

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Горшанова Анастасия

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АППРОКСИМАЦИИ СИСТЕМАМИ ВСПЛЕСКОВ

Специальность 1.1.1 —

«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
Е. А. Лебедева

Санкт-Петербург

2026

Оглавление

Введение	3
Глава 1 Прямая теорема типа Джексона для нестационарной системы периодических всплесков	18
1.1 Введение	18
1.2 Построение биортогональных систем периодических всплесков в пространствах L_p , $p \in [1, \infty)$ и C	18
1.3 Прямые теоремы для нестационарной системы периодических всплесков . . .	20
Глава 2 Фреймы Парсеваля периодических всплесков	29
2.1 Введение	29
2.2 Критерии фреймовости систем периодических всплесков	30
2.3 Примеры применения критериев для построения фреймов	42
2.4 Порядок аппроксимации периодическим кратномасштабным анализом	47
2.5 Порядок аппроксимации фреймом всплесков	52
Глава 3 Аппроксимационные свойства систем диадических всплесков в пространствах Лебега	64
3.1 Введение	64
3.2 Построение диадических систем всплесков	65
3.3 Сходимость разложений по фрейму Парсеваля диадических всплесков	71
Заключение	80
Обозначения	81
Литература	84

Введение

Актуальность темы исследования. Теория аппроксимации является классическим разделом теории функций, активно дополняемым новыми результатами и по сей день. Аппроксимация различными системами функций и, в частности системами всплесков — один из основных методов решения задач, возникающих при обработке сигналов, работе с изображениями, сжатии и архивировании файлов данных.

Теория всплесков возникла из практических задач обработки сигналов в 80-ые годы 20-го века и активно развивалась в последующие годы в том числе благодаря их применению в различных инженерных задачах, в частности в нейронных сетях, а также в задачах математической физики, аппроксимации и интерполяции функций.

Для функций, заданных на вещественной прямой, вопросы сходимости разложений по системе всплесков хорошо изучены различными авторами. Уже в монографии И. Мейера [38] 1992 года, ставшей классической (см. также работу Г. Вальтера [45] 1995 года) изучались ортонормированные базисы всплесков и их сходимость при условии r -регулярности всплесковых функций. В 1994 году в работе [30] С.Е. Келли, М.А. Кона и Л.А. Рафаэля появились результаты о сходимости ортогональных систем всплесков на прямой при условии существования чётной, ограниченной, суммируемой, убывающей на $[0, +\infty)$ мажоранты. При аналогичных условиях в 2005 году в монографии [11] И.Я. Новиковым, В.Ю. Протасовым и М.А. Скопиной получены оценки в терминах модулей непрерывности для разложений по системам всплесков не только для непериодических систем на прямой, но и для периодических всплесков, порождённых двоичными сжатиями и сдвигами непериодической функции (стационарная система всплесков). Наиболее общие результаты о сходимости приближений непериодических функций квази-проеекционными операторами в пространствах $L_p(\mathbb{R})$ и почти всюду, для которых системы всплесков являются частным случаем, были описаны в работе [44] О.Л. Виноградова 2021 года. Аппроксимационные свойства периодических квази-проеекционных операторов изучались, например, в статье [32] Ю. Коломойцева, А.В. Кривошеина и М.А. Скопиной 2020 года.

В главе 1 диссертации исследуются аппроксимационные свойства периодических нестационарных систем всплесков. В частности, для характеристики свойств аппроксимации получена прямая теорема типа Джексона. В классической теореме Джексона о приближении тригонометрическими полиномами для характеристики погрешности приближения используется наилучшее приближение функции тригонометрическими полиномами $E_N(f)$. Неравенство вида $E_N(f) \leq C \cdot \omega_r(f, 1/N)$, где наилучшее приближение оценивается сверху мо-

дулем непрерывности ω_r с некоторой константой C , называется неравенством Джексона. В дальнейшем были получены аналоги неравенства Джексона для различных пространств и приближающих систем функций. Соответствующие теоремы называют *прямыми теоремами типа Джексона*. Утверждения, доказывающие обратное неравенство, в котором модуль непрерывности оценивается сверху с помощью наилучшего приближения, получили название *обратные теоремы*. Прямые и обратные теоремы типа Джексона широко распространены в теории аппроксимации и позволяют выявить взаимосвязь между структурными свойствами функции (её гладкостью), от которых зависит величина модуля непрерывности, и её конструктивными свойствами, которые характеризуются поведением её наилучших приближений.

Литература по этому вопросу поистине необозрима. Упомянем в качестве примера только монографии [14] А.Ф. Тимана 1960 года, [2] Н.И. Ахиезера 1965 года, [10] В.В. Жука 1982 года, [43] Р.М. Тригуба и Е.С. Белинского 2004 года. Если говорить о результатах именно для систем всплесков, то в статье [16] П.А. Андриановым и М.А. Скопиной были доказаны неравенства Джексона для периодизированных сепарабельных многомерных всплеск-систем Хаара. Прямые и обратные теоремы для произвольных одномерных систем периодических всплесков, полученных с помощью периодизации непериодической всплеск-функции и образующих ортонормированный базис, были описаны в [11]. Развивая идеи [11], в главе 1 диссертации получено описание аппроксимационных свойств биортгональных базисов периодических нестационарных систем всплесков в пространствах L_p , $p \in [1, +\infty)$, и пространстве непрерывных функций. Результат представляет собой прямую теорему типа Джексона, но в отличие от результатов [11] для периодических базисов всплесков, в данной теореме не требуется наличие мажоранты, а система всплесков может не иметь порождающей её непериодической функции (то есть является нестационарной системой). Так же в главе 1 приведены аналоги прямой теоремы с ослаблением условий на гладкость всплесковых функций.

Наряду с ортогональными базисами всплесков в пространствах Лебега L_2 так же в качестве аппарата приближения используются фреймы всплесков. В отличие от базисов фреймы могут быть избыточными системами. Однако они всегда полны и обеспечивают стабильное восстановление. Характеризация фрейма всплесков для непериодических функций при различных предположениях на всплесковые генераторы описана в работах и монографии [11, 19, 27, 36] П.-Г. Лемарье, И. Добеши, Г. Грипенберга, И.Я. Новикова, В.Ю. Протасова и М.А. Скопиной. Данные критерии сложно применять для построения конкретных примеров фреймов всплесков. Поэтому основным инструментом здесь является унитарный принцип расширения, предложенный А. Роном и З. Шеном в работе [39] для непериодического случая и позже адаптированный для периодических функций в статьях [17, 23, 24] О. Кристенсена, С.С. Гоха, Б. Хана, З. Шена и К.М. Тео. В работе [20] И. Добеши, Б. Хана, А. Рона и З.Шена был предложен более гибкий и, на первый взгляд, более общий способ построения фреймов всплесков, известный как скошенный принцип расширения, однако в этой же работе доказывалось, что оба принципа эквивалентны, и скошенный принцип расширения дает лишь иную, иногда более удобную форму для применения унитарного принципа. При этом

унитарный принцип расширения дает только достаточное условие фреймовости. В главе 2 получен конструктивный критерий фреймовости, позволяющий строить фреймы Парсевала всплесков. Его аналоги в непериодической постановке задачи неизвестны.

Для оценки аппроксимационных свойств фреймов всплесков применяются различные подходы. В частности, для этого используется понятие порядка аппроксимации. Для систем фреймов многомерных непериодических всплесков в $L_2(\mathbb{R}^d)$ в статье [20] описаны их аппроксимационные свойства в терминах порядков аппроксимации фреймом и соответствующим ему кратномасштабным анализом. Для систем периодических фреймов всплесков, построенных с помощью унитарного принципа расширения, определение порядка аппроксимации появилось в статье [23] С.С. Гоха, Б. Хана и З. Шена 2011 года. В этой же статье для периодических фреймов всплесков были установлены необходимые и достаточные условия, при которых фрейм Парсевала имеет заданный порядок аппроксимации фреймом. Аналогичные условия для непериодических фреймов всплесков можно найти в статье [29]. В главе 2 в терминах порядков аппроксимации исследуются аппроксимационные свойства периодических фреймов Парсевала всплесков, построенных с помощью критерия фреймовости. Получен аналог критерия о достижении заданного порядка аппроксимации фреймом. Благодаря способу построения фрейма удалось избавиться от дополнительного условия для масштабирующих функций, присутствующего в теоремах [23]. Так же для периодических фреймов всплесков удалось установить взаимосвязь между порядком аппроксимации фреймом и порядком аппроксимации периодических кратномасштабным анализом. Ранее взаимосвязь между этими величинами была известна лишь для непериодических фреймов (см. [20]).

Для диадических систем всплесков на положительной полупрямой, или на языке групп, для всплесков на локально компактных группах Кантора, аппроксимационные свойства в диадических аналогах пространств Соболева изучались Ю.А. Фарковым, Е.А. Лебедевой, М.А. Скопиной в работе [22]. В статье С.Ф. Лукомского [37] исследовались аппроксимационные свойства диадических фреймов Парсевала всплесков в весовых пространствах Соболева с логарифмическими весами. В этих статьях изучается только L_2 -сходимость. В главе 3 диссертации для диадических фреймов всплесков доказана сходимость разложений почти всюду и в пространствах $L_p(\mathbb{R}_+)$, $p \in (1, \infty)$. При этом сходимость получена за счёт особенности групповой операции для диадических функций и не требует дополнительных условий на гладкость или наличия суммируемой мажоранты. В то время, как эти условия лежат в основе соответствующих теорем для систем всплесков на прямой (см. [11, 19, 27, 36]).

Цель диссертационной работы. Основной целью данной диссертационной работы является исследование аппроксимационных свойств периодических систем всплесков, которые образуют базис или фрейм Парсевала, и аппроксимационных свойств систем диадических всплесков. А также изучение вопроса построения периодических фреймов всплесков.

Методы исследования. В диссертации использованы методы вещественного, комплексного и функционального анализа и теории приближения функций.

Научная новизна. Все полученные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость. Результаты работы носят теоретический

характер и могут быть использованы при решении родственных задач теории приближения.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получена прямая теорема типа Джексона для нестационарных систем периодических всплесков, образующих биортогональные базисы в пространствах Лебега и пространстве непрерывных функций.

2. Получены конструктивные необходимые и достаточные условия, при которых система периодических всплесков образует фрейм Парсевала в пространстве Лебега L_2 . Критерий может использоваться непосредственно для построения фрейма Парсевала всплесков. Для построенных таким образом фреймов всплесков получены необходимые и достаточные условия, при которых периодический фрейм Парсевала всплесков имеет заданный порядок аппроксимации фреймом. Выявлена взаимосвязь и условия совпадения порядка аппроксимации фреймом и порядка аппроксимации периодическим кратномасштабным анализом, порождённым сдвигами масштабирующих функций.

3. В диадических пространствах Лебега на положительной полупрямой доказана сходимость разложений по системе диадических фреймов Парсевала всплесков к приближаемой функции почти всюду и по норме пространств Лебега.

Апробация результатов. Результаты работы докладывались автором на IV Конференции математических центров России (Санкт–Петербург, 2024 г.) и на городском семинаре по конструктивной теории функций под руководством проф. М. А. Скопиной (2021 г., 2024 г., 2025 г.). Также результаты третьей главы диссертации докладывались научным руководителем Е. А. Лебедевой на XXXIV Летней конференции по математическому анализу (Санкт–Петербург, 2025 г.).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертации изложены в четырёх статьях ([26], [5], [7], [6]), опубликованных в ведущих научных журналах из списка, рекомендованного ВАК.

Личный вклад автора. Результаты первой главы получены соискателем лично и опубликованы в работе [26]. Результаты второй и третьей главы опубликованы в совместных с Е. А. Лебедевой работах [5], [7], [6]. Научному руководителю принадлежит постановка задачи и общий план исследования. Все доказательства получены соискателем.

Объем и структура работы. Полный объём диссертации составляет 86 страниц. Список литературы содержит 45 наименования. Диссертация состоит из введения, трёх глав, разделённых на параграфы, заключения, обозначений и списка литературы. Нумерация утверждений отдельная для каждого типа утверждений в каждой главе. При ссылке на утверждение другой главы первым указывается номер главы, например: теорема 2.3. Утверждения, не принадлежащие автору, имеют буквенную нумерацию. Нумерация формул в главах двойная и указывает на номер главы и номер формулы в главе, например: формула (2.3).

Содержание диссертации.

Первая глава посвящена аппроксимационным свойствам периодических систем всплесков, образующих биортогональный базис в пространстве L_p , $p \in [1, +\infty)$, или C . Погрешность приближения системой всплесков оценивается модулем непрерывности приближаемой функ-

ции f , величина которого напрямую зависит от степени гладкости f , то есть от её структурных свойств. Оценка представляет собой прямую теорему типа Джексона. Результаты главы опубликованы в [26].

В главе рассматривается нестационарная система периодических всплесков

$$\{\varphi_0\} \cup \{S_j^k \psi_j : j \in \mathbb{Z}_+, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1\},$$

в которой на каждом уровне j имеется своя всплеск-функция. Таким образом порождающей их непериодической всплеск-функции может не существовать. Для построения такой системы всплесков используется метод основанный на построении периодического кратномасштабного анализа (ПКМА), который описан в [11, §9.1.-9.2.]. Этот метод позволяет строить ортогональные или биортогональные базисы. Для начала в пространстве $L_p, p \in [1, +\infty)$ (C если $p = \infty$) и в сопряжённом ему пространстве L_q (C , если $p = 1$) строятся ПКМА подмножеств $\{V_j\}_{j=0}^\infty$ первого пространства и ПКМА $\{\tilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ второго пространства. Эту пару ПКМА называют (p, q) -парой. Каждый из этих ПКМА имеет свой набор масштабирующих функций, сдвиги которых образуют биортонормированную систему. Затем на каждом уровне j ПКМА в L_p (C при $p = \infty$) подбирается всплеск-функция из множества V_{j+1} , сдвиги которой биортогональны множеству \tilde{V}_j . Аналогичным образом строятся всплески в сопряжённом пространстве L_q (C при $p = 1$). Получившиеся системы всплеск-функций и их сдвиги вместе с масштабирующими функциями нулевого уровня $\varphi_0 \in V_0$ и $\tilde{\varphi}_0 \in \tilde{V}_0$ образуют биортогональные базисы всплесков соответственно в пространствах L_p (C при $p = \infty$) и L_q (C при $p = 1$). Задача состоит в оценке сверху модулем непрерывности нормы погрешности приближения, то есть нормы разности функции $f \in L_p$ (C при $p = \infty$) и частичной суммы разложения функции f по базису всплесков

$$s_N(f) = \langle f, \tilde{\varphi}_0 \rangle \varphi_0 + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f, S_n^j \tilde{\psi}_j \rangle S_n^j \psi_j + \sum_{n=0}^L \langle f, S_n^J \tilde{\psi}_J \rangle S_n^J \psi_J,$$

где $N = 2^J + L \in \mathbb{N}$, $J \in \mathbb{Z}_+$, $L \in \{0, 1, \dots, 2^J - 1\}$. Как показано в [11, §10.2], наилучшее приближение всплеск-полиномами порядка N всегда не превосходит $\|f - s_N(f)\|_p$, поэтому оценка сверху будет доказана именно для нормы разности. При этом порядок модуля непрерывности в оценке зависит от гладкости всплеск-функций и скорости убывания некоторых из их коэффициентов Фурье. Сформулируем основную теорему первой главы.

Теорема 1.1. Пусть $p \in [1, +\infty]$, $1/p + 1/q = 1$, а числа $r, m, \nu \in \mathbb{N}$ таковы, что $2m \geq r + 4$ и $2\nu \geq r + 2$. Пусть $\{V_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\tilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ образуют (p, q) -пару с масштабирующими последовательностями $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\tilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$ соответственно, такими, что для всякого $j \in \mathbb{Z}_+$ функции $\{S_j^n \varphi_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ и $\{S_j^n \tilde{\varphi}_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ образуют биортонормированные системы, а $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty$, $\{\tilde{\psi}_j\}_{j=0}^\infty$ – соответствующие последовательности всплеск-функций, удовлетворяющие следующим условиям. Для всех $j \in \mathbb{Z}_+$

$$(i) \quad \psi_j, \tilde{\psi}_j \in C^m \quad \text{и} \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|\psi_j^{(m)}\|_\infty < \infty, \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|\tilde{\psi}_j^{(m)}\|_\infty < \infty.$$

(ii) найдётся положительная постоянная C_1 , не зависящая от j и k , такая что

$$\left| \widehat{\psi}_j(k) \right|, \left| \widetilde{\psi}_j(k) \right| \leq \frac{C_1 |k|^\nu}{2^{j\nu+j/2}} \quad \text{для всех } k \in R_j.$$

Тогда для всех $f \in L_p$ (C если $p = \infty$) и всех $N \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|f - s_N(f)\|_p \leq \widetilde{C} \omega_r \left(f, \frac{1}{N} \right)_p,$$

где \widetilde{C} зависит только от m, r, p, ν и постоянных, входящих в условия (i) и (ii).

Из доказательства теоремы видно, что требования к порядку гладкости всплеск-функций можно ослабить, если m -ые производные всплеск-функций будут удовлетворять условию Липшица порядка 1. Так же для одной из биортогональных систем всплесков можно ослабить требования к гладкости её функций, изменив при этом условия для допустимого порядка модуля непрерывности. Соответствующее утверждение имеет следующий вид.

