На правах рукописи

Грибанов Дмитрий Владимирович

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕННЫМ СПЕКТРОМ МИНОРОВ

01.01.09 — «дискретная математика и математическая кибернетика»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Нижний Новгород — 2016 г.

Работа выполнена в лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики»

Научный руководитель: д.ф.-м.н., доц. Малышев Дмитрий Сергеевич

Официальные оппоненты:

Райгородский Андрей Михайлович, д.ф.-м.н., ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (государственный университет)», главный научный сотрудник – заведующий лабораторией продвинутой комбинаторики и сетевых приложений

Куликов Александр Сергеевич, к.ф.-м.н., ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН», научный сотрудник лаборатории математической логики

Ведущая организация: ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова»

Защита состоится 28 декабря 2016 г. в 16 00 на заседании диссертационного совета Д002.202.02 в ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук» по адресу: 191023, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27, к. 311.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук», http://www.pdmi.ras.ru/

Автореферат разослан ____________________ 2016 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета, д.ф.-м.н. Малютин А. В. Малютин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследований

Задача целочисленного линейного программирования, далее «задача ЦЛП», является одной из классических задач дискретной оптимизации. Многие задачи дискретной оптимизации могут быть сформулированы в терминах ЦЛП. Несмотря на то, что задача ЦЛП достаточно хорошо изучена с разных сторон, в этой области исследований имеется множество открытых вопросов.

Развитие теории сложности вычислений способствовало формированию фактических стандартов эффективной разрешимости и труднорешаемости. Под эффективной разрешимостью данной массовой задачи понимается возможность ее решения на детерминированной машине Тьюринга за время, ограниченное полиномом от длины входных данных. В то же время, имеется ряд «неподдающихся» (называемых в теории сложности NP-трудными) задач, для которых на настоящее время не разработано полиномиальных алгоритмов. Справедливость известной гипотезы P$\neq$NP означала бы, что таких алгоритмов вообще не существует.

Задача ЦЛП является классической NP-трудной задачей[1,2]. Эффективных алгоритмов решения данной задачи, вероятно, не существует. Этот факт побуждает исследователей к рассмотрению различных частных случаев задачи ЦЛП, допускающих полиномиальные алгоритмы решения. Рассмотрим некоторые из них. Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ и $c \in \mathbb{Z}^n$. Интерес представляют две постановки задачи ЦЛП: первая состоит в максимизации линейного функционала на целых точках области, заданной системой линейных неравенств — задача $\max\{c^\top x : Ax \leqslant b,\, x \in \mathbb{Z}^n\}$, вторая постановка состоит в максимизации линейного функционала на линейном многообразии, заданном системой линейных уравнений, при дополнительном условии неотрицательности и целочисленности переменных — задача $\max\{c^\top x : Ax = b,\, x \in \mathbb{Z}^n_+\}$.

По существу, случаев полиномиальной разрешимости три:

1. Ограниченная размерность. Задача ЦЛП в первой постановке является полиномиально разрешимой в случае ограниченной размерности n. Данный факт был доказан в работе Х. Ленстры[3]. Улучшения алгоритма Ленстры можно найти в ряде по-

[1] Garey M. R., Johnson D. S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness // Publisher: W. H. Freeman and Company. — 1979. — 338 P.

[2] Schrijver A. Theory of linear and integer programming // Publisher: John Wiley & Sons. — 1998. — 484 P.

[3] Lenstra H. W. Integer programming with a fixed number of variables // Mathematics of Operations Research. — 1983. — V. 8. — P. 538–548.

следующих работ[4,5,6,7,8]. Полиномиальный при фиксированной размерности алгоритм, не использующий идеи алгоритма Ленстры, предложен в работе[9].

2. Ограниченность количества строк и абсолютного значения чисел, входящих в систему неравенств, задающую допустимую область задачи. Данный результат принято формулировать для второй постановки задачи, т. е. для системы с равенствами. А именно, Х. Пападимитриу показал[10], что если m и максимальное абсолютное значение чисел, входящих в систему $Ax = b$, ограничены, то задача ЦЛП во второй постановке может быть решена за полиномиальное время.

3. Квадратная невырожденная система неравенств с ограниченным по абсолютному значению определителем. Рассмотрим задачу в первой постановке при дополнительных условиях $m = n$ и $|\det(A)| > 0$. В работе Р. Гомори[11] (см. также книгу Т. Ху[12]) было показано, что данная задача может быть решена алгоритмом с трудоемкостью $O(n|\det(A)|)$, который является полиномиальным при фиксированном $|\det(A)|$. Данный случай можно свести к случаю 2, но оценка трудоемкости алгоритма Р. Гомори существенно лучше.

Существует гипотеза[1,2,13] о том, что задача ЦЛП в первой постановке может быть решена за полиномиальное время при условии ограниченности абсолютных значений всех ранговых миноров матрицы A или расширенных матриц $(A\,b)$ и $\begin{pmatrix} c^{\mathrm{T}} \\ A \end{pmatrix}$. В дальнейшем мы будем называть эту гипотезу *гипотезой ограниченных миноров*. Обозначим максимальное абсолютное значение миноров матрицы A символом Δ. Хорошо известно, что данная гипотеза справедлива для $\Delta \leqslant 1$. Матрицы с таким свойством известны под именем *тотально унимодулярных* матриц (см., например, монографию[2]).

