journal of Mathematics, **38** (2017), №1, 48–61.

10. Исаев К. П., Луценко А. В., Юлмухаметов Р. С., "Безусловные базисы в слабовесовых пространствах целых функций" , Алгебра и анализ, **30** (2018), №2, 145–162.

11. Isaev K. P., "On entire functions with given asymptotic behavior" , Пробл. анал. Issues Anal., **7(25)** (2018), спецвыпуск, 12–30.

12. Исаев К. П., "Представляющие системы экспонент в проективных пределах весовых подпространств $A^\infty(D)$" , Изв. вузов. Матем., 2019, №1, 29–41.

13. Исаев К. П., Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С., "Представляющие системы экспонент в проективных пределах весовых подпространств $H(D)$, Изв. РАН. Сер. матем., **83** (2019), №2, 40–60.

14. Исаев К. П., "Представляющие системы экспонент в пространствах аналитических функций" , Комплексный анализ. Целые функции и их применения, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **161**, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 3–64.

15. Исаев К. П., Трунов К. В., Юлмухаметов Р. С., Представление рядами экспонент функций в нормированных подпространствах $A^\infty(D)$" , Комплексный анализ. Математическая физика, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **162**, ВИНИТИ РАН, М., 2019, 42–56.

16. Isaev K. P., Yulmukhametov R. S., "On Hilbert spaces of entire functions with unconditional bases of reproducing kernels" , Lobachevskii Journal of Mathematics, **40** (2019), №9, 1283–1294.

17. Isaev K. P., Trounov K. V., Yulmukhametov R. S., "On representation of functions from normed subspaces of $H(D)$ by series of exponentials", Analysis and Mathematical Physics, **9** (2019), №3, 1043–1067.

Цитированная литература

18. Башмаков Р. А., Махота А. А., Трунов К. В., "Об условиях отсутствия безусловных базисов из экспонент", Уфимский математический журнал, **7** (2015), №2, 19–34.

19. Коробейник Ю. Ф., "Представляющие системы", УМН, **36** (1981), №1(217), 73–126.

20. Леонтьев А. Ф., Ряды экспонент. — М.: Изд.-во "Наука". Гл. редакция физ.-мат. лит. , 1976. 536с.

21. Aronszajn N., "Theory of reproducing kernels", Transactions of the American Mathematical Society, **68** (1950), №3, 337–404.

22. Borichev A., Lyubarskii Yu., "Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces", Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, **9** (2010), 449–461.