Теорема 1.2. Пусть $p \in [1, +\infty]$, $1/p + 1/q = 1$ и пусть числа $r, m, \nu \in \mathbb{N}$ удовлетворяют неравенствам $m \geq 3 + r$ и $\nu \geq 2 + r$. Пусть $\{V_j\}_{j=0}^\infty, \{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ образуют (p, q) -пару с масштабирующими последовательностями $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty, \{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$ соответственно, такими что для всякого $j \in \mathbb{Z}_+$ функции $\{S_j^n \varphi_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ и $\{S_j^n \widetilde{\varphi}_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ образуют биортонормированные системы, а $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty, \{\widetilde{\psi}_j\}_{j=0}^\infty$ – соответствующие последовательности всплеск-функций, удовлетворяющие следующим условиям. Для всех $j \in \mathbb{Z}_+$

$$(i') \quad \widetilde{\psi}_j \in C^m \quad \text{и} \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|\widetilde{\psi}_j^{(m)}\|_\infty < \infty,$$

(ii') найдётся положительная константа C_1 , не зависящая от j и k , такая что

$$\left| \widehat{\psi}_j(k) \right| \leq \frac{C_1 |k|^\nu}{2^{j\nu+j/2}} \quad \text{для всех } k \in R_j,$$

$$(iii') \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}_j(k) \right| < \infty.$$

Тогда для всех $f \in L_p$ (C если $p = \infty$) и всех $N \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|f - s_N(f)\|_p \leq \widetilde{C} \omega_r \left(f, \frac{1}{N} \right)_p,$$

где \widetilde{C} зависит только от m, r, p, ν и постоянных, входящих в условия (i')-(iii').

Вторая глава посвящена построению и изучению аппроксимационных свойств периодических фреймов Парсевала системы всплесков в пространстве L_2 . Результаты опубликованы в [5] и [7].

В отличие от базисов фреймы могут быть избыточными системами. Однако они всегда полны и обеспечивают стабильное восстановление. В данной главе на каждом уровне допускается существование сразу нескольких всплеск-функций. Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ зафиксируем натуральное число ρ_j и рассмотрим функции $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, 2, \dots, \rho_j$. Семейство функций

$$\Psi = \{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$$

называется системой периодических всплесков. При этом функции $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, 2, \dots, \rho_j$ называются всплесковыми генераторами или всплеск-функциями. Из описания первой главы можно заметить, что в систему периодических всплесков обычно включают и масштабирующую функцию φ_0 . Для упрощения изложения результатов второй главы оказалось удобным принять обозначение $\psi_0^1 = \varphi_0$, которое не влияет на суть изложения. Говорят, что система Ψ образует фрейм Парсевала всплесков в L_2 , если для всех $f \in L_2$ выполнено равенство Парсевала

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\rho_j} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\langle f, S_j^k \psi_j^m \rangle|^2.$$

В первой части данной главы для системы периодических всплесков описаны конструктивные необходимые и достаточные условия, при которых это семейство образует фрейм Парсевала. Теоремы 2.1 и 2.2 являются вспомогательными для доказательства конструктивного критерия фреймовости системы всплесков в теореме 2.3 и более общей теореме 2.4.

В теореме 2.1 приведена общая характеристика фрейма всплесков в терминах коэффициентов Фурье. Для непериодических всплесков аналог этого результата доказан при различных предположениях на всплесковые генераторы в [11, 19, 27, 36]. Полученная характеристика служит для доказательства критерия фреймовости системы всплесков в терминах последовательности масштабирующих функций в теореме 2.2, то есть функций $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих масштабирующему уравнению

$$\widehat{\varphi}_j(n) = \sqrt{2} \widehat{a_{j+1}}(n) \widehat{\varphi_{j+1}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $\widehat{a}_j(n)$ – 2^j -периодическая последовательность, называемая масштабирующей маской. При таком подходе генераторы всплесков определяются с помощью всплесковых уравнений

$$\widehat{\psi}_j^m(n) = \sqrt{2} \widehat{b_{j+1}^m}(n) \widehat{\varphi_{j+1}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m = 1, \dots, \rho_j, \quad (2)$$

где $\widehat{b}_j^m(n)$ – 2^j -периодические последовательности по параметру n , называемые масками всплесков. При этом из соглашения $\psi_0^1 = \varphi_0$ следует, что $\widehat{a}_1(n) = \widehat{b}_1^1(n)$. Для непериодических всплесков аналог этого результата доказан в работе [39].

Ни один из критериев, приведённых в теоремах 2.1 и 2.2, не даёт явного способа построения системы всплесков. В [39] для непериодических систем всплесков также отмечается невозможность практического применения предложенного в этой работе критерия, описанного в терминах масштабирующих функций, и приводится частный случай (следствие 6.7),

известный как унитарный принцип расширения (the unitary extension principle), который широко используется для построения систем всплесков. Его периодические аналоги приведены, например, в работах [17, 23, 24]. В работе [20] предлагается более гибкий и, на первый взгляд, более общий способ построения фреймов всплесков, известный как скошенный принцип расширения (the oblique extension principle), однако в этой же работе доказывается, что оба принципа эквивалентны. Отметим, что унитарный принцип расширения дает только достаточное условие и не является критерием в отличие от теоремы 2.4.

Основной результат данной главы приведён в теоремах 2.3, 2.4 и следствии 2.1, где указан конструктивный критерий для построения фрейма Парсеваля периодических всплесков. В теореме 2.3 на масштабирующие функции наложены дополнительные условия, которые позволяют представить критерий в более простом виде и сфокусироваться на главной идее доказательства.

Теорема 2.3. Пусть функции $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют масштабирующему уравнению (1) и $\widehat{\varphi}_j(n) \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$. Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ фиксируем $\rho_j \in \mathbb{N}$ и определяем $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, \dots, \rho_j$ с помощью всплескового уравнения (2), и пусть $\sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \neq 0$.

Введем вспомогательные коэффициенты $\tilde{a}_j(n)$, $\tilde{b}_j^m(n) \in \mathcal{S}(2^j)$, $j \geq 2$,

$$\tilde{a}_j(n) = \left(\prod_{r=1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k \right) e^{it_{\rho_{j-1}+1}} \neq 0, \quad (3)$$

$$\tilde{b}_j^m(n) = \left(\prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k \right) \sin t_m^k e^{it_{\rho_{j-1}+1+m}}, \quad (4)$$

$k = 0$ для $n = 0, \dots, 2^{j-1} - 1$, $k = 1$ для $n = 2^{j-1}, \dots, 2^j - 1$, $j \in \mathbb{N}$, где параметры $t_r^k = t_r^k(j, n)$, $r = 1, \dots, 2\rho_{j-1} + 1$, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} \cos \left(t_{\rho_{j-1}+1+m}^0 - t_{\rho_{j-1}+1+m}^1 \right) \prod_{k=0}^1 \sin t_m^k \prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k = 0, \\ \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} \sin \left(t_{\rho_{j-1}+1+m}^0 - t_{\rho_{j-1}+1+m}^1 \right) \prod_{k=0}^1 \sin t_m^k \prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k = 0, \end{cases} \quad (5)$$

произведение $\prod_{r=\rho_{j-1}+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k$ считаем равным 1.

Тогда семейство $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсеваля в L_2 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m=1}^{\rho_0} \overline{\widehat{b}_1^m(0)} \widehat{b}_1^m(1) = 0,$$

$$\prod_{r=2}^{\infty} |\tilde{a}_r(n)|^2 = 2 \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 |\widehat{\varphi}_1(n)|^2.$$

Кроме того, маски всплесков определяются так

$$\widehat{b}_j^m(n) = \tilde{b}_j^m(n) \sqrt{\sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2} \prod_{r=2}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|}{|\tilde{a}_r(n)|}.$$

Следующее следствие даёт явный вид критерия для случая одного всплескового генератора $\rho_j = 1$ при $j \in \mathbb{N}$.

Следствие 2.1. Пусть функции $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют масштабирующему уравнению (1) и $\widehat{\varphi}_j(n) \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$. Пусть функции $\psi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, определяются всплесковыми уравнениями

$$\widehat{\psi}_j(n) = \sqrt{2} \widehat{b}_{j+1}(n) \widehat{\varphi}_{j+1}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

И при $j = 0$ считаем, что $m = 1, 2$,

$$\widehat{\psi}_0^m(n) = \sqrt{2} \widehat{b}_1^m(n) \widehat{\varphi}_1(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

$\widehat{b}_1^m \in \mathcal{S}(2)$. Пусть $\sum_{m=1}^2 \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \neq 0$.

Определим вспомогательные коэффициенты $\tilde{a}_j(n)$, $\tilde{b}_j(n) \in \mathcal{S}(2^j)$, $j \geq 2$,

$$\begin{cases} \tilde{a}_j(n) = \cos t_1^0 e^{it_2^0}, \\ \tilde{a}_j(n + 2^{j-1}) = \pm \sin t_1^0 e^{it_2^1}, \\ \tilde{b}_j(n) = \sin t_1^0 e^{it_3^0}, \\ \tilde{b}_j(n + 2^{j-1}) = \pm \cos t_1^0 e^{\pm i(t_3^0 + t_2^1 - t_2^0)}, \end{cases}$$

где $j \in \mathbb{N}$, $n = 0, \dots, 2^{j-1} - 1$, t_1^0, t_2^0, t_3^0 , и t_2^1 зависят от j и n , и знаки “+” и “-” выбираются произвольно.

Тогда семейство $\{\psi_0^1, \psi_0^2\} \cup \{S_j^k \psi_j : j \in \mathbb{N}, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсеваля в L_2 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m=1}^2 \overline{\widehat{b}_1^m(0)} \widehat{b}_1^m(1) = 0,$$

$$\prod_{r=2}^{\infty} |\tilde{a}_r(n)|^2 = 2 \sum_{m=1}^2 \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 |\widehat{\varphi}_1(n)|^2.$$

Кроме того,

$$\widehat{b}_j(n) = \tilde{b}_j(n) \sqrt{\sum_{m=1}^2 \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2} \prod_{r=2}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|}{|\tilde{a}_r(n)|}.$$

Следующая теорема даёт наиболее общий критерий фреймовости системы всплесков без дополнительных условий на масштабирующие функции. Для её формулировки введём вспомогательное определение. Определим рекурсивно последовательность $\theta_j(n) \in \mathcal{S}(2^j)$ равен-

СТВАМИ

$$\sum_{m=1}^{\rho_j} \left| \widehat{b_{j+1}^m}(n) \right|^2 + \theta_j(n) \left| \widehat{a_{j+1}}(n) \right|^2 = \theta_{j+1}(n), \quad (6)$$

$$\theta_1(n) = \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b_1^m}(n) \right|^2, \quad \theta_0(n) = 0.$$

Теорема 2.4. Пусть функции $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют масштабирующему уравнению (1). Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ фиксируем $\rho_j \in \mathbb{N}$ и пусть $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, \dots, \rho_j$ определены всплесковым уравнением (2). Пусть $\theta_j(n)$ определена рекурсивно в (6).

Мы определяем вспомогательные коэффициенты $\tilde{a}_{j+1}(n)$, $\tilde{b}_{j+1}^m(n) \in \mathcal{S}(2^{j+1})$, $j \in \mathbb{N}$, с помощью (3), (4), где $t_r^k = t_r^k(j, n)$, $r = 1, \dots, 2\rho_j + 1$, удовлетворяют (5) при $\theta_{j+1}(n + 2^j) \neq 0$. Если же $\theta_{j+1}(n + 2^j) = 0$, тогда параметры $t_r^k = t_r^k(j, n)$, $r = 1, \dots, 2\rho_j + 1$, задаются произвольно.

Тогда семейство $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсеваля в L_2 тогда и только тогда, когда

$$I. \{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\} \cap \left\{ j : \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widehat{b_j^m}(n) \right|^2 \neq 0 \right\} \neq \emptyset;$$

$$II. \prod_{r=j_1+1}^{\infty} |\tilde{a}_r(n)|^2 = 2^{j_1} \sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \left| \widehat{b_{j_1}^m}(n) \right|^2 |\widehat{\varphi}_{j_1}(n)|^2,$$

$$\text{где } j_1 := \min\{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\} \cap \left\{ j : \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widehat{b_j^m}(n) \right|^2 \neq 0 \right\};$$

III. $\widehat{b_j^m}(n)$ определяются так

$$(a) \text{ произвольны, } \quad j \in \{1, \dots, j_0\},$$

$$(b) \quad 0, \quad j \in \{j_0 + 1, \dots, j_1 - 1\},$$

$$(c) \quad \sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \overline{\widehat{b_{j_1}^m}(n)} \widehat{b_{j_1}^m}(n + 2^{j_1-1}) = 0, \quad j = j_1,$$

$$(d) \quad \tilde{b_j^m}(n) \sqrt{\sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \left| \widehat{b_{j_1}^m}(n) \right|^2} \prod_{r=j_1+1}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|}{|\tilde{a}_r(n)|}, \quad j \in \{j_1 + 1, j_1 + 2, \dots\},$$

$$\text{где } j_0 + 1 := \min\{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\}.$$

В примерах 2.1 и 2.2 обсуждается применение полученных критериев в случае одного всплескового генератора и в случае, когда в качестве масштабирующих функций выступают тригонометрические полиномы.

Далее в главе обсуждаются аппроксимационные свойства систем всплесков, построенных с помощью критерия из теоремы 2.4, и аппроксимационные свойства связанных с ними систем сдвигов масштабирующих функций. Аппроксимационные свойства семейств функций инвариантных относительно сдвига и, в частности, систем всплесков изучались многими авторами (см., например, статьи [15, 20, 21, 23, 32] и ссылки на литературу в них) в различных

пространствах для периодических и непериодических функций. В текущей главе способность фрейма всплесков приближать функции в пространстве L_2 оценивается с помощью порядков аппроксимации. В частности изучается взаимосвязь между порядком аппроксимации фреймом и порядком аппроксимации соответствующим периодическим кратномасштабным анализом $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ (ПКМА). При этом во второй главе используется определение ПКМА, отличное от данного в первой главе. А именно, используется определение, включающее в себя наименьшее возможное количество аксиом: условие вложенности подпространств и условие плотности их объединения в пространстве L_2 (см., например, [25] и [31]). В [25] приведены необходимые и достаточные условия, при которых фрейм Парсевале порождает такое ПКМА. Оказывается, что условий теоремы 2.4 достаточно для того, чтобы подпространства, порождённые $2^{-j}k$ -сдвигами масштабирующих функций φ_j , образовали ПКМА $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$.

Говорят, что ПКМА $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ имеет порядок аппроксимации, равный $\mu_0 \geq 0$, если μ_0 есть супремум неотрицательных чисел γ , для которых найдутся такие постоянные $C_\gamma > 0$ и $J_\gamma \in \mathbb{N}$, что для всякого $j \geq J_\gamma$ и всех функций $f \in H^\gamma$ верно неравенство

$$E(f, V_j)_2 \leq 2^{-j\gamma} C_\gamma \|f\|_{H^\gamma}.$$

Аналогично определяется порядок аппроксимации фреймом с заменой оценки сверху наилучшего приближения на неравенство

$$\left\| f - \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \langle f, S_r^l \psi_r^m \rangle S_r^l \psi_r^m \right\|_2 \leq 2^{-j\gamma} C_\gamma \|f\|_{H^\gamma}.$$

Сначала в параграфе 2.4. изучаются аппроксимационные свойства ПКМА. В теореме 2.5 сформулирован критерий получения определённого порядка аппроксимации ПКМА.

Теорема 2.5. Пусть $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ – ПКМА в L_2 с масштабирующими функциями $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$. Порядок аппроксимации ПКМА равен $\mu_0 \geq 0$ тогда и только тогда, когда μ_0 есть супремум таких неотрицательных чисел μ , для которых найдутся такие постоянные $C_\mu > 0$ и $J_\mu \in \mathbb{N}$, что для всех целых $j \geq J_\mu$

$$(2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\mu} \Lambda_j^2(k) \leq C_\mu \quad \text{для любого } k \in \mathcal{R}_j.$$

где

$$\Lambda_j(k) = \left(1 - \frac{|\widehat{\varphi}_j(k)|^2}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_j(2^j l + k)|^2} \right)^{1/2}.$$

Полученные в этом параграфе результаты, касающиеся ПКМА, верны и для более широкого класса подпространств инвариантных относительно сдвига. Аналогичные результаты для непериодических функций можно найти в [21].

В следующем параграфе изучаются аппроксимационные свойства самих фреймов всплесков. Для систем фреймов многомерных непериодических всплесков в $L_2(\mathbb{R}^d)$ взаимосвязь

между порядками аппроксимации фреймом и кратномасштабным анализом изучалась в [20]. Для систем периодических фреймов всплесков, построенных с помощью унитарного принципа расширения, определение порядка аппроксимации появилось в [23]. В этой же работе для периодических фреймов всплесков были установлены необходимые и достаточные условия, при которых фрейм Парсевалья имеет заданный порядок аппроксимации. Аналогичные условия для непериодических фреймов всплесков можно найти в [29]. В теореме 2.7 показано, как эти результаты можно распространить на периодические фреймы Парсевалья, построенные с помощью критерия из теоремы 2.4. Более того, в отличие от [23], в данной работе используется норма пространств Соболева H^ν вместо полунормы, что позволяет избавиться от дополнительного условия $\widehat{\varphi}_j(0)\overline{\widehat{\varphi}_j(2^j p)} = \delta_{p0}$, $p \in \mathbb{Z}$, присутствующего в соответствующих теоремах статьи [23].

Теорема 2.7. *Фрейм Парсевалья $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$, удовлетворяющий условиям (1)–(2), имеет порядок аппроксимации фреймом $\nu_0 \geq 0$ тогда и только тогда, когда ν_0 есть супремум таких неотрицательных чисел ν , для которых найдутся такие постоянные $C_\nu > 0$ и $J_\nu \in \mathbb{N}$, что*

$$\max \left\{ \tilde{C}_{j,1}, \tilde{C}_{j,2} \right\} \leq C_\nu, \quad \text{для всех } j \geq J_\nu.$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{j,1} &= \max_{k \in \mathcal{R}_j} (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2)^2, \\ \tilde{C}_{j,2} &= \max_{k \in \mathcal{R}_j} 2^{2j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2. \end{aligned}$$

В теореме 2.8 сравниваются порядки аппроксимации фреймом и ПКМА.