Гипотеза ограниченных миноров была частично подтверждена в работе[14], а именно, существование полиномиального алгоритма было доказано при условии ограничен-

[4] Kannan R. Minkowski's convex body theorem and integer programming // Mathematics of Operations Research. — 1987. — V. 12. — P. 415–440.

[5] Blomer J. Closest vectors, successive minima, and dual HKZ-bases of lattices // Lecture Notes in Computer Science. — 2000. — V. 1853. — P. 248–259.

[6] Hanrot G., Stehle D. Improved analysis of Kannan's shortest lattice vector algorithm (extended abstract) // Lecture Notes in Comput. Science. — 2007. — V. 4622. — P. 170–186.

[7] Helfrich B. Algorithms to construct Minkowski reduced and Hermite reduced lattice bases // Theoretical Computer Science. —1985. — V. 41. — P. 125–139.

[8] Pujol X., Stehle D. Rigorous and efficient short lattice vectors enumeration // Proceedings of 14th International Conference on the Theory and Application of Cryptology and Information Security. — 2008. — P. 390–405.

[9] Eisenbrand F. Fast integer programming in fixed dimension // Lecture Notes in Computer Science. — 2003. — V. 2832. — P. 196–207.

[10] Papadimitriou C. H. On the complexity of integer programming // Journal of the Association for Computing Machinery. — 1981. — V. 28. — P. 765–768.

[11] Gomory R. E. On the relation between integer and non-integer solutions to linear programs // Proceedings of the National Academy of Sciences. — 1965. — V. 53, No 2. — P. 260–265.

[12] Hu T. C. Integer programming and network flows // Publisher: Addison-Wesley. — 1970. — 452 P.

[13] Шевченко В. Н. Качественные вопросы целочисленного программирования // Из-во: Физматлит. — 1995. — 192 С.

[14] Artmann S., Eisenbrand F., Glanzer C., Oertel T., Vempala S., Weismantel R. A note on non-degenerate integer programs with small sub-determinants // Operations Research Letters. — 2016. — V. 44, No 5. — P. 635–639.

ности абсолютного значения всех ранговых миноров матрицы A и при дополнительном условии их невырожденности.

В работе В. Е. Алексеева и Д. В. Захаровой[15] вариант гипотезы с расширенной матрицей $\begin{pmatrix} c^{\mathrm{T}} \\ A \end{pmatrix}$ был доказан для $\{0,\,1\}$–задач ЦЛП (т. е. задач ЦЛП с $A \in \{0,1\}^{m \times n}, b \in \{0,1\}^m, c \in \{0,1\}^n$) с не более чем двумя единицами в каждой строке матрицы ограничений.

Представляет отдельный интерес случай $\Delta \leqslant 2$. Матрицы с таким свойством были названы *бимодулярными* в работе С. И. Веселова и А. Ю. Чиркова[16]. Политопы задач ЦЛП с бимодулярными матрицами обладают удивительными свойствами. Оказывается, что из телесности такого полиэдра следует существование целой точки внутри полиэдра. Также известно, что в бимодулярном случае вершины выпуклой оболочки целых точек полиэдра исходной задачи лежат на ребрах исходного полиэдра. Это приводит к тому факту, что задача ЦЛП с бимодулярными матрицами может быть решена за полиномиальное время при дополнительном условии ограниченности степеней вершин графа полиэдра задачи (вершинами данного графа являются вершины полиэдра, а ребрами — ребра полиэдра) некоторым полиномом от размерности n.

Существует ряд других работ, посвященных вопросам структуры полиэдров, заданных системами неравенств с ограниченными минорами[17,18,19].

По мнению ряда ведущих ученых, в области целочисленного линейного программирования имеется некоторый недостаток результатов, связанных с теорией линейных программ с ограниченным спектром миноров[14]. По существу, алгоритмическая теория ЦЛП с ограниченными минорами и ограничивается тремя результатами (из работ[14,15,16]), представленными выше. Это свидетельствует об актуальности выбранной темы диссертационного исследования.

Цели и задачи диссертационной работы

Основной задачей работы является исследование гипотезы ограниченных миноров для задачи ЦЛП и других, близких к ней задач дискретной оптимизации. Целями диссертационного исследования являются построение полиномиальных алгоритмов решения задачи ЦЛП, исследование задачи поиска внутренней целой точки полиэдра, а также задачи вычисления ширины полиэдра для входных данных с ограниченным спектром миноров.

[15] Алексеев В. Е., Захарова Д. В. Независимые множества в графах с ограниченными минорами расширенной матрицы инцидентности // Дискретный анализ и исследование операций. — 2010. — Т. 10, No 1. — С. 3–10.

[16] Veselov S. I., Chirkov A. J. Integer program with bimodular matrix // Discrete Optimization. — 2009. — V. 6, No 2. — P. 220–222.

[17] Bonifas N., Di Summa M., Eisenbrand F., Hähnle N., Niemeier M. On sub-determinants and the diameter of polyhedra // Discrete & Computational Geometry. — 2014. — V. 52, No 1. — P. 102–115.