Теорема 2.8. *Фрейм Парсевалья $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$, удовлетворяющий условиям (1)–(2), имеет порядок аппроксимации фреймом $\nu_0 = \min \{\mu_0, \gamma_0\}$, где $\mu_0 \geq 0$ — порядок аппроксимации соответствующим ПКМА и $\gamma_0 \geq 0$ есть супремум неотрицательных чисел γ , для которых найдутся такие постоянные $C_\gamma > 0$ и $J_\gamma \in \mathbb{N}$, что*

$$\max_{k \in \mathcal{R}_j} (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\gamma} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2)^2 \leq C_\gamma, \quad j \geq J_\gamma.$$

Третья глава посвящена изучению аппроксимационных свойств диадических фреймов всплесков заданных на положительной полупрямой с операцией двоичного сложения. Результаты главы опубликованы в [6].

Для функций, определенных на вещественной прямой, вопрос сходимости разложений по системе всплесков подробно изучался для разных функциональных пространств (см. работы [11, 30, 34, 35, 38, 44, 45], а также обширную библиографию в них). При этом главным предположением о масштабирующей функции служит либо регулярность и выполнение условия Стрэнга-Фикса некоторого порядка, либо существование четной, суммируемой, убывающей на положительном луче мажоранты. В данной главе мы получаем результаты о сходимости

почти везде и в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, прежде всего благодаря особенностям операции двоичного сложения, не предполагая гладкость или существование мажоранты.

Все результаты, полученные в данной главе, могут быть записаны для функций, определенных на локально компактной группе Кантора, снабженной мерой Хаара, либо непосредственно в терминах группы, либо для реализации группы в виде модифицированной полупрямой $[0, +\infty)^*$ с раздвоенными положительными двоично-рациональными точками (см. [1, 4]). Чтобы избежать излишней громоздкости обозначений результаты главы изложены в терминах полупрямой с операцией двоичного сложения. Каждое $x \in \mathbb{R}_+$ представляется в виде двоичного разложения

$$x = \sum_{k < 0} x_k 2^{-k-1} + \sum_{k > 0} x_k 2^{-k},$$

где цифры x_k, x_{-k} , $k \in \mathbb{N}$, определяются равенствами

$$x_k = [2^k x](\text{mod } 2), \quad x_{-k} = [2^{1-k} x](\text{mod } 2).$$

Операция двоичного сложения для $x, y \in \mathbb{R}_+$ задаётся равенством

$$x \oplus y = \sum_{k < 0} |x_k - y_k| 2^{-k-1} + \sum_{k > 0} |x_k - y_k| 2^{-k}.$$

При этом полагаем $x \ominus y = x \oplus y$.

Определим для функции $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ систему сжатий и сдвигов следующим образом

$$f_{j,k}(x) := 2^{j/2} f(2^j x \oplus k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

Для фиксированного $r \in \mathbb{N}$ система

$$\Psi := \{\psi_{j,k}^{(\nu)} : \nu = 1, \dots, r, j \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{Z}_+\} \quad (7)$$

называется системой всплесков, порожденной набором всплеск-функций $\psi^{(\nu)} \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $\nu = 1, \dots, r$. Говорят, что система Ψ образует фрейм Парсеваля в $L^2(\mathbb{R}_+)$, если

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left| \langle f, \psi_{j,k}^{(\nu)} \rangle \right|^2 = \|f\|^2.$$

В данной главе будут рассматриваться системы всплесков, построенные с помощью унитарного принципа расширения, в котором всплеск-функции строятся с помощью вспомогательной функции φ , называемой масштабирующей. Унитарный принцип расширения был изначально сформулирован в работе [39] и адаптирован для диадических функций в ста-

тых [22, 40]. Введём обозначение

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}$$

для разложения функции f по системе целых сдвигов сжатой в 2^j раз масштабирующей функции. Частичные суммы разложения функции по системе всплесков будем обозначать

$$Q_{n,j} f = \sum_{i=n}^{j-1} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \psi_{i,k}^{(\nu)} \rangle \psi_{i,k}^{(\nu)}.$$

При $p = 2$ сходимость $Q_{n,j}$ к f эквивалентна тому, что система всплесков Ψ образует фрейм Парсеваля. Для вещественного случая это хорошо известный факт (см., например, [11, предложение 1.8.2]). Для диадического случая доказательство содержится в статье [42], где фреймы всплесков и сходимость при $p = 2$ изучается для пространств M -положительных векторов, и группа Кантора является частным случаем этого пространства. Отметим также, что в статье [42] в качестве масштабирующих функций рассматриваются только тест-функции. Это функции, которые наряду со своим преобразованием Фурье являются кусочно постоянными и имеют компактный носитель. В данной работе мы рассматриваем более широкий класс функций, а именно функции только с компактным носителем. Для того чтобы показать несовпадение этих классов достаточно воспользоваться критерием маски тест-функции [42, теорема 19] и взять в качестве элемента множества σ_r вектор длины r , состоящих из одних единиц (см. определение множества σ_r в [42, определение 16]).

Леммой 3.1 устанавливается тождество $P_j f - P_n f = Q_{n,j} f$, которое позволяет свести вопрос о сходимости сумм $Q_{n,j} f$ к изучению поведения сумм $P_j f$, а лемма 3.2 даёт интегральное представление оператора P_j . Далее в теореме 3.1 доказывается ограниченность оператора P_j по норме, как оператора из $L^p(\mathbb{R}_+)$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Аппроксимационные свойства диадических систем всплесков на локально компактных группах Кантора, в диадических аналогах пространств Соболева изучались Ю.А. Фарковым, Е.А. Лебедевой, М.А. Скопиной в работе [22]. В статье С.Ф. Лукомского [37] исследовались аппроксимационные свойства диадических фреймов Парсеваля всплесков в весовых пространствах Соболева с логарифмическими весами. В этих статьях изучается только L_2 -сходимость. В данной диссертации в теоремах 3.2 и 3.4 получена сходимость частичных сумм $P_j f$ к функции f при $j \rightarrow +\infty$ и к нулю при $j \rightarrow -\infty$ в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 < p < \infty$. В теоремах 3.3 и 3.5 аналогичные результаты получены для сходимости сумм почти всюду. Из этих утверждений непосредственно следует сходимость частичных сумм разложения по фрейму всплесков. Результат представлен в виде двух теорем. В теореме 3.6 сформулированы условия для сходимости частичных сумм $Q_{n,j} f$ к f по норме пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, в то время как в теореме 3.7 устанавливается сходимость почти всюду.

Теорема 3.6. *Если масштабирующая функция $\varphi \in L_c^{\max\{p,q\}}(\mathbb{R}_+)$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1, \infty)$, $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^n)$, $\widehat{\varphi}(0) = 1$, и система всплесков (γ) построена с помощью унитарного прин-*

ципа расширения, то для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$

$$f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \psi_{i,k}^{(\nu)} \rangle \psi_{i,k}^{(\nu)},$$

где равенство понимается по норме пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 3.7. Если масштабирующая функция $\varphi \in L_c^{\max\{2,q\}}(\mathbb{R}_+)$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in [1, \infty)$, $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^n)$, $\widehat{\varphi}(0) = 1$, φ w -непрерывна в точках $0, 1, \dots, 2^n - 1$, последовательность $\{\varphi(c(2^j x))\}_{j \in \mathbb{N}}$ ограничена для п. в. $x \in \mathbb{R}_+$, и система всплесков (7) построена с помощью унитарного принципа расширения, то для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и для п. в. $x \in \mathbb{R}_+$

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \psi_{i,k}^{(\nu)} \rangle \psi_{i,k}^{(\nu)}(x).$$

Под w -непрерывной функцией понимается функция, непрерывная в диадической метрике.

Глава 1

Прямая теорема типа Джексона для нестационарной системы периодических всплесков

1.1 Введение

В данной главе изучаются аппроксимационные свойства разложений по системе нестационарных периодических всплесков в зависимости от структурных свойств приближаемой функции. Погрешность приближения оценивается с помощью модуля непрерывности, величина которого характеризует гладкость приближаемой функции (её структурное свойство).

В [16] были доказаны прямые и обратные теоремы типа Джексона для многомерных периодизированных сепарабельных систем всплесков Хаара, а также получены точные константы в неравенствах типа Джексона. Прямые и обратные теоремы для произвольных одномерных систем периодических всплесков, полученных с помощью периодизации непериодической всплеск-функции (*стационарные системы всплесков*) и образующих ортонормированный базис, описаны в [11]. В текущей главе рассматриваются нестационарные системы всплесков в пространствах L_p , $p \in [1, \infty)$ и C , построенные с помощью пары ПКМА и образующие биортогональные базисы всплесков. Для таких систем всплесков получена прямая теорема типа Джексона и предложено несколько модификаций её условий. Результаты главы опубликованы в [26].

1.2 Построение биортогональных систем периодических всплесков в пространствах L_p , $p \in [1, \infty)$ и C .

В данной главе изучаются системы всплесков, построенные с помощью ПКМА по схеме, описанной в [11], и образующие биортонормированные базисы всплесков.

Пусть $p \in [1, +\infty)$. Совокупность подпространств $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$, $V_j \subset L_p$, называется периодическим кратномасштабным анализом (ПКМА) в L_p , если выполнены следующие аксиомы:

MR1. $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}_+$;

MR2. $\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j$ плотно в L_p ;

MR3. $\dim V_j = 2^j$, $j \in \mathbb{Z}_+$;

MR4. $\dim \{f \in V_j : S_j f = \lambda f\} \leq 1$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $j \in \mathbb{Z}_+$;

MR5. если $f \in V_j$, то $S_j f \in V_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$;

MR6. (а) если $f \in V_j$, то $f(2 \cdot) \in V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}_+$;

(б) если $f \in V_{j+1}$, то $f(\cdot/2) + f((\cdot + 1)/2) \in V_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Аналогичное определение можно дать для ПКМА в пространстве C непрерывных 1-периодических функций с равномерной нормой.

Функции φ_j , $j \in \mathbb{Z}_+$, называются масштабирующими функциями, если $\varphi_j \in V_j$ и функции $S_j^n \varphi_j$, $n = 0, \dots, 2^j - 1$ образуют базис подпространства V_j для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$.

Замечание 1. Известно (см., например, [11, §9.1.]), что для каждого ПКМА существует последовательность масштабирующих функций и что множество V_0 состоит из постоянных функций.

Для построения систем всплесков рассмотрим пару ПКМА, в которой одно ПКМА $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$ в пространстве L_p , $1 \leq p \leq \infty$ (C , если $p = \infty$), а второе ПКМА $\{\tilde{V}_j\}_{j=0}^{\infty}$ в L_q , $1/p + 1/q = 1$ (C , если $p = 1$). Эта пара ПКМА называется (p, q) -парой. При этом можно подобрать подпространства V_j и \tilde{V}_j так, чтобы их базисы из сдвигов масштабирующих функций были биортонормированы для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$, то есть для базисных функций $\{S_j^n \varphi_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ подпространства V_j и $\{S_j^n \tilde{\varphi}_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ подпространства \tilde{V}_j выполняются равенства $\langle S_j^n \varphi_j, S_j^m \tilde{\varphi}_j \rangle = \delta_{n,m}$. Тогда на каждом уровне j пространство всплесков W_j можно определить как ортогональную проекцию пространства V_{j+1} первого ПКМА относительно пространства \tilde{V}_j второго ПКМА. В процессе построения на каждом уровне j из масштабирующих функций с помощью уравнений на коэффициенты Фурье строят всплеск-функции $\psi_j \in V_{j+1}$ и $\tilde{\psi}_j \in \tilde{V}_{j+1}$ такие, что их сдвиги $\{S_j^n \psi_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ и $\{S_j^n \tilde{\psi}_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ образуют биортонормированные системы и при этом каждая из этих систем сдвигов биортогональна базису пространства \tilde{V}_j и V_j соответственно. После чего полагают

$$W_j = \text{span} \{S_j^n \psi_j \mid n = 0, 1, \dots, 2^j - 1\},$$

$$\tilde{W}_j = \text{span} \{S_j^n \tilde{\psi}_j \mid n = 0, 1, \dots, 2^j - 1\}.$$

Замечание 2. В [11, теорема 9.2.4] показано, что из такого построения всплесков следует попарная биортогональность пространств W_j и \tilde{W}_j , пространств W_j и \tilde{V}_j , и пространств \tilde{W}_j и V_j на каждом уровне $j \in \mathbb{Z}_+$. Так же там доказывается, что каждая функция $f \in V_{j+1}$ может быть представлена в виде суммы $f = g + \sum_{n=0}^j f_n$, где $g \in V_0$, $f_n \in W_n$, $n = 0, 1, \dots, j$.

Замечание 3. Из биортогональности пространств и аксиомы **MR1**, в частности, следует, что постоянная функция ортогональна любой функции из W_j и \widetilde{W}_j .

Таким образом, при наличии ПКМА, для всякой функции f из рассматриваемого пространства можем записать её разложение по соответствующему базису всплесков

$$\langle f, \widetilde{\varphi}_0 \rangle \varphi_0 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f, S_n^j \widetilde{\psi}_j \rangle S_n^j \psi_j. \quad (1.1)$$

Обозначим через $s_N(f)$ частичные суммы этого разложения

$$s_N(f) = \langle f, \widetilde{\varphi}_0 \rangle \varphi_0 + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f, S_n^j \widetilde{\psi}_j \rangle S_n^j \psi_j + \sum_{n=0}^L \langle f, S_n^J \widetilde{\psi}_J \rangle S_n^J \psi_J,$$

где $N = 2^J + L$ и $J \in \mathbb{Z}_+$, $L \in [0 : 2^J - 1]$. Под сходимостью ряда в разложении функции по базису всплесков будем понимать сходимость последовательности её частичных сумм $\{s_N(f)\}_{N=0}^{\infty}$.

1.3 Прямые теоремы для нестационарной системы периодических всплесков

Сформулируем основную теорему.

Теорема 1. Пусть $p \in [1, +\infty]$, $1/p + 1/q = 1$, а числа $r, m, \nu \in \mathbb{N}$ таковы, что $2m \geq r + 4$ и $2\nu \geq r + 2$. Пусть $\{V_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^{\infty}$ образуют (p, q) -пару с последовательностями масштабных функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ соответственно, такими, что для всякого $j \in \mathbb{Z}_+$ функции $\{S_n^j \varphi_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ и $\{S_n^j \widetilde{\varphi}_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ образуют биортонормированные системы, а $\{\psi_j\}_{j=0}^{\infty}$, $\{\widetilde{\psi}_j\}_{j=0}^{\infty}$ — соответствующие последовательности всплеск-функций, удовлетворяющие следующим условиям. Для всех $j \in \mathbb{Z}_+$

$$(i) \quad \psi_j, \widetilde{\psi}_j \in C^m \quad \text{и} \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|\psi_j^{(m)}\|_{\infty} < \infty, \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|\widetilde{\psi}_j^{(m)}\|_{\infty} < \infty.$$

(ii) Существует положительная постоянная C_1 , не зависящая от выбора j и k , такая что

$$\left| \widehat{\psi}_j(k) \right|, \left| \widehat{\widetilde{\psi}}_j(k) \right| \leq \frac{C_1 |k|^{\nu}}{2^{j\nu + j/2}}$$

$$\text{для } k \in R_j = \{-2^{\lfloor j/2 \rfloor} + 1, -2^{\lfloor j/2 \rfloor} + 2, \dots, 2^{\lfloor j/2 \rfloor} - 1\}.$$

Тогда для всех $f \in L_p(C$ если $p = \infty)$ и всех $N \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|f - s_N(f)\|_p \leq \widetilde{C} \omega_r \left(f, \frac{1}{N} \right)_p, \quad (1.2)$$

где \tilde{C} зависит только от t, r, p, ν и постоянных, входящих в условия (i) и (ii).

Для доказательства теоремы нам понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Лемма А ([14, утв. 4.8.61]). Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $r \in \mathbb{N}$ и $T_N(x)$ – тригонометрический полином порядка N . Тогда для всякого $h \in (0, \frac{1}{2N})$ справедливо неравенство

$$\|T_N^{(r)}\|_p \leq \left(\frac{\pi N}{\sin 2\pi N h} \right)^r \|\Delta_h^r T\|_p.$$

Лемма В ([14, утв. 5.1.32]). Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $r \in \mathbb{N}$. Тогда существует такая константа C' , зависящая только от p и r , что для любых $N \in \mathbb{N}$ и функций $f \in L_p$ (С если $p = \infty$)

$$E_N(f)_p \leq C' \omega_r \left(f, \frac{1}{N} \right)_p.$$

Лемма С ([9, следствие 1]). Если $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L_p$ (С если $p = \infty$), $N \in \mathbb{N}$, то

$$\|f - v_N(f)\|_p \leq 3E_N(f)_p.$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда при $p \in [1, +\infty)$ для каждой $f \in L_p$, ряд (1.1) сходится к функции f по норме в L_p , а при $p = \infty$ для функций $f \in C$ ряд (1.1) равномерно сходится к f .

Доказательство. Рассмотрим частичную сумму ряда

$$s_N(f) = \langle f, \tilde{\varphi}_0 \rangle \varphi_0 + \sum_{j=0}^{J-1} \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f, S_n^j \tilde{\psi}_j \rangle S_n^j \psi_j + \sum_{n=0}^L \langle f, S_n^J \tilde{\psi}_J \rangle S_n^J \psi_J,$$

для произвольного $N \in \mathbb{Z}_+$, где целые числа $J \geq 0$ и L , $0 \leq L \leq 2^J - 1$, таковы, что $N = 2^J + L$.

Ясно, что для коэффициентов Фурье всякой 1-периодической функции ψ имеет место равенство $\widehat{S_j^n \psi}(k) = \widehat{\psi}(k) e^{2\pi i \cdot 2^{-j} n k}$.