[18] Eisenbrand F., Vempala S. Geometric random edge // arXiv:1404.1568v5.

[19] Kotnyek B. A generalization of totally unimodular and network matrices. PhD thesis // Publisher: Published by ProQuest LLC. — 2014. — 147 P.

Методы исследования

В диссертации использованы методы геометрии чисел, линейной алгебры, комбинаторного анализа, теории полиэдров и теории графов.

Положения диссертации, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты диссертации:

1. Показано, что если полиэдр имеет достаточно большую ширину, то он обязан содержать внутри как минимум $n+1$ целую точку, где n — есть размерность полиэдра. Разработан полиномиальный алгоритм поиска некоторой целой точки внутри полиэдра, имеющего достаточную ширину. Для случая симплекса улучшена (относительно полиэдров общего случая) оценка на значение ширины, превышение которого гарантирует существование целой точки внутри симплекса. Разработан полиномиальный алгоритм поиска целой точки внутри достаточно широкого симплекса.

2. Показано, что если система, задающая симплекс, имеет ограниченные миноры, то существует полиномиальный алгоритм вычисления ширины такого симплекса.

3. Разработан субэкспоненциальный алгоритм для решения задачи ЦЛП на полиэдрах, заданных как выпуклая оболочка системы точек, при дополнительном условии ограниченности спектра миноров матриц, составленных из компонент точек. Показано также, что при более сильном ограничении на спектр миноров матрицы, задача ЦЛП на полиэдре указанного вида может быть решена за полиномиальное время.

4. Установлена справедливость гипотезы ограниченных миноров для некоторых естественных $\{0,1\}$-постановок задач о вершинном и реберном доминирующих множествах в графах. Для основного результата работы[15], касающегося естественной $\{0,1\}$-постановки задачи о независимом множестве, предложено упрощенное доказательство.

Научная новизна

В диссертации получен ряд новых результатов, существенно пополняющих теорию задач ЦЛП с ограниченным спектром миноров. При помощи новых приемов полиэдральной комбинаторики и теории графов были построены полиномиальные алгоритмы решения некоторых задач ЦЛП и близких к ним задач. Все полученные в диссертации результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут применяться при анализе сложности различных задач ЦЛП и близких к ним задач. Они могут также применяться при разработке и чтении курсов и спецкурсов по дискретной оптимизации и теории графов, а также в исследованиях, проводимых в профильных российских и международных научных группах.

Личный вклад соискателя

В первой главе работы доказательство аналога теоремы А. Я. Хинчина[20] для полиэдров, заданных системами неравенств с ограниченными минорами (теорема 1.2.1), принадлежит соискателю. С. И. Веселов упростил ряд доказательств. Уточнение теоремы для симплексов (теорема 1.2.4) получено совместно с С. И. Веселовым.

В первом разделе второй главы приведен алгоритм, позволяющий строить представление произвольного простого многогранного конуса в виде объединения простых унимодулярных многогранных конусов. Данный алгоритм принадлежит А. Ю. Чиркову и был упомянут в монографии[13], но так и не был опубликован самим автором. Полный анализ сложности алгоритма (теоремы 2.1.4 и 2.1.5) был выполнен соискателем. К остальным результатам **второй главы** относятся: построение алгоритма вычисления ширины симплекса, определение специального класса полиэдров, построение эффективных алгоритмов для решения задач ЦЛП на полиэдрах, заданных как выпуклая оболочка системы точек. Все перечисленные в предыдущем предложении результаты получены соискателем лично.

Результаты **третьей главы** получены лично Д. В. Грибановым. К ним относятся: доказательство утверждения о справедливости гипотезы ограниченных миноров для $\{0, 1\}$-постановок задач о вершинном и реберном доминирующих множествах в графах (теоремы 3.3.1 и 3.4.1), а также упрощение основного результата работы[15] (теорема 3.2.2). Д. С. Малышев ограничился лишь постановкой задач и общим руководством проведения исследований.

Апробация работы, степень достоверности результатов и публикации

Результаты, полученные в диссертации, докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- 3rd-6th International Conferences on Network Analysis (Нижний Новгород, 2013–2016),
- XIV и XV Всероссийские конференции «Математическое программирование и приложения» (Екатеринбург, 2013, 2015),
- III Международная научная конференция «Дискретная математика, алгебра и их приложения» (Минск, 2015),
- IX Международная конференция «Дискретные модели в теории управляющих систем» (Моск. обл., 2015),

[20] Хинчин А. Я. Количественная концепция аппроксимационной теории Кронекера // Известия академии наук СССР, Серия математическая. — 1948. — No 12. — С. 113–122.

- XII международный научный семинар «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 2016),
- семинары лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ НН (руководитель В. А. Калягин),
- общегородские семинары г. Н. Новгорода по дискретной математике (руководитель В. Н. Шевченко).