Тогда, пользуясь сходимостью ряда Фурье непрерывной функции, получаем, что для всех

$j \in [0 : J]$ и $L = 0, 1, \dots, 2^j - 1$

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{n=0}^L \langle f, S_j^n \tilde{\psi}_j \rangle S_j^n \psi_j(x) \right| = \left| \sum_{n=0}^L \left(\int_0^1 f(t) \overline{S_j^n \tilde{\psi}_j(t)} dt \right) S_j^n \psi_j(x) \right| = \\
& = \left| \int_0^1 f(t) \sum_{n=0}^L \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{S_j^n \tilde{\psi}_j(k)} e^{2\pi i k t} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{S_j^n \psi_j}(l) e^{2\pi i l x} \right) dt \right| \leq \\
& \leq \int_0^1 |f(t)| \cdot \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\tilde{\psi}_j(k)} e^{-2\pi i k t} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi}_j(l) e^{2\pi i l x} \sum_{n=0}^L e^{2\pi i \cdot 2^{-j}(l-k)n} \right| dt \leq \\
& \leq \int_0^1 |f(t)| \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\tilde{\psi}_j}(k) \right| \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}_j(l) \right| \cdot (L+1) dt \leq \tag{1.3} \\
& \leq 2^j \|f\|_1 \cdot \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\tilde{\psi}_j}(k) \right| \right) \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}_j(k) \right| \right) = \\
& = 2^j \|f\|_1 \cdot \left(\left| \widehat{\tilde{\psi}_j}(0) \right| + \sum_{k \in R_j \setminus \{0\}} \left| \widehat{\tilde{\psi}_j}(k) \right| + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus R_j} \left| \widehat{\tilde{\psi}_j}(k) \right| \right) \times \\
& \times \left(\left| \widehat{\psi}_j(0) \right| + \sum_{k \in R_j \setminus \{0\}} \left| \widehat{\psi}_j(k) \right| + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus R_j} \left| \widehat{\psi}_j(k) \right| \right)
\end{aligned}$$

Из замечания 3 следует, что $\widehat{\tilde{\psi}_j}(0) = 0$ и $\widehat{\psi}_j(0) = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$.

В силу условия (i) теоремы можем воспользоваться классической оценкой на коэффициенты Фурье гладкой функции, тогда для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$

$$\left| \widehat{\tilde{\psi}_j}(k) \right|, \left| \widehat{\psi}_j(k) \right| \leq \frac{C_2}{|k|^m}, \quad k \neq 0,$$

где константа C_2 не зависит от j и k .

Применяя эти неравенства к рядам в обоих множителях из правой части (1.3), получаем

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus R_j} \left| \widehat{\tilde{\psi}_j}(k) \right|, \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus R_j} \left| \widehat{\psi}_j(k) \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus R_j} \frac{C_2}{|k|^m} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^{\lfloor j/2 \rfloor - 1}} \frac{C_2}{(2^{\lfloor j/2 \rfloor} n + k)^m} < \\
& < 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k=0}^{2^{\lfloor j/2 \rfloor - 1}} \frac{C_2}{2^{\lfloor j/2 \rfloor m} n^m} = 2C_2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^m} \cdot 2^{-\lfloor j/2 \rfloor (m-1)},
\end{aligned}$$

где $2C_2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^m}$ есть некоторая константа, поскольку по условию $m \geq 2$ и, значит, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^m}$ сходится.

Применяя условие (ii) к конечным суммам в множителях в правой части (1.3), приходим

к оценке

$$\sum_{k \in R_j \setminus \{0\}} \left| \widehat{\psi}_j(k) \right|, \quad \sum_{k \in R_j \setminus \{0\}} \left| \widehat{\widetilde{\psi}}_j(k) \right| \leq 2 \sum_{k=1}^{2^{\lfloor j/2 \rfloor - 1}} \frac{C_1 k^\nu}{2^{j\nu + j/2}} \leq 2C_1 \cdot 2^{-j\nu/2}.$$

В результате получаем неравенство

$$\begin{aligned} |s_N(f)| &\leq |\langle f, \widetilde{\varphi}_0 \rangle \varphi_0| + \sum_{j=0}^{J-1} \left| \sum_{n=0}^{2^j-1} \langle f, S_n^j \widetilde{\psi}_j \rangle S_n^j \psi_j \right| + \left| \sum_{n=0}^L \langle f, S_n^J \widetilde{\psi}_J \rangle S_n^J \psi_J \right| \leq \\ &\leq |\langle f, \widetilde{\varphi}_0 \rangle \varphi_0| + C_3 \|f\|_1 \cdot \sum_{j=0}^J 2^j (2^{-j\nu/2} + 2^{-j(m-1)/2})^2 = \\ &= |\langle f, \widetilde{\varphi}_0 \rangle \varphi_0| + C_3 \|f\|_1 \sum_{j=0}^J (2^{-j(\nu-1)/2} + 2^{-j(m-2)/2})^2 \end{aligned}$$

Так как по условию теоремы $m > 2$ и $\nu > 1$, оценивая сумму геометрической прогрессии, легко видеть, что сумма

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^J (2^{-j(\nu-1)/2} + 2^{-j(m-2)/2})^2 &= \sum_{j=0}^J (2^{-j(\nu-1)} + 2 \cdot 2^{-j(m+\nu-3)/2} + 2^{-j(m-2)}) = \\ &= \frac{1 - 2^{-(J+1)(\nu-1)/2}}{1 - 2^{1-\nu}} + 2 \cdot \frac{1 - 2^{-(J+1)(m+\nu-3)/2}}{1 - 2^{(3-m-\nu)/2}} + \frac{1 - 2^{-(J+1)(m-2)/2}}{1 - 2^{2-m}} \leq \\ &\leq \frac{1}{1 - 2^{1-\nu}} + \frac{2}{1 - 2^{(3-m-\nu)/2}} + \frac{1}{1 - 2^{2-m}} \end{aligned}$$

ограничена константой, зависящей только от ν и m . Согласно замечанию 1 функции φ_0 и $\widetilde{\varphi}_0$ являются постоянными, а, значит, $|\langle f, \widetilde{\varphi}_0 \rangle \varphi_0| \leq C_3 \|f\|_1$, где константа $C_3 = |\widetilde{\varphi}_0 \varphi_0|$. Из оценки L_1 -нормы функции её нормой пространства L_p и C можно сделать заключение о том, что оператор s_N , действующий из пространства L_p в L_p (из C в C при $p = \infty$) равномерно ограничен по норме, то есть

$$\|s_N(\cdot)\| \leq C_*, \quad (1.4)$$

где постоянная C_* не зависит от N .

По свойству **MR1** и **MR2** из определения ПКМА для каждой функции f из L_p (C при $p = \infty$) и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такое $J \in \mathbb{Z}_+$ и функция $F \in V_J$, что

$$\|f - F\|_p < \varepsilon.$$

Принимая во внимание замечание 2 и биортонормированность базисов $\{S_j^n \psi_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ и $\{S_j^n \widetilde{\psi}_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ можно заметить, что $s_N(F) = F$ для всех $N \geq 2^J$ и $F \in V_J$. Таким образом,

из равномерной оценки операторов частичных сумм (1.4) следует, что

$$\|f - s_N(f)\|_p \leq \|f - F - s_N(f - F)\|_p \leq (C_* + 1)\|f - F\|_p \leq (C_* + 1)\varepsilon.$$

□

Перейдём к доказательству основной теоремы.

Доказательство. (Теоремы 1) Для начала возьмём в качестве функции f тригонометрический полином и покажем, что

$$\|f - s_N(f)\|_p \leq C_4 \cdot N^{-r} \|f^{(r)}\|_1. \quad (1.5)$$

Для всякого $N \in \mathbb{N}$ найдётся такое целое $q \geq 0$, что $2^q \leq N < 2^{q+1}$. Тогда для каждого $J \geq q$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|f - s_N(f)\|_p &\leq \|f - s_{2^{J-1}}(f)\|_p + \|s_{2^q-1}(f) - s_N(f)\|_p + \\ &+ \sum_{k=q}^{J-1} \|s_{2^{k+1}-1}(f) - s_{2^k-1}(f)\|_p. \end{aligned} \quad (1.6)$$

По лемме 1

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \|f - s_{2^{J-1}}(f)\|_p = 0.$$

Таким образом, для доказательства неравенства (1.5), достаточно показать, что

$$\|s_{2^{j+L}}(f) - s_{2^j-1}(f)\|_p \leq C_5 \cdot 2^{-jr} \|f^{(r)}\|_1 \quad (1.7)$$

для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ и $L = 0, \dots, 2^j - 1$. Рассмотрим суммы

$$s_{2^{j+L}}(f) - s_{2^j-1}(f) = \sum_{n=0}^L \langle f, S_j^n \tilde{\psi}_j \rangle S_j^n \psi_j.$$

Для оценки суммы воспользуемся равенством Парсеваля и разложением в ряд Фурье функций $S_j^n \psi_j$.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^L \langle f, S_j^n \tilde{\psi}_j \rangle S_j^n \psi_j(x) \right| &= \left| \sum_{n=0}^L \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{\tilde{\psi}_j}(k)} e^{-2^{1-j} \pi i n k} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{\psi_j}(l) e^{2\pi i l (2^{-j} n + x)} \right| \leq \\ &\leq 2^j \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| \cdot |\widehat{\tilde{\psi}_j}(k)| \right) \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi_j}(l)|. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Представим каждый из получившихся рядов в виде двух слагаемых – суммы по $k \in R_j$ и ряда по $k \in \mathbb{Z} \setminus R_j$, запишем последний в виде двойных сумм по положительным и по

отрицательным индексам:

$$\begin{aligned} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}_j(l) \right| &= \left| \widehat{\psi}_j(0) \right| + \sum_{l \in R_j \setminus \{0\}} \left| \widehat{\psi}_j(l) \right| + \sum_{l=0}^{2^{\lfloor j/2 \rfloor - 1}} \sum_{r=1}^{+\infty} \left| \widehat{\psi}_j(2^{\lfloor j/2 \rfloor} r + l) \right| + \\ &+ \sum_{l=-2^{\lfloor j/2 \rfloor + 1}}^0 \sum_{r=-\infty}^{-1} \left| \widehat{\psi}_j(2^{\lfloor j/2 \rfloor} r + l) \right| \end{aligned} \quad (1.9)$$

и

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(k) \right| \cdot \left| \widehat{\psi}_j(k) \right| &= \left| \widehat{f}(0) \right| \cdot \left| \widehat{\psi}_j(0) \right| + \sum_{k \in R_j \setminus \{0\}} \left| \widehat{f}(k) \right| \cdot \left| \widehat{\psi}_j(k) \right| + \\ &+ \sum_{k=0}^{2^{\lfloor j/2 \rfloor - 1}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \widehat{f}(2^{\lfloor j/2 \rfloor} n + k) \right| \cdot \left| \widehat{\psi}_j(2^{\lfloor j/2 \rfloor} n + k) \right| + \\ &+ \sum_{k=-2^{\lfloor j/2 \rfloor + 1}}^0 \sum_{n=-\infty}^{-1} \left| \widehat{f}(2^{\lfloor j/2 \rfloor} n + k) \right| \cdot \left| \widehat{\psi}_j(2^{\lfloor j/2 \rfloor} n + k) \right|. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Из замечания 2 следует, что $\widehat{\psi}_j(0) = 0$ и $\widehat{\psi}_j(0) = 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$, а по условию (i) для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ можно записать известную оценку на коэффициенты Фурье гладкой функции

$$\left| \widehat{\psi}_j(k) \right|, \left| \widehat{\psi}_j(k) \right| \leq \frac{C_2}{|k|^m}, \quad k \neq 0,$$

где постоянная C_2 не зависит от j и k .

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{2^{\lfloor j/2 \rfloor - 1}} \sum_{r=1}^{+\infty} \left| \widehat{\psi}_j(2^{\lfloor j/2 \rfloor} r + l) \right| + \sum_{l=-2^{\lfloor j/2 \rfloor + 1}}^0 \sum_{r=-\infty}^{-1} \left| \widehat{\psi}_j(2^{\lfloor j/2 \rfloor} r + l) \right| \leq \\ &\leq 2 \sum_{l=0}^{2^{\lfloor j/2 \rfloor - 1}} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{C_2}{2^{\lfloor j/2 \rfloor} m \cdot |r + 2^{-\lfloor j/2 \rfloor} l|^m} \leq \\ &\leq 2C_2 \cdot 2^{-\lfloor j/2 \rfloor m} \sum_{l=0}^{2^{\lfloor j/2 \rfloor - 1}} \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r^m} \leq C_6 \cdot 2^{-j(m-1)/2}. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве постоянная C_6 не зависит от j , поскольку ряд $\sum_{r=1}^{+\infty} \frac{1}{r^m}$ сходится при любом $m \geq 2$.

Из условия (ii) получаем оценку на конечную сумму в (1.9):

$$\sum_{l \in R_j \setminus \{0\}} \left| \widehat{\psi}_j(l) \right| \leq 2 \sum_{l=1}^{2^{\lfloor j/2 \rfloor - 1}} \frac{C_1 |l|^\nu}{2^{j\nu + j/2}} \leq 2C_1 \cdot 2^{-j\nu/2}.$$

Заметим, что для коэффициентов Фурье тригонометрического полинома имеет место

оценка

$$\left| \widehat{f}(k) \right| \leq \frac{C_7 \|f^{(r)}\|_1}{|k|^r}, \quad k \neq 0.$$

Тогда аналогичными рассуждениями получим оценки для сумм в правой части (1.10):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2^{\lfloor j/2 \rfloor - 1}} \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \widehat{f}(2^{\lfloor j/2 \rfloor} n + k) \right| \cdot \left| \widehat{\psi}_j(2^{\lfloor j/2 \rfloor} n + k) \right| + \\ & + \sum_{k=-2^{\lfloor j/2 \rfloor + 1}}^0 \sum_{n=-\infty}^{-1} \left| \widehat{f}(2^{\lfloor j/2 \rfloor} n + k) \right| \cdot \left| \widehat{\psi}_j(2^{\lfloor j/2 \rfloor} n + k) \right| \leq \\ & \leq 2C_2 C_7 \|f^{(r)}\|_1 \cdot 2^{-\lfloor j/2 \rfloor (m+r)} \sum_{k=0}^{2^{\lfloor j/2 \rfloor - 1}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{m+r}} \leq \\ & \leq C_8 \|f^{(r)}\|_1 \cdot 2^{-j(m+r-1)/2}, \end{aligned}$$

так как ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{m+r}}$ сходится для любых $m, r \in \mathbb{N}$, и

$$\sum_{k \in R_j \setminus \{0\}} \left| \widehat{f}(k) \right| \cdot \left| \widehat{\psi}_j(k) \right| \leq \sum_{k \in R_j \setminus \{0\}} \frac{C_1 C_7 \|f^{(r)}\|_1 \cdot |k|^{\nu-r}}{2^{j\nu+j/2}} \leq C_9 \|f^{(r)}\|_1 \cdot 2^{-j(\nu+r)/2}.$$

Таким образом для (1.8) получаем

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n=0}^L \langle f, S_j^n \widetilde{\psi}_j \rangle S_j^n \psi_j(x) \right| \leq \\ & \leq 2^j \|f^{(r)}\|_1 \left(C_9 \cdot 2^{-j\frac{\nu+r}{2}} + C_8 \cdot 2^{-j\frac{m+r-1}{2}} \right) \cdot \left(2C_1 \cdot 2^{-j\nu/2} + C_6 \cdot 2^{-j\frac{m-1}{2}} \right) \leq \\ & \leq C_{10} \cdot 2^{-jr} \|f^{(r)}\|_1 \left(2^{-j(2\nu-r-2)/2} + 2 \cdot 2^{-j(m+\nu-r-3)/2} + 2^{-j(2m-r-4)/2} \right). \end{aligned}$$

По условию теоремы $2\nu \geq r+2$ и $2m \geq r+4$, следовательно, $\nu+m \geq r+3$ и

$$2^{-j(2\nu-r-2)/2} + 2 \cdot 2^{-j(m+\nu-r-3)/2} + 2^{-j(2m-r-4)/2} \leq 4.$$

Тогда, полагая $C_5 = 4C_{10}$, приходим к неравенству (1.7), что влечёт выполнение (1.5) для всех тригонометрических полиномов.

Перейдём к случаю произвольной функции $f \in L_p$, $p \in [1, +\infty)$ ($f \in C$ при $p = \infty$). Рассмотрим средние Валле-Пуссена $v_N(f)$ функции f . Тогда

$$\begin{aligned} \|f - s_N(f)\|_p & \leq \|f - v_N(f)\|_p + \|s_N(f - v_N(f))\|_p + \|v_N(f) - s_N(v_N(f))\|_p = \\ & = (\|s_N\| + 1) \cdot \|f - v_N(f)\|_p + \|v_N(f) - s_N(v_N(f))\|_p \end{aligned}$$

Поскольку $v_N(f)$ есть тригонометрический многочлен порядка $2N-1$, для оценки второго слагаемого можно воспользоваться только что доказанным неравенством (1.5) и оценкой для

тригонометрических полиномов из леммы А при $h = \frac{1}{4N}$. Учитывая так же тривиальное неравенство $\|\Delta_h^r f\|_p \leq 2^r \|f\|_p$, получаем оценку для второго слагаемого:

$$\begin{aligned} \|v_N(f) - s_N(v_N(f))\|_p &\leq C_4 \frac{\|(v_N(f))^{(r)}\|_p}{N^r} \leq C_4 \pi^r \|\Delta_h^r v_N(f)\|_p \leq \\ &\leq C_4 \pi^r (\|\Delta_h^r (f - v_N(f))\|_p + \|\Delta_h^r f\|_p) \leq \\ &\leq C_4 \pi^r \left(2^r \|f - v_N(f)\|_p + \omega_r \left(f, \frac{1}{4N} \right)_p \right) \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся равномерной ограниченностью частичных сумм разложения по всплескам $\|s_N(\cdot)\| \leq C_*$, полученной в доказательстве леммы 1, и результатами леммы В, леммы С, а так же монотонным возрастанием модуля непрерывности по второму аргументу. Получаем окончательную оценку

$$\begin{aligned} \|f - s_N(f)\|_p &\leq (\|s_N\| + 1 + (2\pi)^r C_4) \|f - v_N(f)\|_p + C_4 \pi^r \omega_r \left(f, \frac{1}{4N} \right)_p \leq \\ &\leq C_{11} \omega_r \left(f, \frac{1}{N} \right)_p + C_4 \pi^r \omega_r \left(f, \frac{1}{4N} \right)_p \leq \tilde{C} \omega_r \left(f, \frac{1}{N} \right)_p. \end{aligned}$$

□

Замечание 4. Очевидно, условие (i) можно ослабить, потребовав $|\widehat{\psi}_j(k)|, |\widetilde{\psi}_j(k)| \leq C_2 |k|^{-m}$ для $k \in \mathbb{Z} \setminus R_j$, где постоянная C_2 не зависит от k и j . Так как по условию теоремы $m \geq 2$, то функции ψ_j и $\widetilde{\psi}_j$ будут как минимум непрерывны, а, значит, доказательства теоремы 1 и леммы 1 остаются верны.

Замечание 5. Требование $2m \geq r + 4$ можно заменить на $2m \geq r + 2$, если при всех $j \in \mathbb{Z}_+$ функции $\psi_j^{(m)}$, $\widetilde{\psi}_j^{(m)}$ удовлетворяют условию Липшица порядка 1.

Замечание 6. Условие, близкое к условию (ii) теоремы 1 было предложено в [23] для периодических фреймов Парсевала всплесков в качестве альтернативы нулевых моментов для периодических функций.

Условия теоремы можно ослабить для одного из набора всплеск-функций, изменив при этом требования к параметрам r , m и ν . Сформулируем эти требования в виде теоремы.

Теорема 2. Пусть $p \in [1, +\infty]$, $1/p + 1/q = 1$ и пусть числа $r, m, \nu \in \mathbb{N}$ удовлетворяют неравенствам $m \geq 3 + r$ и $\nu \geq 2 + r$. Пусть $\{V_j\}_{j=0}^\infty, \{\widetilde{V}_j\}_{j=0}^\infty$ образуют (p, q) -пару с последовательностями масштабирующих функций $\{\varphi_j\}_{j=0}^\infty, \{\widetilde{\varphi}_j\}_{j=0}^\infty$ соответственно, такими что для всякого $j \in \mathbb{Z}_+$ функции $\{S_j^n \varphi_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ и $\{S_j^n \widetilde{\varphi}_j\}_{n=0}^{2^j-1}$ образуют биортонормированные системы, а $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty, \{\widetilde{\psi}_j\}_{j=0}^\infty$ – соответствующие последовательности всплеск-функций, удовлетворяющие следующим условиям. Для всех $j \in \mathbb{Z}_+$

$$(i') \quad \widetilde{\psi}_j \in C^m \quad \text{и} \quad \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \|\widetilde{\psi}_j^{(m)}\|_\infty < \infty,$$

(ii') найдётся положительная константа C_1 , не зависящая от j и k , такая что

$$\left| \widehat{\widetilde{\psi}}_j(k) \right| \leq \frac{C_1 |k|^\nu}{2^{j\nu+j/2}} \quad \text{для всех } k \in R_j$$

$$(iii') \sup_{j \in \mathbb{Z}_+} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}_j(k) \right| < \infty.$$

Тогда для всех $f \in L_p$ (C если $p = \infty$) и всех $N \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство

$$\|f - s_N(f)\|_p \leq \widetilde{C} \omega_r \left(f, \frac{1}{N} \right)_p, \quad (1.11)$$

где \widetilde{C} зависит только от m, r, p, ν и постоянных, входящих в условия (i')-(iii').

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. В новых условиях в неравенстве (1.8) получаем оценку

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^L \langle f, S_j^n \widetilde{\psi}_j \rangle S_j^n \psi_j(x) \right| &\leq 2^j \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |f(k)| \cdot |\widehat{\widetilde{\psi}}_j(k)| \right) \cdot \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}_j(l)| \leq \\ &\leq \frac{C' \|f^{(r)}\|_1}{2^{jr}} \cdot 2^{j+jr} \left(2^{-j(m+r-1)/2} + 2^{-j(\nu+r)/2} \right) \leq \\ &\leq \frac{C' \|f^{(r)}\|_1}{2^{jr}} \left(2^{-j(m/2-3/2-r/2)} + 2^{-j(\nu/2-1-r/2)} \right) \leq \frac{2C' \|f^{(r)}\|_1}{2^{jr}}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где константа C' не зависит от j и L . Утверждение леммы 1 при этом остаётся верным, поскольку $m > 3$ и $\nu > 2$. \square

Аналогично, утверждения теоремы 1 и леммы 1 будут верны, если последовательность функций $\{\psi_j\}_{j=0}^\infty$ удовлетворяет условиям (i') и (ii'), а последовательность функций $\{\widetilde{\psi}_j\}_{j=0}^\infty$ удовлетворяет условию (iii'), при $m \geq 3 + 2r$ и $\nu \geq 2 + 2r$.

Глава 2

Фреймы Парсеваля периодических всплесков

2.1 Введение

В начале данной главы для системы периодических всплесков в L_2 получены конструктивные необходимые и достаточные условия, при которых это семейство образует фрейм Парсеваля.

Для непериодических функций общая характеристика фрейма всплесков в терминах коэффициентов Фурье всплеск-функций доказана при различных предположениях на всплесковые генераторы в статьях и монографии [11, 19, 27, 36]. В настоящей главе эта характеристика получена для периодических фреймов всплесков. Так же получен критерий фреймовости системы в терминах последовательности масштабирующих функций. Данные критерии не представляется возможным использовать непосредственно для построения фреймов всплесков. В работе [39] был доказан критерий фреймовости в терминах масштабирующих функций для непериодических систем всплесков и так же отмечалась невозможность его практического применения. Кроме того в [39] приводится частный случай (следствие 6.7), известный как унитарный принцип расширения, являющийся широко используемым способом построения систем всплесков. Его периодические аналоги приведены, например, в [17, 23, 24]. Однако, унитарный принцип расширения дает только достаточное условие и не является критерием. В текущей главе доказан конструктивный критерий для построения фрейма Парсеваля периодических всплесков.

Далее изучаются аппроксимационные свойства фреймов Парсеваля систем всплесков, построенных с помощью описанных выше критериев. Аппроксимационные свойства описываются с помощью порядка аппроксимации. При этом изучается как порядок аппроксимации самим фреймом Парсеваля, так и порядок аппроксимации соответствующим ему периодическим кратномасштабным анализом (ПКМА). В [21] с помощью порядка аппроксимации описаны аппроксимационные свойства произвольных подпространств инвариантных относительно сдвигов для многомерных функций в \mathbb{R}^d . В текущей главе аналогичные результаты получены для подпространств из ПКМА, порождённых сдвигами масштабирующих функций. В частности, доказан критерий для получения определённого порядка аппроксимации

ПКМА.

Для систем фреймов многомерных непериодических всплесков в $L_2(\mathbb{R}^d)$ взаимосвязь между порядками аппроксимации фреймом и кратномасштабным анализом изучалась в [20]. Для систем периодических фреймов всплесков, построенных с помощью унитарного принципа расширения, определение порядка аппроксимации появилось в [23]. В этой же работе приведены необходимые и достаточные условия, при которых фрейм Парсевалья, удовлетворяющий унитарному принципу расширения, имеет заданный порядок аппроксимации. В текущей главе для фреймов Парсевалья всплесков, построенных с помощью критерия фреймовости, доказывается аналогичный критерий для получения заданного порядка аппроксимации фреймом Парсевалья в терминах коэффициентов Фурье масштабирующих функций. Также для таких фреймов всплесков устанавливается взаимосвязь между порядками аппроксимации фреймом и соответствующем ему ПКМА.

Результаты главы опубликованы в [5], [7].

2.2 Критерии фреймовости систем периодических всплесков

Начнём с общей характеристики фрейма Парсевалья периодических всплесков в терминах коэффициентов Фурье.

Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ фиксируем натуральное число ρ_j и рассмотрим функции $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, 2, \dots, \rho_j$. Говорят, что семейство функций

$$\Psi = \{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$$

образует систему периодических всплесков. При этом функции $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, 2, \dots, \rho_j$ называют всплесковыми генераторами. Говорят, что система Ψ образует фрейм Парсевалья всплесков в L_2 , если для всех $f \in L_2$ выполняется равенство Парсевалья

$$\|f\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\rho_j} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\langle f, S_j^k \psi_j^m \rangle|^2.$$

Теорема 1. Семейство $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсевалья в L_2 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\rho_j} 2^j \left| \widehat{\psi_j^m}(n) \right|^2 = 1 \quad \text{для всех } n \in \mathbb{Z}, \quad (2.1)$$

$$\sum_{q=0}^j 2^q \sum_{m=1}^{\rho_q} \overline{\widehat{\psi_q^m}(n)} \widehat{\psi_q^m}(2^j k + n) = 0 \quad (2.2)$$

для всех нечётных k , $n \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{Z}_+$.

Доказательство. Достаточность. Пусть f будет тригонометрическим полиномом, тогда

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\langle f, S_j^k \psi_j^m \rangle|^2 &= \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left| \int_0^1 f(x) \overline{S_j^k \psi_j^m(x)} dx \right|^2 = \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{\psi_j^m}(n)} e^{-2\pi i 2^{-j} kn} \right|^2 = \\ &= \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left| \sum_{n \in \mathcal{R}_j} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j q + n) \overline{\widehat{\psi_j^m}(2^j q + n)} e^{-2\pi i 2^{-j} k(2^j q + n)} \right|^2 = \\ &= \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left| \sum_{n \in \mathcal{R}_j} h_j^m(n) e^{-2\pi i 2^{-j} kn} \right|^2, \end{aligned}$$

где $h_j^m(n) := \sum_{q \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j q + n) \overline{\widehat{\psi_j^m}(2^j q + n)}$. Равенство Парсеваля для дискретного преобразования Фурье дает

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\langle f, S_j^k \psi_j^m \rangle|^2 &= 2^j \sum_{n \in \mathcal{R}_j} |h_j^m(n)|^2 = 2^j \sum_{n \in \mathcal{R}_j} \left(\sum_{q \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(2^j q + n) \overline{\widehat{\psi_j^m}(2^j q + n)} \right|^2 + \right. \\ &+ \left. \sum_{q \neq q'} \widehat{f}(2^j q + n) \overline{\widehat{f}(2^j q' + n)} \overline{\widehat{\psi_j^m}(2^j q + n)} \widehat{\psi_j^m}(2^j q' + n) \right) = \\ &= 2^j \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(n) \overline{\widehat{\psi_j^m}(n)} \right|^2 + 2^j \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{q \neq 0} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{f}(2^j q + n)} \overline{\widehat{\psi_j^m}(n)} \widehat{\psi_j^m}(2^j q + n). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\rho_j} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\langle f, S_j^k \psi_j^m \rangle|^2 &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(n) \right|^2 \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\rho_j} 2^j \left| \widehat{\psi_j^m}(n) \right|^2 + \\ &+ \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\rho_j} 2^j \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{q \neq 0} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{f}(2^j q + n)} \overline{\widehat{\psi_j^m}(n)} \widehat{\psi_j^m}(2^j q + n). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Так как f – тригонометрический полином, то все суммы конечны, а значит, можно записать во второй сумме индекс $q = k2^p$, где k нечетно, и изменить порядок суммирования. Тогда, меняя индекс суммирования $j + p \rightarrow j$, мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{k \text{ odd}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\rho_j} \sum_{p=0}^{\infty} 2^j \widehat{f}(n) \overline{\widehat{f}(2^{j+p}k + n)} \overline{\widehat{\psi_j^m}(n)} \widehat{\psi_j^m}(2^{j+p}k + n) = \\ = \sum_{k \text{ odd}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \widehat{f}(n) \overline{\widehat{f}(2^j k + n)} \sum_{p=0}^j 2^{-p} \sum_{m=1}^{\rho_{j-p}} \overline{\widehat{\psi_{j-p}^m}(n)} \widehat{\psi_{j-p}^m}(2^j k + n). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Поскольку множество тригонометрических полиномов плотно в L_2 , достаточность доказана.

Необходимость. Фиксируем $n_0 \in \mathbb{Z}$, положим $\widehat{f}(n) = \delta_{n, n_0}$. Равенство (2.3) примет вид

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\rho_j} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\langle f, S_j^k \psi_j^m \rangle|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\rho_j} 2^j \left| \widehat{\psi}_j^m(n_0) \right|^2.$$

По предположению левая часть равна $\|f\|^2 = 1$. Так что равенство (2.1) выполняется. Для проверки (2.2) подставим (2.1) в (2.3) и, пользуясь (2.4) и определением фрейма Парсеваля, получим

$$\sum_{k \text{ odd}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^j \widehat{f}(n) \overline{\widehat{f}(2^j k + n)} \sum_{p=0}^j 2^{-p} \sum_{m=1}^{\rho_{j-p}} \overline{\widehat{\psi}_{j-p}^m(n)} \widehat{\psi}_{j-p}^m(2^j k + n) = 0 \text{ для всех } f \in L_2.$$

Фиксируем нечетное $k_0, j_0 \in \mathbb{Z}_+$, $n_0 \in \mathbb{Z}$ и полагаем сначала $\widehat{f}(n) = 2^{-j_0/2}$ для $n = n_0$ и $n = 2^{j_0} k_0 + n_0$, $\widehat{f}(n) = 0$ в остальных случаях. Подставляя эту функцию в последнее равенство, получим

$$\sum_{p=0}^{j_0} 2^{-p} \sum_{m=1}^{\rho_{j_0-p}} \left(\overline{\widehat{\psi}_{j_0-p}^m(n_0)} \widehat{\psi}_{j_0-p}^m(2^{j_0} k_0 + n_0) + \overline{\widehat{\psi}_{j_0-p}^m(2^{j_0} k_0 + n_0)} \widehat{\psi}_{j_0-p}^m(n_0) \right) = 0$$

Теперь мы возьмем функцию с коэффициентами $\widehat{f}(n) = i 2^{-j_0/2}$ для $n = n_0$, $\widehat{f}(n) = 2^{-j_0/2}$ для $n = 2^{j_0} k_0 + n_0$, $\widehat{f}(n) = 0$ в остальных случаях. В результате, приходим к равенству

$$i \sum_{p=0}^{j_0} 2^{-p} \sum_{m=1}^{\rho_{j_0-p}} \left(\overline{\widehat{\psi}_{j_0-p}^m(n_0)} \widehat{\psi}_{j_0-p}^m(2^{j_0} k_0 + n_0) - \overline{\widehat{\psi}_{j_0-p}^m(2^{j_0} k_0 + n_0)} \widehat{\psi}_{j_0-p}^m(n_0) \right) = 0.$$

Последние два равенства доказывают (2.2). \square

В следующей теореме получен критерий фреймовости системы в терминах последовательности масштабирующих функций.

Теорема 2. Пусть функции $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют масштабирующему уравнению

$$\widehat{\varphi}_j(n) = \sqrt{2} \widehat{a_{j+1}}(n) \widehat{\varphi_{j+1}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.5)$$

где $\widehat{a_{j+1}} \in \mathcal{S}(2^{j+1})$. Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ фиксируем $\rho_j \in \mathbb{N}$ и определим функции $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, \dots, \rho_j$ всплесковыми уравнениями

$$\widehat{\psi}_j^m(n) = \sqrt{2} \widehat{b_{j+1}^m}(n) \widehat{\varphi_{j+1}}(n), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (2.6)$$

где $\widehat{b_{j+1}^m} \in \mathcal{S}(2^{j+1})$, $m = 1, \dots, \rho_j$.

Тогда семейство $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсеваля в L_2 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} 2^j |\widehat{\varphi}_j(n)|^2 \theta_j(n) = 1, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad (2.7)$$

$$\theta_j(n) \overline{\widehat{a_{j+1}}(n)} \widehat{a_{j+1}}(n + 2^j) + \sum_{m=1}^{\rho_j} \overline{\widehat{b_{j+1}^m}(n)} \widehat{b_{j+1}^m}(n + 2^j) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad (2.8)$$

или $\widehat{\varphi_{j+1}}(n) = 0$, или $\widehat{\varphi_{j+1}}(2^j k + n) = 0$. Последовательность $\theta_j(n) \in S(2^j)$ определяется рекурсивно

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\rho_j} \left| \widehat{b_{j+1}^m}(n) \right|^2 + \theta_j(n) \left| \widehat{a_{j+1}}(n) \right|^2 &= \theta_{j+1}(n), \\ \theta_1(n) &= \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b_1^m}(n) \right|^2, \quad \theta_0(n) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Замечание 1. Числа $\theta_j(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, назовем, следуя [39], фундаментальными коэффициентами.

Доказательство. Раскрывая рекурсию (2.9), получим

$$\begin{aligned} \theta_q(n) &= \sum_{m=1}^{\rho_{q-1}} \left| \widehat{b_q^m}(n) \right|^2 + \sum_{m=1}^{\rho_{q-2}} \left| \widehat{b_{q-1}^m}(n) \right|^2 \left| \widehat{a_q}(n) \right|^2 + \dots + \\ &+ \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b_1^m}(n) \right|^2 \prod_{p=2}^q \left| \widehat{a_p}(n) \right|^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \theta_q(n) 2^q \left| \widehat{\varphi_q}(n) \right|^2 &= \sum_{m=1}^{\rho_{q-1}} \left| \widehat{b_q^m}(n) \right|^2 2^q \left| \widehat{\varphi_q}(n) \right|^2 + \sum_{m=1}^{\rho_{q-2}} \left| \widehat{b_{q-1}^m}(n) \right|^2 \left| \widehat{a_q}(n) \right|^2 2^q \left| \widehat{\varphi_q}(n) \right|^2 + \\ &+ \dots + \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b_1^m}(n) \right|^2 \prod_{p=2}^q \left| \widehat{a_p}(n) \right|^2 2^q \left| \widehat{\varphi_q}(n) \right|^2. \end{aligned}$$

Из (2.5) и (2.6) следует, что правая часть принимает вид

$$\sum_{m=1}^{\rho_{q-1}} 2^{q-1} \left| \widehat{\psi_{q-1}^m}(n) \right|^2 + \sum_{m=1}^{\rho_{q-2}} 2^{q-2} \left| \widehat{\psi_{q-2}^m}(n) \right|^2 + \dots + \sum_{m=1}^{\rho_0} 2^0 \left| \widehat{\psi_0^m}(n) \right|^2.$$

Таким образом, мы приходим к тождеству

$$\sum_{j=0}^{q-1} \sum_{m=1}^{\rho_j} 2^j \left| \widehat{\psi_j^m}(n) \right|^2 = \theta_q(n) 2^q \left| \widehat{\varphi_q}(n) \right|^2.$$

Переходя к пределу при $q \rightarrow \infty$, мы видим, что (2.7) эквивалентно (2.1).