Все результаты диссертации, полученные автором, являются новыми и достоверными. Это подтверждается наличием строгих математических доказательств, опубликованных в рецензируемых научных изданиях. По теме диссертации имеется 4 публикации в изданиях из перечня МинОбрНауки РФ рецензируемых научных изданий. Две работы в журнале «Optimization Letters» (входит в базы цитирований WoS и Scopus), одна работа в журнале «Springer Proceedings in Mathematics and Statistics» (входит в базу цитирований Scopus) и одна работа в журнале «Журнал Средневолжского Математического Общества» (входит в базу цитирований zbMath).

Результаты, полученные в диссертации, включены в отчеты по грантам Российского Фонда Фундаментальных Исследований (15-01-06249-а, 16-31-00109-мол-а), гранта Президента РФ МК-4819.2016.1, мегагранта Правительства РФ 11.G34.31.00357, лаборатории ЛАТАС НИУ ВШЭ.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 74 наименования. Общий объем диссертации составляет 87 страницу.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы исследований и кратко излагаются основные результаты диссертации.

Глава 1 состоит из двух разделов. В **первом разделе** приводятся необходимые обозначения и сведения из теории матриц, полиэдров, геометрии чисел и теории ЦЛП. Во **втором разделе** излагаются аналоги теоремы А. Хинчина для полиэдров, заданных системами с ограниченными минорами.

Опишем, более детально, содержание **первого раздела главы 1**. Данный раздел состоит из пяти частей. **Первая часть** состоит из обозначений теории матриц и множеств. Там также представлены определения линейной, аффинной, конической и выпуклой оболочек, формулировка теоремы Каратеодори, определения k-ограниченной, k-модулярной, унимодулярной и бимодулярной матриц. **Вторая часть** включает в себя определения и сведения из геометрии чисел. Здесь приводятся определение решетки, ее базиса, унимодулярных преобразований, нормальной формы Эрмита и нормальной формы Смита. Изложение данной части ведется по книгам[2,21,22]. **Третья часть** включает в себя определения и фундаментальные факты теории полиэдров. Здесь приводится определение полиэдра, как множества решений некоторой конечной системы неравенств, и политопа, как ограниченного полиэдра. Далее излагается фундаментальный факт теории полиэдров, известный как теорема Минковского–Фаркаша–Вейля, о том, что каждый полиэдр можно задать в виде суммы Минковского выпуклой оболочки и конической оболочки некоторого набора векторов. **В третьей части** также приводится версия данной теоремы для многогранных конусов и излагаются известные факты о сложности перехода от одного представления к другому. **Четвертая часть** включает в себя определения граней, вершин, фасет и ребер полиэдров. Приводится теорема, связывающая грани полиэдра с неравенствами системы, задающей полиэдр. **Третья и четвертая части** следуют изложению книг [2,22,23]. **Пятая часть** содержит информацию о различных постановках задач ЦЛП, различные варианты постановки гипотезы ограниченных миноров и известные частные случаи справедливости гипотезы ограниченных миноров в различных вариантах. Данные случаи перечислены в начальной части автореферата. Пятая часть также содержит один контрпример, связанный со структурой полиэдров, заданных системами с бимодулярными матрицами.

Приведем обозначения и определения **главы 1**, необходимые в дальнейшем.

Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$. Мы будем использовать следующие обозначения для конической и выпуклой оболочек векторов:

- $\operatorname{cone.hull}(A) = \{x = At : t \in \mathbb{Z}^n_+\}$ — коническая оболочка столбцов A,
- $\operatorname{conv.hull}(A) = \{x = At : t \in \mathbb{Z}^n_+,\, \sum_{i=1}^n t_i = 1\}$ — выпуклая оболочка столбцов A.

Для обозначения классов сложности алгоритмов мы будем использовать стандартную O-символику, $O(f(n)) = \{g(n) : \exists c \in \mathbb{R}_+\,, \forall n \in \mathbb{N}\,, c|f(n)| \geqslant |g(n)|\}$.

Для обозначения минорных характеристик матрицы A нам потребуются следующие обозначения (без ограничения общности будем считать, что $m \leqslant n$):

- $\Delta_k(A) = \max\{|\det(A_{JJ})| : J \subseteq \{1, 2, \dots, m\},\, |J| = k\}$ — максимальное абсолютное значение миноров порядка k матрицы A,
- $\delta_k(A) = \min\{|\det(A_{JJ})| > 0 : J \subseteq \{1, 2, \dots, m\},\, |J| = k\}$ — минимальное абсолютное значение ненулевых миноров порядка k матрицы A,
- $\Delta(A) = \Delta_{\operatorname{rank}(A)}(A)$ — максимальное абсолютное значение миноров рангового порядка матрицы A,

[21] Cassels J. W. An introduction to the geometry of numbers // Publisher: Springer-Verlag. — 1997. — 343 P.

[22] Jünger M., Liebling T. M., Naddef D., Nemhauser G. L., Pulleyblank W. R., Reinelt G., Rinaldi G., Wolsey L. A. 50 years of integer programming 1958-2008 // Publisher: Springer-Verlag. — 2010. — 132 P.

[23] Ziegler G. M. Lectures on polytopes // Publisher: Springer-Verlag, Graduate Texts in Mathematics. — 1995. — 370 P.