Для проверки эквивалентности (2.2) и условия

$$\text{“(2.8) или } \widehat{\varphi_{j+1}}(n) = 0, \text{ или } \widehat{\varphi_{j+1}}(2^j k + n) = 0\text{”},$$

начнём с левой части (2.2). Из (2.5), (2.6), периодичности $\widehat{a}_j(n)$ и $\widehat{b}_j^m(n)$ следует

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\rho_j} \overline{\widehat{\psi}_j^m(n)} \widehat{\psi}_j^m(2^j k + n) &= 2 \sum_{m=1}^{\rho_j} \overline{\widehat{b}_{j+1}^m(n)} \widehat{b}_{j+1}^m(2^j k + n) \overline{\widehat{\varphi}_{j+1}(n)} \widehat{\varphi}_{j+1}(2^j k + n) = \\ &= 2 \sum_{m=1}^{\rho_j} \overline{\widehat{b}_{j+1}^m(n)} \widehat{b}_{j+1}^m(2^j + n) \overline{\widehat{\varphi}_{j+1}(n)} \widehat{\varphi}_{j+1}(2^j k + n). \\ \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \overline{\widehat{\psi}_{j-1}^m(n)} \widehat{\psi}_{j-1}^m(2^j k + n) &= 2 \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \overline{\widehat{b}_j^m(n)} \widehat{b}_j^m(2^j k + n) \overline{\widehat{\varphi}_j(n)} \widehat{\varphi}_j(2^j k + n) = \\ &= 2^2 \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widehat{b}_j^m(n) \right|^2 \overline{\widehat{a}_{j+1}(n)} \widehat{a}_{j+1}(2^j + n) \overline{\widehat{\varphi}_{j+1}(n)} \widehat{\varphi}_{j+1}(2^j k + n). \end{aligned}$$

Продолжая вычисления, для $j = 0$ получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\rho_0} \overline{\widehat{\psi}_0^m(n)} \widehat{\psi}_0^m(2^j k + n) &= 2 \sum_{m=1}^{\rho_0} \overline{\widehat{b}_1^m(n)} \widehat{b}_1^m(2^j k + n) \overline{\widehat{\varphi}_1(n)} \widehat{\varphi}_1(2^j k + n) = \\ &= 2^{j+1} \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \prod_{q=2}^j |\widehat{a}_q(n)|^2 \overline{\widehat{a}_{j+1}(n)} \widehat{a}_{j+1}(2^j + n) \overline{\widehat{\varphi}_{j+1}(n)} \widehat{\varphi}_{j+1}(2^j k + n). \end{aligned}$$

Подставляя все эти равенства в (2.2) получим

$$\begin{aligned} \sum_{q=0}^j 2^q \sum_{m=1}^{\rho_q} \overline{\widehat{\psi}_q^m(n)} \widehat{\psi}_q^m(2^j k + n) &= 2^{j+1} \left(\sum_{m=1}^{\rho_j} \overline{\widehat{b}_{j+1}^m(n)} \widehat{b}_{j+1}^m(2^j + n) + \right. \\ &+ \left(\sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widehat{b}_j^m(n) \right|^2 + \dots + \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \prod_{q=2}^j |\widehat{a}_q(n)|^2 \right) \times \\ &\times \overline{\widehat{a}_{j+1}(n)} \widehat{a}_{j+1}(2^j + n) \overline{\widehat{\varphi}_{j+1}(n)} \widehat{\varphi}_{j+1}(2^j k + n) \end{aligned}$$

Из (2.10) следует, что правая часть последнего равенства принимает вид

$$2^{j+1} \left(\sum_{m=1}^{\rho_j} \overline{\widehat{b}_{j+1}^m(n)} \widehat{b}_{j+1}^m(2^j + n) + \theta_j(n) \overline{\widehat{a}_{j+1}(n)} \widehat{a}_{j+1}(2^j + n) \right) \overline{\widehat{\varphi}_{j+1}(n)} \widehat{\varphi}_{j+1}(2^j k + n),$$

что и доказывает эквивалентность. \square

Критерии в теоремах 1 и 2 не дают явного способа для отыскания масок всплесков $\widehat{b}_{j+1}^m(n)$ по имеющимся последовательностям масштабирующих масок $\widehat{a}_{j+1}(n)$. Унитарный принцип расширения дает частный ответ на этот вопрос в случае, когда все фундаментальные коэффициенты $\theta_j(n)$ тождественно равны единице (см. [24]). Выясним, как выглядят явные формулы для нахождения масок всплесков в терминах только масштабирующих масок без использования неявной зависимости от фундаментальных коэффициентов. Для начала наложим дополнительные ограничения на масштабирующие функции, чтобы представить основную идею доказательства, не отвлекаясь на второстепенные детали.

Теорема 3. Пусть функции $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют масштабирующему уравнению (2.5) и $\widehat{\varphi}_j(n) \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$. Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ фиксируем $\rho_j \in \mathbb{N}$ и определяем $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, \dots, \rho_j$ с помощью всплескового уравнения (2.6), и пусть $\sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \neq 0$.

Введем вспомогательные коэффициенты $\tilde{a}_j(n)$, $\tilde{b}_j^m(n) \in \mathcal{S}(2^j)$, $j \geq 2$,

$$\tilde{a}_j(n) = \left(\prod_{r=1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k \right) e^{it_{\rho_{j-1}+1}^k} \neq 0, \quad (2.11)$$

$$\tilde{b}_j^m(n) = \left(\prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k \right) \sin t_m^k e^{it_{\rho_{j-1}+1+m}^k}, \quad (2.12)$$

$k = 0$ для $n = 0, \dots, 2^{j-1} - 1$, $k = 1$ для $n = 2^{j-1}, \dots, 2^j - 1$, $j \in \mathbb{N}$, где параметры $t_r^k = t_r^k(j, n)$, $r = 1, \dots, 2\rho_{j-1} + 1$, удовлетворяют системе

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} \cos \left(t_{\rho_{j-1}+1+m}^0 - t_{\rho_{j-1}+1+m}^1 \right) \prod_{k=0}^1 \sin t_m^k \prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k = 0, \\ \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} \sin \left(t_{\rho_{j-1}+1+m}^0 - t_{\rho_{j-1}+1+m}^1 \right) \prod_{k=0}^1 \sin t_m^k \prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k = 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

произведение $\prod_{r=\rho_{j-1}+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k$ считаем равным 1.

Тогда семейство $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсеваля в L_2 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{m=1}^{\rho_0} \overline{\widehat{b}_1^m(0)} \widehat{b}_1^m(1) = 0, \quad (2.14)$$

$$\prod_{r=2}^{\infty} |\tilde{a}_r(n)|^2 = 2 \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 |\widehat{\varphi}_1(n)|^2. \quad (2.15)$$

Кроме того, маски всплесков определяются так

$$\widehat{b}_j^m(n) = \tilde{b}_j^m(n) \sqrt{\sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2} \prod_{r=2}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|}{|\tilde{a}_r(n)|}. \quad (2.16)$$

Доказательство. Проверим, что уравнения (2.7)-(2.9) эквивалентны уравнениям (2.14)-(2.16). Сначала, дадим полное параметрическое решение системы, состоящей из одной копии (2.8) и двух копий (2.9), одной для n , другой для $n + 2^{j-1}$

$$\begin{cases} \theta_{j-1}(n) \overline{\widehat{a}_j(n)} \widehat{a}_j(n + 2^{j-1}) + \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \overline{\widehat{b}_j^m(n)} \widehat{b}_j^m(n + 2^{j-1}) = 0, \\ \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widehat{b}_j^m(n) \right|^2 + \theta_{j-1}(n) |\widehat{a}_j(n)|^2 = \theta_j(n), \\ \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widehat{b}_j^m(n + 2^{j-1}) \right|^2 + \theta_{j-1}(n) |\widehat{a}_j(n + 2^{j-1})|^2 = \theta_j(n + 2^{j-1}). \end{cases} \quad (2.17)$$

Для этого введем вспомогательные последовательности

$$\tilde{a}_j(n) := \sqrt{\frac{\theta_{j-1}(n)}{\theta_j(n)}} \widehat{a}_j(n) \quad \tilde{b}_j^m(n) := \sqrt{\frac{1}{\theta_j(n)}} \widehat{b}_j^m(n). \quad (2.18)$$

Предположение $\widehat{\varphi}_j(n) \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$, и (2.5) влекут $\widehat{a}_j(n) \neq 0$ для всех $j \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$. Далее, из предположения $\sum_{m=1}^{\rho_0} |\widehat{b}_1^m(n)|^2 \neq 0$ и (2.9) мы заключаем, что $\theta_j(n) \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$. Поэтому $\tilde{a}_j(n)$ и $\tilde{b}_j^m(n)$ корректно определены и $\tilde{a}_j(n) \neq 0$, $j \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$.

Относительно новых переменных (2.17) принимает вид

$$\begin{cases} \overline{\tilde{a}_j(n)} \tilde{a}_j(n + 2^{j-1}) + \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \overline{\tilde{b}_j^m(n)} \tilde{b}_j^m(n + 2^{j-1}) = 0, \\ \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} |\tilde{b}_j^m(n)|^2 + |\tilde{a}_j(n)|^2 = 1, \\ \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} |\tilde{b}_j^m(n + 2^{j-1})|^2 + |\tilde{a}_j(n + 2^{j-1})|^2 = 1. \end{cases} \quad (2.19)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \tilde{a}_j(n) &:= x_0^0 + iy_0^0, & \tilde{a}_j(n + 2^{j-1}) &:= x_0^1 + iy_0^1, \\ \tilde{b}_j^m(n) &:= x_m^0 + iy_m^0, & \tilde{b}_j^m(n + 2^{j-1}) &:= x_m^1 + iy_m^1. \end{aligned}$$

Система (2.19) приводится к виду

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} ((x_m^0)^2 + (y_m^0)^2) = 1, \\ \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} ((x_m^1)^2 + (y_m^1)^2) = 1, \\ \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} (x_m^0 x_m^1 + y_m^0 y_m^1) = 0, \\ \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} (x_m^0 y_m^1 - y_m^0 x_m^1) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

Чтобы удовлетворить двум первым уравнениям мы используем своего рода сферические координаты: сначала классические сферические координаты для выражений $\sqrt{(x_m^k)^2 + (y_m^k)^2}$, $k = 0, 1$,

$$\begin{cases} (x_0^k)^2 + (y_0^k)^2 = \cos^2 t_{\rho_{j-1}}^k \cos^2 t_{\rho_{j-1}-1}^k \dots \cos^2 t_2^k \cos^2 t_1^k, \\ (x_1^k)^2 + (y_1^k)^2 = \cos^2 t_{\rho_{j-1}}^k \cos^2 t_{\rho_{j-1}-1}^k \dots \cos^2 t_2^k \sin^2 t_1^k, \\ (x_2^k)^2 + (y_2^k)^2 = \cos^2 t_{\rho_{j-1}}^k \cos^2 t_{\rho_{j-1}-1}^k \dots \sin^2 t_2^k, \\ (x_3^k)^2 + (y_3^k)^2 = \cos^2 t_{\rho_{j-1}}^k \cos^2 t_{\rho_{j-1}-1}^k \dots \sin^2 t_3^k, \\ \dots \\ (x_{\rho_{j-1}-1}^k)^2 + (y_{\rho_{j-1}-1}^k)^2 = \cos^2 t_{\rho_{j-1}}^k \sin^2 t_{\rho_{j-1}-1}^k, \\ (x_{\rho_{j-1}}^k)^2 + (y_{\rho_{j-1}}^k)^2 = \sin^2 t_{\rho_{j-1}}^k, \end{cases} \quad k = 0, 1.$$

далее параметризуем левые части полярными координатами

$$\begin{cases} x_0^k = \cos t_{\rho_{j-1}}^k \cos t_{\rho_{j-1}-1}^k \dots \cos t_2^k \cos t_1^k \cos t_{\rho_{j-1}+1}^k, \\ y_0^k = \cos t_{\rho_{j-1}}^k \cos t_{\rho_{j-1}-1}^k \dots \cos t_2^k \cos t_1^k \sin t_{\rho_{j-1}+1}^k, \\ x_1^k = \cos t_{\rho_{j-1}}^k \cos t_{\rho_{j-1}-1}^k \dots \cos t_2^k \sin t_1^k \cos t_{\rho_{j-1}+2}^k, \\ y_1^k = \cos t_{\rho_{j-1}}^k \cos t_{\rho_{j-1}-1}^k \dots \cos t_2^k \sin t_1^k \sin t_{\rho_{j-1}+2}^k, \quad k = 0, 1, \\ \dots \\ x_{\rho_{j-1}}^k = \sin t_{\rho_{j-1}}^k \cos t_{2\rho_{j-1}+1}^k, \\ y_{\rho_{j-1}}^k = \sin t_{\rho_{j-1}}^k \sin t_{2\rho_{j-1}+1}^k, \end{cases}$$

Тогда последние два уравнения системы (2.20) примут вид

$$\begin{cases} \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} \cos \left(t_{\rho_{j-1}+1+m}^0 - t_{\rho_{j-1}+1+m}^1 \right) \prod_{k=0}^1 \sin t_m^k \prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k = 0, \\ \sum_{m=0}^{\rho_{j-1}} \sin \left(t_{\rho_{j-1}+1+m}^0 - t_{\rho_{j-1}+1+m}^1 \right) \prod_{k=0}^1 \sin t_m^k \prod_{r=m+1}^{\rho_{j-1}} \cos t_r^k = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\tilde{a}_j(n)$ и $\tilde{b}_j^m(n)$ определяются с помощью (2.11) и (2.12) соответственно и параметры t_r^k связаны системой (2.13).

Поскольку $\tilde{a}_2(n), \dots, \tilde{a}_j(n) \neq 0$, с решением системы (2.19) в руках мы получаем из (2.18)

$$\theta_j(n) = \frac{|\widehat{a}_j(n)|^2}{|\tilde{a}_j(n)|^2} \theta_{j-1}(n) \quad (2.21)$$

и

$$\widehat{b}_j^m(n) = \tilde{b}_j^m(n) \sqrt{\theta_j(n)} = \tilde{b}_j^m(n) \frac{|\widehat{a}_j(n)|}{|\tilde{a}_j(n)|} \sqrt{\theta_{j-1}(n)}. \quad (2.22)$$

Раскрывая рекурсию, получаем

$$\theta_j(n) = \theta_1(n) \prod_{r=2}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|^2}{|\tilde{a}_r(n)|^2} = \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \prod_{r=2}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|^2}{|\tilde{a}_r(n)|^2}. \quad (2.23)$$

Из (2.22) и (2.23) следует (2.16)

$$\widehat{b}_j^m(n) = \tilde{b}_j^m(n) \sqrt{\sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \prod_{r=2}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|}{|\tilde{a}_r(n)|}},$$

где $\widehat{b}_1^m(n)$ (2-периодическая последовательность) выбрана согласно (2.8), то есть

$$\sum_{m=1}^{\rho_0} \overline{\widehat{b}_1^m(0)} \widehat{b}_1^m(1) = 0.$$

Осталось проверить (2.7). Из (2.5) следует, что

$$\widehat{\varphi}_1(n) = 2^{(j-1)/2} \widehat{\varphi}_j(n) \prod_{r=2}^j \widehat{a}_r(n).$$

Вместе с (2.23) получаем

$$\begin{aligned} 2^j |\widehat{\varphi}_j(n)|^2 \theta_j(n) &= 2^j |\widehat{\varphi}_j(n)|^2 \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \prod_{r=2}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|^2}{|\widetilde{a}_r(n)|^2} = \\ &= 2 |\widehat{\varphi}_1(n)|^2 \sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \frac{1}{\prod_{r=2}^j |\widetilde{a}_r(n)|^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, (2.7) эквивалентно (2.15). \square

Рассмотрим важный частный случай одного всплескового генератора $\rho_j = 1$.

Следствие 1. Пусть функции $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют масштабированному уравнению (2.5) и $\widehat{\varphi}_j(n) \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$. Пусть функции $\psi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, определяются всплесковыми уравнениями

$$\widehat{\psi}_j(n) = \sqrt{2} \widehat{b}_{j+1}(n) \widehat{\varphi}_{j+1}(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

И при $j = 0$ считаем, что $m = 1, 2$,

$$\widehat{\psi}_0^m(n) = \sqrt{2} \widehat{b}_1^m(n) \widehat{\varphi}_1(n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$\widehat{b}_1^m \in \mathcal{S}(2)$. Пусть $\sum_{m=1}^2 \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \neq 0$.

Определим вспомогательные коэффициенты $\widetilde{a}_j(n)$, $\widetilde{b}_j(n) \in \mathcal{S}(2^j)$, $j \geq 2$,

$$\begin{cases} \widetilde{a}_j(n) = \cos t_1^0 e^{it_2^0}, \\ \widetilde{a}_j(n + 2^{j-1}) = \pm \sin t_1^0 e^{it_2^1}, \\ \widetilde{b}_j(n) = \sin t_1^0 e^{it_3^0}, \\ \widetilde{b}_j(n + 2^{j-1}) = \pm \cos t_1^0 e^{\pm i(t_3^0 + t_2^1 - t_2^0)}, \end{cases} \quad (2.24)$$

где $j \in \mathbb{N}$, $n = 0, \dots, 2^j - 1$, t_1^0 , t_2^0 , t_3^0 , и t_2^1 зависят от j и n , и знаки “+” и “-” выбираются произвольно.

Тогда семейство $\{\psi_0^1, \psi_0^2\} \cup \{S_j^k \psi_j : j \in \mathbb{N}, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсеваля в L_2 тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^2 \overline{\widehat{b}_1^m(0)} \widehat{b}_1^m(1) &= 0, \\ \prod_{r=2}^{\infty} |\widetilde{a}_r(n)|^2 &= 2 \sum_{m=1}^2 \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 |\widehat{\varphi}_1(n)|^2. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\widehat{b}_j(n) = \widetilde{b}_j(n) \sqrt{\sum_{m=1}^2 \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \prod_{r=2}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|}{|\widetilde{a}_r(n)|}}.$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 3 следует, что нам нужно только решить систему (2.13). Она имеет вид

$$\begin{cases} \cos t_1^0 \cos t_1^1 \cos(t_2^0 - t_2^1) + \sin t_1^0 \sin t_1^1 \cos(t_3^0 - t_3^1) = 0, \\ \cos t_1^0 \cos t_1^1 \cos(t_2^0 - t_2^1) + \sin t_1^0 \sin t_1^1 \sin(t_3^0 - t_3^1) = 0. \end{cases}$$

Интерпретируя систему как линейную относительно $\cos t_1^0 \cos t_1^1$ и $\sin t_1^0 \sin t_1^1$, мы заключаем, что если

$$\cos(t_2^0 - t_2^1) \sin(t_3^0 - t_3^1) - \cos(t_3^0 - t_3^1) \cos(t_2^0 - t_2^1) = \sin(t_3^0 - t_3^1 - t_2^0 + t_2^1) \neq 0,$$

то $\cos t_1^0 = \sin t_1^1 = 0$ или $\cos t_1^1 = \sin t_1^0 = 0$, что противоречит условию $\widetilde{a}_j(n) \neq 0$. Поэтому между параметрами есть зависимость

$$t_3^0 - t_3^1 = t_2^0 - t_2^1 + \pi q, \quad q \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} (\cos t_1^0 \cos t_1^1 + (-1)^q \sin t_1^0 \sin t_1^1) \cos(t_2^0 - t_2^1) = 0, \\ (\cos t_1^0 \cos t_1^1 + (-1)^q \sin t_1^0 \sin t_1^1) \sin(t_2^0 - t_2^1) = 0, \end{cases}$$

или эквивалентно

$$\cos(t_1^0 \pm t_1^1) = 0.$$

Таким образом, общее решение (2.19) в случае $\rho_j = 1$ может быть параметризовано (2.24). \square

Замечание 2. В условиях следствия 1 нельзя взять $\rho_0 = 1$, в противном случае, предположения $\sum_{m=1}^{\rho_0} \left| \widehat{b}_1^m(n) \right|^2 \neq 0$ и (2.14) окажутся несовместны. Это объясняется тем, что на самом деле на нулевом уровне одна из функций является масштабирующей функцией φ_0 , которую мы для удобства изложения приписываем к всплеск-функциям, полагая, например, $\psi_0^1 = \varphi_0$ и $\widehat{a}_1(n) = \widehat{b}_1^1(n)$.

Следующая теорема дает конструктивную явную характеристику фрейма Парсевала без каких бы то ни было ограничений на масштабирующие функции.

Теорема 4. Пусть функции $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{N}$, удовлетворяют масштабирующему уравнению (2.5). Для каждого $j \in \mathbb{Z}_+$ фиксируем $\rho_j \in \mathbb{N}$ и пусть $\psi_j^m \in L_2$, $m = 1, \dots, \rho_j$ определены всплесковым уравнением (2.6). Пусть $\theta_j(n)$ определена рекурсивно (2.9).

Мы определяем вспомогательные коэффициенты $\widetilde{a}_{j+1}(n), \widetilde{b}_{j+1}^m(n) \in \mathcal{S}(2^{j+1})$, $j \in \mathbb{N}$, с помощью (2.11), (2.12), где $t_r^k = t_r^k(j, n)$, $r = 1, \dots, 2\rho_j + 1$, удовлетворяют (2.13) при

$\theta_{j+1}(n+2^j) \neq 0$. Если же $\theta_{j+1}(n+2^j) = 0$, тогда параметры $t_r^k = t_r^k(j, n)$, $r = 1, \dots, 2\rho_j + 1$, задаются произвольно.

Тогда семейство $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсеваля в L_2 тогда и только тогда, когда

$$\text{I. } \{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\} \cap \left\{ j : \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widehat{b}_j^m(n) \right|^2 \neq 0 \right\} \neq \emptyset;$$

$$\text{II. } \prod_{r=j_1+1}^{\infty} |\tilde{a}_r(n)|^2 = 2^{j_1} \sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \left| \widehat{b}_{j_1}^m(n) \right|^2 |\widehat{\varphi}_{j_1}(n)|^2,$$

$$\text{где } j_1 := \min\{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\} \cap \left\{ j : \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widehat{b}_j^m(n) \right|^2 \neq 0 \right\};$$

III. $\widehat{b}_j^m(n)$ определяются так

$$\begin{aligned} (a) \quad & \text{произвольны,} & j \in \{1, \dots, j_0\}, \\ (b) \quad & 0, & j \in \{j_0 + 1, \dots, j_1 - 1\}, \\ (c) \quad & \sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \overline{\widehat{b}_{j_1}^m(n)} \widehat{b}_{j_1}^m(n + 2^{j_1-1}) = 0, & j = j_1, \\ (d) \quad & \widehat{b}_j^m(n) \sqrt{\sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \left| \widehat{b}_{j_1}^m(n) \right|^2} \prod_{r=j_1+1}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|}{|\tilde{a}_r(n)|}, & j \in \{j_1 + 1, j_1 + 2, \dots\}, \end{aligned}$$

где $j_0 + 1 := \min\{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\}$.

Доказательство. Фиксируем $n \in \mathbb{Z}$. Пусть семейство всплесков образует фрейм Парсеваля в L_2 . Тогда из (2.7) следует, что $\{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\} \neq \emptyset$. Поэтому из масштабирующего уравнения (2.5) получаем, что существует $j_0 = j_0(n)$ такая, что

$$\{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\} = \{j : j > j_0\}.$$

Равенства (2.1) и (2.6) приводят к

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{j+1} \left(\sum_{m=1}^{\rho_j} \left| \widehat{b}_{j+1}^m(n) \right|^2 \right) |\widehat{\varphi}_{j+1}(n)|^2 = \sum_{j=j_0}^{\infty} 2^{j+1} \left(\sum_{m=1}^{\rho_j} \left| \widehat{b}_{j+1}^m(n) \right|^2 \right) |\widehat{\varphi}_{j+1}(n)|^2 = 1.$$

Поэтому,

$$\{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\} \cap \left\{ j : \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \left| \widehat{b}_j^m(n) \right|^2 \neq 0 \right\} \neq \emptyset.$$

Итак, (I) доказано.

Теперь проверим, что маски всплесков $\widehat{b}_j^m(n)$ удовлетворяют (III). Прежде всего заметим, что так как $\widehat{\varphi}_1(n) = \dots = \widehat{\varphi}_{j_0}(n) = 0$, то $\widehat{a}_1(n), \dots, \widehat{a}_{j_0}(n), \widehat{b}_1^m(n), \dots, \widehat{b}_{j_0}^m(n)$ могут быть выбраны произвольно. Поэтому (III)(a) следует. При этом из всплескового уравнения $\widehat{\psi}_1^m(n) = \dots = \widehat{\psi}_{j_0}^m(n) = 0$.

Для $j \in \{j_0 + 1, \dots, j_1 - 1\}$ определение j_1 влечет (III)(b).

Чтобы проверить **(III)**(с), заметим, что маски всплесков $\widehat{b_j^m}(n)$ удовлетворяют системе (2.17). В частности, первое уравнение имеет вид

$$\theta_{j_1-1}(n) \overline{\widehat{a_{j_1}}(n)} \widehat{a_{j_1}}(n + 2^{j_1-1}) + \sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} \overline{\widehat{b_{j_1}^m}(n)} \widehat{b_{j_1}^m}(n + 2^{j_1-1}) = 0.$$

Из определения j_0 и масштабирующего уравнения (2.5) имеем $\widehat{a_{j_0+1}}(n) = 0$. Поэтому, если $j_1 = j_0 + 1$, то мы сразу получаем **(III)**(с). Если же $j_1 \geq j_0 + 2$, то из **(III)**(b), рекурсии (2.9) и $\widehat{a_{j_0+1}}(n) = 0$ следует, что

$$\theta_{j_1-1}(n) = \theta_{j_0}(n) \prod_{r=j_0+1}^{j_1-1} |\widehat{a_r}(n)|^2 = 0.$$

А значит, мы получаем **(III)**(с) и в этом случае.

Для $j \in \{j_1 + 1, j_1 + 2, \dots\}$ мы опять рассмотрим систему (2.17). По определению j_1 имеем $\sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} |\widehat{b_{j_1}^m}(n)|^2 \neq 0$, поэтому по рекурсии (2.9)

$$\theta_{j_1}(n) = \sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} |\widehat{b_{j_1}^m}(n)|^2 + \theta_{j_1-1}(n) |\widehat{a_{j_1}}(n)|^2 \neq 0.$$

Так что из $\widehat{a_j}(n) \neq 0$ и рекурсии (2.9) следует, что $\theta_j(n) \neq 0$ для $j \geq j_1$.

Для $\widehat{a_j}(n + 2^{j-1})$ возможны два случая. Первый случай: $\widehat{a_j}(n + 2^{j-1}) \neq 0$. Тогда $\theta_j(n + 2^{j-1}) \neq 0$ по (2.9) и $\theta_{j-1}(n) \neq 0$. Поэтому дальше мы можем действовать как при доказательстве теоремы 3. Определяем вспомогательные коэффициенты $\tilde{a}_j(n)$, $\tilde{a}_j(n + 2^{j-1})$, $\tilde{b}_j^m(n)$ и $\tilde{b}_j^m(n + 2^{j-1})$ с помощью (2.18). Решаем систему (2.19) относительно этих коэффициентов, получаем решение (2.11), (2.12) и (2.13), определяем $\theta_j(n)$ с помощью (2.21) и $\widehat{b_j^m}(n)$ с помощью (2.22). Тогда **(III)**(d) следует из рекурсии.

Второй случай: $\widehat{a_j}(n + 2^{j-1}) = 0$. Если $\theta_j(n + 2^{j-1}) = 0$, то $\widehat{b_j^m}(n + 2^{j-1}) = 0$ для $m = 1, \dots, \rho_{j-1}$. Поэтому (2.8) выполнено и нам нужно удовлетворить только уравнению (2.9)

$$\sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} |\widehat{b_j^m}(n)|^2 + \theta_{j-1}(n) |\widehat{a_j}(n)|^2 = \theta_j(n).$$

Параметризуя его с помощью (2.18), получим

$$\sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} |\tilde{b}_j^m(n)|^2 + |\tilde{a}_j(n)|^2 = 1.$$

Решение представлено в (2.11) и (2.12) для $k = 0$. Коэффициенты $\theta_j(n)$ и $\widehat{b_j^m}(n)$ определяются по формулам (2.21) и (2.22) соответственно. Случай **(III)**(d) следует из рекурсии. Заметим, что при этом нам не нужно решать систему (2.13).

Пусть теперь $\theta_j(n + 2^{j-1}) \neq 0$, тогда мы можем поступать как при доказательстве теоремы

3. Единственное отличие состоит в том, что теперь $\tilde{a}_j(n + 2^{j-1}) = 0$. Однако, на этом этапе нам не нужно находить $\widehat{b}_j^m(n + 2^{j-1})$. Поэтому нам не нужно делить на $\tilde{a}_j(n + 2^{j-1})$. Опять формулы (2.21) и (2.22) определяют коэффициенты $\theta_j(n)$ и $\widehat{b}_j^m(n)$ соответственно. Поэтому (III)(d) следует из рекурсии. Заметим, что на самом деле мы проверили эквивалентность (III)(d) и (2.17) для $j \in \{j_1 + 1, j_1 + 2, \dots\}$.

Теперь установим эквивалентность (2.7) и (II). Поскольку для $j > j_1$ коэффициенты $\theta_j(n)$ и $\widehat{b}_j^m(n)$ определяются по формулам (2.21) и (2.22) соответственно, можно применить рекурсию. Тогда, как в доказательстве теоремы 3

$$\theta_j(n) = \theta_{j_1}(n) \prod_{r=j_1+1}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|^2}{|\tilde{a}_r(n)|^2}.$$

Из (2.5) следует

$$\widehat{\varphi}_{j_1}(n) = 2^{(j-j_1)/2} \widehat{\varphi}_j(n) \prod_{r=j_1+1}^j \widehat{a}_r(n).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} 2^j |\widehat{\varphi}_j(n)|^2 \theta_j(n) &= 2^j |\widehat{\varphi}_{j_1}(n)|^2 \theta_{j_1}(n) \prod_{r=j_1+1}^j \frac{|\widehat{a}_r(n)|^2}{|\tilde{a}_r(n)|^2} \\ &= 2^{j_1} |\widehat{\varphi}_{j_1}(n)|^2 \theta_{j_1}(n) \frac{1}{\prod_{r=j_1+1}^j |\tilde{a}_r(n)|^2}. \end{aligned}$$

Итак, (2.7) эквивалентно (II).

Для доказательства достаточности мы проверяем условия (2.7)-(2.9) теоремы 2. Фиксируем $n \in \mathbb{Z}$. Из (I) следует, что существуют конечные j_0 и j_1 , определенные в формулировке теоремы. Тогда из (2.5) следует, что $\widehat{a}_{j_0+1}(n) = 0$ и $\widehat{a}_j(n) \neq 0$ для $j \geq j_0 + 2$ и (2.9) влечет $\theta_j(n) = 0$ для $j \in \{j_0 + 1, \dots, j_1 - 1\}$ и $\theta_j(n) \neq 0$ для $j \geq j_1$.

Проверим, что из (III) следует (2.8) и (2.9). Для $j \in \{1, \dots, j_0\}$ по определению j_0 мы получаем $\widehat{\varphi}_j(n) = 0$, поэтому условие (2.8) не нужно проверять, так что (III)(a) нам подходит. Для $j \in \{j_0 + 1, \dots, j_1 - 1\}$ имеем $\theta_j(n) = 0$ и $\widehat{b}_j^m(n) = 0$, $m = 1, \dots, \rho_{j-1}$, поэтому (2.8) и (2.9) выполняются. Для $j = j_1$ условие (III)(c) влечет (2.8), поскольку $\theta_{j_1-1}(n) = 0$. В этом случае (2.9) фактически служит определением $\theta_{j_1}(n)$. Для $j \geq j_1 + 1$ условие (III)(d) представляет собой решение системы (2.17), как отмечено при доказательстве необходимости. \square

2.3 Примеры применения критериев для построения фреймов

Среди всех требований, составляющих достаточные условия теорем 3, 4 и следствия 1 самым сложным представляется (2.15) и его обобщение (II). Покажем, что нетрудно подобрать параметры t_r^k , определяющие (2.11), так чтобы эти условия выполнялись. Чтобы избежать гро-

моздкости, остановимся на случае одного всплескового генератора на каждом уровне $j \in \mathbb{N}$, то есть $\rho_j = 1$. Для упрощения обозначений положим $\widehat{b}_j(n)$ вместо $\widehat{b}_j^1(n)$. Таким образом, вопрос состоит в том, как выбрать параметры $t_1^0(j, n)$, определяющие $\tilde{a}_j(n)$ по формулам (2.24) так, чтобы выполнялось **(II)** (или его частный случай (2.15)). Прежде всего заметим, что **(II)** эквивалентно

$$\prod_{r=j_1+1}^N |\tilde{a}_r(n)|^2 = \frac{2^{j_1} |\widehat{b}_{j_1}(n)|^2 |\widehat{\varphi}_{j_1}(n)|^2}{\xi(n, N)}, \quad (2.25)$$

где $\xi(n, N) \rightarrow 1$ при $N \rightarrow \infty$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Для краткости обозначим

$$F(n, N) := \frac{2^{j_1} |\widehat{b}_{j_1}(n)|^2 |\widehat{\varphi}_{j_1}(n)|^2}{\xi(n, N)}, \quad \alpha_j(n) := t_1^0(j, n),$$

и рассмотрим последовательность конечномерных систем

$$\prod_{r=j_1+1}^N |\tilde{a}_r(n)|^2 = F(n, N) \quad n = 0, \dots, 2^{N-1} - 1. \quad (2.26)$$

Из периодичности \tilde{a}_j и (2.24) следует, что для остальных n функция $F(n, N)$ удовлетворяет соотношениям

$$F(n - 2^{N-1}, N) + F(n, N) = F(n - 2^{N-1}, N - 1) \quad \text{для } n = 2^{N-1}, \dots, 2^N - 1,$$

и $F(n, N)$ продолжается как 2^N -периодическая по переменной n . Выполнение этих свойств обеспечивается выбором последовательности $\xi(n, N)$. Рассмотрим два примера.