- $\delta(A) = \delta_{\mathrm{rank}(A)}(A)$ — минимальное абсолютное значение ненулевых миноров рангового порядка матрицы A,
- $\Delta_{\mathrm{gcd}}(A)$ — наибольший общий делитель миноров рангового порядка матрицы A,
- $\Delta_{\mathrm{lcm}}(A)$ — наименьшее общее кратное ненулевых миноров рангового порядка матрицы A.

Класс матриц, для которых $\Delta(A) = k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, будем называть классом *k-ограниченных* матриц. Если $\Delta_i(A) \leqslant k$ для всех i, то такой класс матриц будем называть *тотально k-ограниченным*, делая это по аналогии с классами унимодулярных и тотально унимодулярных матриц. Очевидно, что класс тотально 1-ограниченных матриц эквивалентен классу тотально унимодулярных матриц.

В работе[19] было введено понятие *k-модулярных* матриц. Матрица называется *k-модулярной*, если каждый ее минор рангового порядка принимает значения из множества $\{0, \pm k^s : s \in \mathbb{Z}_+\}$.

Пусть также $b \in \mathbb{Z}^m$. Множество $P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leqslant b\}$ будем называть *полиэдром*. Ограниченный полиэдр будем называть *политопом*. Полиэдр вида $P(A, \mathbf{0})$ будем называть *многогранным конусом*.

Второй раздел главы 1 состоит из трех частей и содержит результаты работ [1,4] соискателя. **В первой части** приводится определение ширины выпуклого тела.

Под *шириной выпуклого тела P по направлению $c \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$* понимается величина $\mathrm{width}_c(P) = \max\{c^\top x : x \in P\} - \min\{c^\top x : x \in P\}$. Под *шириной выпуклого тела P* понимается величина $\mathrm{width}(P) = \min\{\mathrm{width}_c(P) : c \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\}$. Заметим, что для неограниченного выпуклого тела P величина $\mathrm{width}(P)$ может быть неопределенна, так как возможно, что по любому из направлений $c \in \mathbb{Z}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ один из функционалов $c^\top x$ или $-c^\top x$ может быть неограничен.

Далее следует классическая теорема А. Я. Хинчина[20]. Данная теорема утверждает, что если для произвольного выпуклого тела P верно $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$, то $\mathrm{width}(P) \leqslant f(n)$, где величина $f(n)$ зависит только от размерности пространства n. **Первая часть** заканчивается известными фактами об оценках на величину $f(n)$. **Вторая и третья части** содержат основные результаты **главы 1**, являющиеся аналогами теоремы А. Я. Хинчина для полиэдров, заданных системами с k-ограниченными матрицами.

Основным результатом **второй части** является следующая теорема.

Теорема 1.2.1 *Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ и $P = P(A, b)$ — политоп. Если $\mathrm{width}(P) > (\Delta_{\mathrm{lcm}}(A) - 1)\dfrac{\Delta(A)}{\Delta_{\mathrm{gcd}}(A)}(n + 1)$, то $|P \cap \mathbb{Z}^n| \geqslant n + 1$. Также, в этом случае некоторая целая точка множества $P \cap \mathbb{Z}^n$ может быть найдена за полиномиальное время.*

Данный результат влечет за собой несколько простых следствий.

Следствие 1.2.1 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $P = P(A,b)$ *и матрица* A *является* k*-модулярной матрицей. Если* $\operatorname{width}(P) > (\Delta(A)-1)\dfrac{\Delta(A)}{\delta(A)}(n+1)$, *то* $|P\cap\mathbb{Z}^n| \geqslant n+1$. *Также, в этом случае некоторая целая точка множества* $P\cap\mathbb{Z}^n$ *может быть найдена за полиномиальное время.*

Следствие 1.2.2 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $P = P(A,b)$ *и каждый минор рангового порядка матрицы* A *принимает значения* $\pm\Delta(A)$ *или* 0. *Если* $\operatorname{width}(P) > (\Delta(A)-1)(n+1)$, *то* $|P\cap\mathbb{Z}^n| \geqslant n+1$. *Также, в этом случае некоторая целая точка множества* $P\cap\mathbb{Z}^n$ *может быть найдена за полиномиальное время.*

Данная часть завершается замечанием 1.2.1. Данное замечание говорит о том, что в формулировках теоремы 1.2.1 и следствий 1.2.1, 1.2.2 требование от полиэдра быть ограниченным, то есть быть политопом, является избыточным.

Третья часть второго раздела главы 1 содержит уточнение теоремы 1.2.1 для полиэдров, являющихся симплексами. А также, в этой части приводятся некоторые результаты работы Р. Гомори[11] с некоторым их изменением для нужд дальнейшего изложения.

Основным результатом здесь является следующая теорема.

Теорема 1.2.4 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$ *и* $P = P(A,b)$ *— симплекс. Если* $\operatorname{width}(P) \geqslant \delta(A)-1$, *то* $P\cap\mathbb{Z}^n \neq \emptyset$. *Существует полиномиальный алгоритм, вычисляющий некоторую точку множества* $P\cap\mathbb{Z}^n$.

За теоремой идут несколько следствий посвященных сложности задач ЦЛП на симплексах достаточной ширины. Приведем одно из них.

Следствие 1.2.5 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$ *и* $P = P(A,b)$ *— симплекс. Если* $\operatorname{width}(P) \geqslant \Delta(A)-1$, *то для решения задачи* $\max\{c^\top x :\ x \in P\cap\mathbb{Z}^n\}$ *существует алгоритм со сложностью* $O(n\Delta(A))$.

Глава 2 посвящена различным задачам, близким к задаче ЦЛП с k-ограниченными матрицами. Она состоит из двух разделов. Результаты **главы 2** изложены в работе соискателя [2]. **В первом разделе** данной главы излагается аппарат, позволяющий решать некоторые задачи, содержащие в своих постановках k-ограниченные матрицы.

В первой части первого раздела приводится алгоритм, позволяющий строить представление произвольного простого многогранного конуса в виде объединения унимодулярных простых конусов.

Множество многогранных конусов $\{C_1, C_2, \dots, C_s\}$ называется *декомпозицией* многогранного конуса C, если $\bigcup\limits_{i=1}^{s} C_i = C$. Декомпозиция называется *строгой*, если $\dim(C_i\cap C_j) < \dim(C)$ для всех $i \neq j$. Декомпозиция $\operatorname{cone.hull}(A) = \bigcup_{k=1}^s \operatorname{cone.hull}(B^{(k)})$ называется *унимодулярной декомпозицией*, если все матрицы $B^{(k)}$ являются унимодулярными. Сами конуса $\operatorname{cone.hull}(B^{(k)})$ называются *унимодулярными* многогранными конусами.

Основными результатами данной части являются следующие утверждения.

Теорема 2.1.3 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $|\det(A)| = \Delta > 0$. *Существует алгоритм, строящий целочисленные, унимодулярные матрицы* $B^{(j)}$, *где* $j \in \{1, \dots, s\}$, *такие, что* $\operatorname{cone.hull}(A) = \bigcup\limits_{j=1}^{s} \operatorname{cone.hull}(B^{(j)})$. *Для количества унимодулярных конусов в декомпозиции справедлива оценка* $s \leqslant n^{2 \log_2(\Delta)}$. *Алгоритм является полиномиальным при ограниченном* Δ.

Теорем 2.1.5 *Битовая сложность алгоритма теоремы* 2.1.3 *равна* $O(n^{\omega + 2\log_2(\Delta)} M(n \log(n \alpha \Delta^2)))$, *где* ω *— показатель экспоненты для алгоритмов быстрого умножения матриц,* $\Delta = |\det(A)|$, $\alpha = \max\{|A_{ij}|\}$ *и* $M(t)$ *— сложность перемножения двух* t*-битовых целых чисел.*

Во второй части первого раздела формулируется специальный класс полиэдров, позволяющий строить полиномиальные при растущей размерности алгоритмы ЦЛП. Пусть $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $C \in \mathbb{Z}^{n \times s}$, $b \in \mathbb{Z}^m$ и $p \in \mathbb{Q}^n$. Полиэдры данного класса задаются в виде $P(A, b) \cap (p + \operatorname{cone.hull}(C))$, при дополнительном условии, что для каждого $i \in \{1, \dots, m\}$ верно $(A_{i*})^\top \in \operatorname{cone.hull}((C^{-1})^\top)$. Фактически, полиэдр данного класса представляет собой простой многогранный конус, пересеченный совокупностью полупространств $P(A, b)$, при условии, что все вектора, противоположные нормалям полупространств, задающих $P(A, b)$, содержатся в конусе нормалей вершины конуса $\operatorname{cone.hull}(C)$.

Сложность задач ЦЛП на данном классе полиэдров раскрывают следующая лемма и ее следствие. Доказательства данных утверждений опираются на результаты о декомпозиции конуса на унимодулярные конуса.

Лемма 2.1.3 *Пусть* $C \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $p \in \mathbb{Q}^n$, $|\det(C)| = \Delta > 0$. *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$, $c \in \mathbb{Z}^n$ *и для каждого* $i \in \{1, \dots, m\}$ *верно* $(A_{i*})^\top \in \operatorname{cone.hull}((C^{-1})^\top)$ *и* $c \in \operatorname{cone.hull}((C^{-1})^\top)$. *Тогда, при ограниченном* Δ, *для решения задачи* $\max\{c^\top x : x \in P(A, b) \cap (p + \operatorname{cone.hull}(C)) \cap \mathbb{Z}^n\}$ *существует полиномиальный алгоритм. Верхняя оценка трудоемкости данного алгоритма совпадает с верхней оценкой трудоемкости алгоритма из теоремы* 2.1.5.

Следствие 2.1.3 *Пусть* $C \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $p \in \mathbb{Q}^n$, $|\det(C)| = \Delta > 0$. *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^n$ *и для каждого* $i \in \{1, \dots, m\}$ *верно* $(A_{i*})^\top \in \operatorname{cone.hull}((C^{-1})^\top)$. *Тогда, при ограниченном* Δ, *для задачи проверки множества* $P(A, b) \cap (p + \operatorname{cone.hull}(C)) \cap \mathbb{Z}^n$ *на непустоту существует полиномиальный алгоритм.*

В третьей части первого раздела главы 2 результаты предыдущих частей применяются с целью построения алгоритмов решения задачи ЦЛП в альтернативной постановке. В данной постановке политоп допустимой области задается выпуклой оболочкой точек, а не системой линейных неравенств. Пусть $A \in \mathbb{Z}^{n \times s}$ и $c \in \mathbb{Z}^n$, одной из возможных постановок является следующая — $\max\{c^\top x : x \in \operatorname{conv.hull}(A) \cap \mathbb{Z}^n\}$. Нетрудно видеть, что задача в этой постановке является тривиальной, так как оптимум достигается на вершине политопа $\operatorname{conv.hull}(A)$, координаты которой совпадают с одним из столбцов матрицы A. Таким образом, согласно замечанию 2.1.1 диссертации, задачу нужно усложнить путем отсечения вершин. Пусть $S = \operatorname{conv.hull}(A)$, тогда, нетрудно видеть, что задача в новой постановке — $\max\{c^\top x : x \in (S \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \operatorname{vert}(S)\}$, где $\operatorname{vert}(S)$ есть множество вершин S, является NP-трудной.

Одним из основных результатов данной части является следующая теорема.

Теорема 2.1.6 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{n \times (n+1)}$, $c \in \mathbb{Z}^n$ *и* $S = \operatorname{conv.hull}(A)$ *— симплекс размерности* n. *Если величина* $\Delta(A)$ *ограничена, то для задачи* $\max\{c^\top x : x \in (S \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \operatorname{vert}(S)\}$ *существует субэкспоненциальный по* n *алгоритм.*

Дополнительно, если величина $|\det(\bar{A})|$ *ограничена, где* $\bar{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^\top \\ A \end{pmatrix}$, *то для задачи* $\max\{c^\top x : x \in (S \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \operatorname{vert}(S)\}$ *существует полиномиальный алгоритм.*

Теперь мы можем сформулировать общий результат, аналогичный результату Х. Пападимитриу[10] для классической постановки задачи ЦЛП, легко следующий из теоремы 2.1.6 применением триангуляции политопа $\operatorname{conv.hull}(A)$.

Теорема 2.1.7 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{n \times m}$, $c \in \mathbb{Z}^n$ *и* $S = \operatorname{conv.hull}(A)$. *Если величины* $\Delta(A)$ *и* $k = m - \operatorname{rank}(A)$ *ограничены, то для задачи* $\max\{c^\top x : x \in (S \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \operatorname{vert}(S)\}$ *существует субэкспоненциальный по* n *алгоритм.*

Дополнительно, если величины $\Delta(\bar{A})$ *и* k *ограничены, где* $\bar{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}^\top \\ A \end{pmatrix}$, *то для задачи* $\max\{c^\top x : x \in (S \cap \mathbb{Z}^n) \setminus \operatorname{vert}(S)\}$ *существует полиномиальный алгоритм.*

Второй раздел главы 2 посвящен задаче вычисления ширины симплекса, заданного системой с ограниченными минорами. Из работы А. Сёбу [24] известно, что данная задача является NP-трудной. Тем не менее, если ограничить определенным способом миноры системы, задающей симплекс, то, используя результаты предыдущих частей, можно получить полиномиальный алгоритм.

Теорема 2.2.1 *Пусть* $A \in \mathbb{Z}^{(n+1) \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^{n+1}$ *и* $P = P(A, b)$ *— симплекс размерности* n. *Если величина* $\max\{\Delta_n(A\,b), \Delta_{n-1}(A)\}$ *ограничена, то для задачи вычисления ширины* P *существует полиномиальный алгоритм. Битовая сложность алгоритма равна* $\tilde{O}(n^{3+\omega+2\log_2 \Delta_{n-1}(A)})$, *где* ω *— показатель экспоненты для алгоритмов быстрого умножения матриц.*

Символ $\tilde{O}$ здесь обозначает, что мы игнорируем логарифмический множитель при анализе трудоемкости, т. е. $\tilde{O}(f(n)) = \{g(n) :\ g(n) = O(f(n)\,\log(f(n)))\}$.

Дополнительно, если для симплекса $P = P(A, b)$ мы имеем $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$, то мы можем использовать теорему 1.2.4 для ограничения его ширины и трудоемкость алгоритма может быть уменьшена.

[24] Sebö A. An introduction to empty lattice simplices // Lecture Notes in Computer Science. — 1999. — V. 1610. — P. 400–414.

Теорема 2.2.2 *Пусть $A \in \mathbb{Z}^{(n+1)\times n}$, $b \in \mathbb{Z}^{n+1}$, $P = P(A,b)$ — симплекс размерности n и $P \cap \mathbb{Z}^n = \emptyset$. Тогда, если величина $\max\{\delta_n(A), \Delta_{n-1}(A)\}$ ограничена, то для задачи вычисления ширины P существует полиномиальный алгоритм. Трудоемкость алгоритма равна $\tilde{O}(n^{3+\omega+2\log_2 \Delta_{n-1}(A)})$.*

Раздел заканчивается замечанием 2.2.1, о том что результаты теорем 2.2.1 и 2.2.2 могут быть обобщены на более широкий класс полиэдров.

Глава 3 посвящена гипотезе ограниченных миноров для $\{0,1\}$-постановок некоторых задач комбинаторной оптимизации на графах. Результаты данной главы опубликованы в работе [3] соискателя. Данная глава состоит из четырех разделов. **Первый раздел** состоит из двух частей и в нем приводятся необходимые сведения теории графов. **В первой части** данного раздела приводятся обозначения теории графов, а во **второй части** приводятся $\{0,1\}$-постановки таких задач, как задача о независимом множестве, задача о реберном доминирующем множестве, задача о вершинном доминирующем множестве.

Второй раздел главы 3 посвящен задаче о независимом множестве в графе, далее ЗНМ. Пусть $\mathbf{I}(G)$ — есть матрица инцидентности графа G, а $\mathbf{j}_k$ — есть вектор, составленный из k единиц. Для заданного графа G с n вершинами и m ребрами ЗНМ может быть сформулирована в виде следующей программы:

$$\max\ \mathbf{j}_n^\top \mathbf{x}$$
$$\mathbf{I}^\top(G)\mathbf{x} \leqslant \mathbf{j}_m,$$
$$\mathbf{x} \in \{0,1\}^n.$$

Целью второго раздела является другое, более простое доказательство теоремы, являющейся основным результатом работы В. Е. Алексеева и Д. В. Захаровой[15]. Данный результат заключается в том, что ЗНМ в приведенной постановке может быть решена за полиномиальное время на классе графов, для которых абсолютные значения всех миноров матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{j}_n^\top \\ \mathbf{I}^\top(G) \end{pmatrix}$ ограничены. Этот результат влечет справедливость гипотезы ограниченных миноров для $\{0,1\}$-задач ЦЛП, матрицы ограничений которых содержат в каждой строке не более двух единиц.

Второй раздел состоит из трех частей. **Первая часть** содержит включение между некоторыми классами графов, необходимое для доказательство основного результата. **Вторая часть** содержит формулировку теоремы Б. Рида[25]. **Третья часть**, непосредственно, содержит упрощенное доказательство результата В.Е. Алексеева и Д.В. Захаровой.

Третий и четвертый разделы главы 3 посвящены задачам о вершинном и реберном доминирующих множествах в графе, далее они будут называться ЗВДМ и

[25] Reed B. Mangoes and Blueberries // Combinatorica. — 1999. — V. 19, No 2. — P. 267–296.

ЗРДМ, соответственно. Пусть $\mathbf{A}_v(G)$ — есть матрица смежности вершин графа G, а $\mathbf{A}_e(G)$ — есть матрица смежности ребер графа G. Тогда, для заданного графа G с n вершинами и m ребрами задачи ЗВДМ и ЗРДМ могут быть сформулированы в виде следующих программ:

$$\begin{aligned} &\min \mathbf{j}_n^\top \mathbf{y} \\ &(\mathbf{A}_v(G) + \mathbf{I}_n)\mathbf{y} \geqslant \mathbf{j}_n, \\ &\mathbf{y} \in \{0,1\}^n. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\min \mathbf{j}_m^\top \mathbf{y} \\ &(\mathbf{A}_e(G) + \mathbf{I}_m)\mathbf{y} \geqslant \mathbf{j}_m, \\ &\mathbf{y} \in \{0,1\}^m. \end{aligned}$$

Пусть $\mathcal{V}DSP(c)$ и $\mathcal{E}DSP(c)$ — множества всех графов G таких, что абсолютные значения всех миноров матриц $\mathbf{A}_v(G) + \mathbf{I}_n$ и $\mathbf{A}_e(G) + \mathbf{I}_m$ не превосходят c, соответственно. Основными результатами **третьего и четвертого разделов главы 3** являются следующие теоремы.

Теорема 3.3.1 *Для любого фиксированного* c ЗВДМ *для графов из* $\mathcal{V}DSP(c)$ *может быть решена за полиномиальное время.*

Теорема 3.4.1 *Для любого фиксированного* c ЗРДМ *для графов из* $\mathcal{E}DSP(c)$ *может быть решена за полиномиальное время.*

Третий раздел главы 3, как и **четвертый раздел**, состоит из двух частей. **Первая часть** содержит вспомогательные результаты, необходимые для доказательства основного результата. **Вторая часть** содержит формулировку и доказательство основного результата.

В заключении подводится итог к проделанной работе. Здесь также приводится замечание о том, что результаты данной диссертации могут быть применены и к задаче вычисления минимального вектора решетки. Работа, где содержится данный результат, еще не опубликована.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Gribanov D. V., Veselov S. I. On integer programming with bounded determinants // Optimization Letters. — 2016. — V. 10, No 6. — P. 1169–1177.

[2] Gribanov D. V., Chirkov A. Y. The width and integer optimization on simplices with bounded minors of the constraint matrices // Optimization Letters. — 2016. — V. 10, No 6. — P. 1179–1189.

[3] Грибанов Д. В., Малышев Д. С. Сложность некоторых задач на графах с ограниченными минорами их матриц ограничений // Журнал Средневолжского математического общества. — 2016. — Т. 18, No. 4 — Стр. 11–23.

[4] Gribanov D. V. The flatness theorem for some class of polytopes and searching an integer point // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. — 2014. — V. 104. — P. 37–43.