ПРИМЕР 1. Пусть $\widehat{\varphi}_j(n) \neq 0$ для всех $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ и $\sum_{m=1}^2 |\widehat{b}_1^m(n)|^2 \neq 0$. Другими словами, мы находимся в условиях следствия 1. В этом случае $j_0(n) = 0$, $j_1(n) = j_0(n) + 1 = 1$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Учитывая периодичность \tilde{a}_j и соотношения (2.24), мы получаем для $N = 2$, $N = 3$, $N = 4$

$$\begin{cases} |\cos \alpha_2(0)|^2 = F(0, 2), \\ |\cos \alpha_2(1)|^2 = F(1, 2), \end{cases} \quad \begin{cases} |\cos \alpha_2(0)|^2 |\cos \alpha_3(0)|^2 = F(0, 3), \\ |\cos \alpha_2(1)|^2 |\cos \alpha_3(1)|^2 = F(1, 3), \\ |\sin \alpha_2(0)|^2 |\cos \alpha_3(2)|^2 = F(2, 3), \\ |\sin \alpha_2(1)|^2 |\cos \alpha_3(3)|^2 = F(3, 3), \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\cos \alpha_2(0)|^2 |\cos \alpha_3(0)|^2 |\cos \alpha_4(0)|^2 = F(0, 4), \\ |\cos \alpha_2(1)|^2 |\cos \alpha_3(1)|^2 |\cos \alpha_4(1)|^2 = F(1, 4), \\ |\sin \alpha_2(0)|^2 |\cos \alpha_3(2)|^2 |\cos \alpha_4(2)|^2 = F(2, 4), \\ |\sin \alpha_2(1)|^2 |\cos \alpha_3(3)|^2 |\cos \alpha_4(3)|^2 = F(3, 4), \\ |\cos \alpha_2(0)|^2 |\sin \alpha_3(0)|^2 |\cos \alpha_4(4)|^2 = F(4, 4), \\ |\cos \alpha_2(1)|^2 |\sin \alpha_3(1)|^2 |\cos \alpha_4(5)|^2 = F(5, 4), \\ |\sin \alpha_2(0)|^2 |\sin \alpha_3(2)|^2 |\cos \alpha_4(6)|^2 = F(6, 4), \\ |\sin \alpha_2(1)|^2 |\sin \alpha_3(3)|^2 |\cos \alpha_4(7)|^2 = F(7, 4). \end{array} \right.$$

В общем случае для того чтобы получить $N + 1$ -ую систему, мы берем выражения, стоящие в левой части предыдущей системы и записываем их в первые 2^N уравнений, далее мы повторяем эти выражения, заменяя $|\cos \alpha_N(n)|^2$ на $|\sin \alpha_N(n)|^2$ и записываем их во вторые 2^N уравнений, наконец, мы умножаем каждое выражение на $|\cos \alpha_{N+1}(n)|^2$. Все системы могут быть решены последовательно: мы находим $|\cos \alpha_N(n)|^2$ из N -ой системы. Для первых трех шагов получим

$$\left\{ \begin{array}{l} |\cos \alpha_2(0)|^2 = F(0, 2), \\ |\cos \alpha_2(1)|^2 = F(1, 2), \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} |\cos \alpha_3(0)|^2 = \frac{F(0,3)}{F(0,2)}, \\ |\cos \alpha_3(1)|^2 = \frac{F(1,3)}{F(1,2)}, \\ |\cos \alpha_3(2)|^2 = \frac{F(2,3)}{1-|\cos \alpha_2(0)|^2}, \\ |\cos \alpha_3(3)|^2 = \frac{F(3,3)}{1-|\cos \alpha_2(1)|^2}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\cos \alpha_4(0)|^2 = \frac{F(0,4)}{F(0,3)}, \\ |\cos \alpha_4(1)|^2 = \frac{F(1,4)}{F(1,3)}, \\ |\cos \alpha_4(2)|^2 = \frac{F(2,4)}{F(2,3)}, \\ |\cos \alpha_4(3)|^2 = \frac{F(3,4)}{F(3,3)}, \\ |\cos \alpha_4(4)|^2 = \frac{F(4,4)}{F(0,2)(1-|\cos \alpha_3(0)|^2)}, \\ |\cos \alpha_4(5)|^2 = \frac{F(5,4)}{F(1,2)(1-|\cos \alpha_3(1)|^2)}, \\ |\cos \alpha_4(6)|^2 = \frac{F(6,4)}{(1-|\cos \alpha_2(0)|^2)(1-|\cos \alpha_3(2)|^2)}, \\ |\cos \alpha_4(7)|^2 = \frac{F(7,4)}{(1-|\cos \alpha_2(1)|^2)(1-|\cos \alpha_3(3)|^2)}. \end{array} \right.$$

В общем случае решение имеет вид.

Если $n = 0, \dots, 2^{N-2} - 1$, то

$$|\cos \alpha_N(n)|^2 = \frac{F(n, N)}{F(n, N-1)}.$$

Если $n = 2^{N-2} + k$, $k = 0, \dots, +2^{N-3} - 1$, то

$$\begin{aligned} |\cos \alpha_N(n)|^2 &= \frac{F(2^{N-2} + k, N)}{F(k, N-2) (1 - |\cos \alpha_{N-1}(k)|^2)} \\ &= \frac{F(2^{N-2} + k, N)}{F(k, N-2) - F(k, N-1)}. \end{aligned}$$

Если $n = 2^{N-2} + 2^{N-3} + k$, $k = 0, \dots, 2^{N-2} + 2^{N-3} + 2^{N-4} - 1$, то

$$\begin{aligned} |\cos \alpha_N(n)|^2 &= \frac{F(2^{N-2} + 2^{N-3} + k, N)}{F(k, N-3) (1 - |\cos \alpha_{N-2}(k)|^2) (1 - |\cos \alpha_{N-1}(2^{N-3} + k)|^2)} \\ &= \frac{F(2^{N-2} + 2^{N-3} + k, N)}{F(k, N-3) - F(k, N-2) - F(2^{N-3} + k, N-1)}. \end{aligned}$$

Если $n = 2^{N-2} + 2^{N-3} + 2^{N-4} + k$, $k = 0 \dots, 2^{N-2} + 2^{N-3} + 2^{N-4} + 2^{N-5} - 1$, то

$$\begin{aligned} |\cos \alpha_N(n)|^2 &= F(2^{N-2} + 2^{N-3} + 2^{N-4} + k, N) (F(k, N-4) \\ &\quad - F(k, N-3) - F(2^{N-4} + k, N-2) - F(2^{N-3} + 2^{N-4} + k, N-1))^{-1}. \end{aligned}$$

Если $n = 2^{N-2} + 2^{N-3} + \dots + 2^1 + k$, $k = 0, 1$, то

$$\begin{aligned} |\cos \alpha_N(n)|^2 &= F(2^{N-2} + 2^{N-3} + \dots + 2^1 + k, N) (1 - F(k, 2) \\ &\quad - F(2 + k, 3) - \dots - F(2^{N-3} + \dots + 2 + k, N-1))^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку $F(n, N) > 0$, то $|\cos \alpha_N(n)|$, $|\sin \alpha_N(n)| \neq 0$. Так что выражения в правой части корректно определены. Остается естественное ограничение, а именно выражения в правой части должны лежать в интервале $(0, 1)$. Поскольку все числители положительны, то последнее требование эквивалентно тому, что разность между числителем и знаменателем положительна. Сравнивая решения N -ой и $N+1$ -ой систем, мы замечаем, что $r+1$ -ое неравенство для $N+1$ -ой системы влечет r -ое неравенство для N -ой системы. Например, третье неравенство для $N+1$ -ой системы

$$F(k, N-2) - F(k, N-1) - F(2^{N-2} + k, N) - F(2^{N-1} + 2^{N-2} + k, N+1) > 0,$$

$n = 2^{N-1} + 2^{N-2} + k$, $k = 0, \dots, +2^{N-3} - 1$, влечет второе неравенство для N -ой системы

$$F(k, N-2) - F(k, N-1) - F(k + 2^{N-2}, N) > 0,$$

$n = 2^{N-2} + k$, $k = 0, \dots, +2^{N-3} - 1$. Поэтому все неравенства из фиксированной цепочки выполняются одновременно тогда и только тогда, когда мы заменим конечную сумму рядом. В приведенном выше примере цепочка состоит из p -ых неравенств для $N+p-2$ -ых систем, $p \in \mathbb{N}$, и результирующее неравенство имеет вид

$$F(k, N-1) + F(2^{N-2} + k, N) + F(2^{N-1} + 2^{N-2} + k, N+1) + \dots < F(k, N-2),$$

$k = 0, \dots, +2^{N-3} - 1$. Для всех цепочек окончательно получим

$$F(k, 2) + \sum_{N=1}^{\infty} F(k + 2^1 + \dots + 2^N, N + 2) < 1, \quad k = 0, 1,$$

$$F(k, M + 1) + \sum_{N=M}^{\infty} F(k + 2^M + \dots + 2^N, N + 2) < F(k, M),$$

$k = 0, \dots, 2^{M-1} - 1, M \geq 2$.

ПРИМЕР 2. Мы по-прежнему рассматриваем случай одного всплескового генератора, $\rho_j = 1$ для $j \in \mathbb{N}$, $\rho_0 = 2$. Возьмем в качестве масштабирующих функций φ_j тригонометрические полиномы и пусть $\{n : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\} = \{-2^j, \dots, 2^j - 1\}$. Тогда по определению j_0 заключаем $j_0(n) + 1 = \lceil \log_2(n + 1) \rceil$ для $n \in \mathbb{N}$ и $j_0(0) + 1 = 1$. Возьмем $j_1(n) = j_0(n) + 1$, тогда $\widehat{b}_{j_0(n)+1}(n) \neq 0$. Из (III)(с) следует, что маски должны удовлетворять неравенству $\widehat{b}_{j_0(n)+1}(n)\widehat{b}_{j_0(n)+1}(n + 2^{j_0(n)}) = 0$. Непосредственно проверяется, что $j_0(n + 2^{j_0(n)}) > j_0(n)$ для $n \in \mathbb{N}$, поэтому по условию (III)(а) коэффициенты $\widehat{b}_{j_0(n)+1}(n + 2^{j_0(n)})$ могут быть выбраны произвольно, положим $\widehat{b}_{j_0(n)+1}(n + 2^{j_0(n)}) = 0$, тогда условие (III)(с) будет выполнено. По определению $j_1(n)$ и соотношениям (2.24) система (2.26) принимает вид при $N = 2, N = 3, N = 4$

$$\begin{cases} |\cos \alpha_2(0)|^2 = F(0, 2), \\ |\cos \alpha_2(1)|^2 = F(1, 2), \end{cases} \quad \begin{cases} |\cos \alpha_2(0)|^2 |\cos \alpha_3(0)|^2 = F(0, 3), \\ |\cos \alpha_2(1)|^2 |\cos \alpha_3(1)|^2 = F(1, 3), \\ |\cos \alpha_3(2)|^2 = F(2, 3), \\ |\cos \alpha_3(3)|^2 = F(3, 3), \end{cases}$$

$$\begin{cases} |\cos \alpha_2(0)|^2 |\cos \alpha_3(0)|^2 |\cos \alpha_4(0)|^2 = F(0, 4), \\ |\cos \alpha_2(1)|^2 |\cos \alpha_3(1)|^2 |\cos \alpha_4(1)|^2 = F(1, 4), \\ |\cos \alpha_3(2)|^2 |\cos \alpha_4(2)|^2 = F(2, 4), \\ |\cos \alpha_3(3)|^2 |\cos \alpha_4(3)|^2 = F(3, 4), \\ |\cos \alpha_4(4)|^2 = F(4, 4), \\ |\cos \alpha_4(5)|^2 = F(5, 4), \\ |\cos \alpha_4(6)|^2 = F(6, 4), \\ |\cos \alpha_4(7)|^2 = F(7, 4). \end{cases}$$

В общем случае, чтобы получить $N + 1$ -ую систему мы берем выражения, стоящие в левой части предыдущей системы и записываем их в первые 2^N уравнений, далее мы пишем единицы во вторые 2^N уравнений, наконец, мы умножаем каждое выражение на $|\cos \alpha_{N+1}(n)|^2$.

Эти системы намного проще систем из примера 1. Решение имеет вид

$$|\cos \alpha_N(n)|^2 = \begin{cases} \frac{F(n, N)}{F(n, N-1)} = \frac{\xi(n, N-1)}{\xi(n, N)}, & n = 0, \dots, 2^{N-2} - 1, \\ F(n, N) = \frac{2^{j_1} |\widehat{b}_{j_1}(n)|^2 |\widehat{\varphi}_{j_1}(n)|^2}{\xi(n, N)}, & n = 2^{N-2}, \dots, 2^{N-1} - 1. \end{cases}$$

Решение корректно тогда и только тогда, когда $0 < |\cos \alpha_N(n)|^2 < 1$, что контролируется выбором последовательности ξ . А именно,

$$\begin{aligned} \xi(n, N-1) &< \xi(n, N), \quad n = 0, \dots, 2^{N-2} - 1, \\ \xi(n, N) &> 2^{j_1} |\widehat{b}_{j_1}(n)|^2 |\widehat{\varphi}_{j_1}(n)|^2, \quad n = 2^{N-2}, \dots, 2^{N-1} - 1. \end{aligned}$$

2.4 Порядок аппроксимации периодическим кратномасштабным анализом

Существует несколько различных определений периодического кратномасштабного анализа, отличающихся набором аксиом и объемлющим пространством (см., например, [8, 12, 18, 25, 31, 42]). В данной главе мы будем использовать определение с наименьшим числом аксиом, приведённое в [25] и [31]. А именно, будем говорить, что для заданных функций $\varphi_j \in L_2$, $j \in \mathbb{Z}_+$, последовательность подпространств $V_j = \text{span} \{S_j^k \varphi_j, k \in \mathcal{R}_j\} \subset L_2$, $j \in \mathbb{Z}_+$, образует ПКМА в L_2 , если $V_j \subseteq V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ и $\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty} V_j} = L_2$. При этом функции φ_j называются масштабирующими функциями, а последовательности их коэффициентов Фурье $\{\widehat{\varphi}_j(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – масштабирующими последовательностями.

Аппроксимационные свойства ПКМА будем описывать с помощью порядка аппроксимации в терминах наилучшего приближения. Говорят, что ПКМА $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ имеет порядок аппроксимации, равный $\mu_0 \geq 0$, если μ_0 есть супремум неотрицательных чисел μ , для которых найдутся такие постоянные $C_\mu > 0$ и $J_\mu \in \mathbb{N}$, что для всякого $j \geq J_\mu$ и всех функций $f \in H^\mu$ верно неравенство

$$E(f, V_j)_2 \leq 2^{-j\mu} C_\mu \|f\|_{H^\mu}. \quad (2.27)$$

При описании порядка аппроксимации ПКМА в терминах масштабирующих последовательностей $\{\widehat{\varphi}_j(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ мы следуем идеям, предложенным в [21]. Введём вспомогательные обозначения.

Для последовательностей $a, b \in l_2$ и $j \in \mathbb{N}$ обозначим $[a, b]^j$ последовательность с коэффициентами

$$[a, b]_k^j := \sum_{l \in \mathbb{Z}} a(2^j l + k) \overline{b(2^j l + k)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Определение корректно в силу неравенства Коши-Буняковского-Шварца

$$\left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} a(2^j l + k) \overline{b(2^j l + k)} \right|^2 \leq \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |a(k + 2^j l)|^2 \right) \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} |b(k + 2^j l)|^2 \right) \leq \|a\|_2^2 \cdot \|b\|_2^2.$$

Из определения также ясно, что $[a, b]^j \in S(2^j)$.

Символом Λ_j будем обозначать последовательность, элементы которой задаются с помощью соответствующей масштабирующей последовательности

$$\Lambda_j(k) := \left(1 - \frac{|\widehat{\varphi}_j(k)|^2}{[\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_k^j} \right)^{1/2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Принимая во внимание договорённость $\frac{0}{0} = 0$, приходим к корректному определению.

Так же зафиксируем $\widehat{V}_j = \left\{ \{\widehat{f}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}} : f \in V_j \right\}$ – множество всех последовательностей коэффициентов Фурье функций из подпространства V_j . Понятно, что \widehat{V}_j есть линейное подпространство l_2 и существует взаимно однозначное соответствие между элементами множеств V_j и \widehat{V}_j , сопоставляющее каждой функции последовательность её коэффициентов Фурье. Обозначим через \mathcal{P}_j и $\widehat{\mathcal{P}}_j$ ортогональные проекторы на подпространства V_j и \widehat{V}_j соответственно.

Лемма 1. Пусть $f \in L_2$. Тогда для $k \in \mathbb{Z}$

$$\widehat{\mathcal{P}}_j \widehat{f}(k) = \widehat{\mathcal{P}}_j f(k) = \begin{cases} \frac{[\widehat{f}, \widehat{\varphi}_j]_k^j}{[\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_k^j} \widehat{\varphi}_j(k), & \text{если } [\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_k^j \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Кроме того, если $\text{supp} \widehat{f} \subset \{2^j m + \mathcal{R}_j\}$ для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{Z}$, то

$$E^2(f, V_j)_2 = \sum_{k \in \{2^j m + \mathcal{R}_j\}} |\widehat{f}(k)|^2 \Lambda_j^2(k).$$

Доказательство. Из равенства Парсеваля следует, что $\widehat{\mathcal{P}}_j \widehat{f} = \widehat{\mathcal{P}}_j f$.

Обозначим

$$\alpha_k^j(f) = \begin{cases} \frac{[\widehat{f}, \widehat{\varphi}_j]_k^j}{[\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_k^j}, & \text{если } [\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_k^j \neq 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}.$$

Ясно, что $\alpha^j(f)$ есть 2^j -периодическая последовательность и $\alpha^j(f) \widehat{\varphi}_j$ лежит в l_2 по неравенству Коши-Буняковского-Шварца:

$$\begin{aligned} \|\alpha^j(f)\widehat{\varphi}_j\|_2^2 &= \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\alpha_k^j(f)|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_j(2^j n + k)|^2 = \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \frac{\left| [\widehat{f}, \widehat{\varphi}_j]_k^j \right|^2}{\left([\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_k^j \right)^2} \cdot [\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_k^j \leq \\ &\leq \sum_{k \in \mathcal{R}_j} [\widehat{f}, \widehat{f}]_k^j = \|f\|_2^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим линейный оператор T_j на l_2 , действующий по правилу $T_j \widehat{f} = \alpha^j(f)\widehat{\varphi}_j$. Доказательство первого утверждения теоремы теперь сводится к доказательству того, что оператор T_j совпадает с оператором $\widehat{\mathcal{P}}_j$. В силу линейности операторов достаточно доказать, что они действуют одинаково на элементах подпространства V_j и его ортогонального дополнения V_j^\perp в L_2 . Для функции $f \in V_j^\perp$ и любого $k \in \mathcal{R}_j$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \langle f, S_j^k \varphi_j \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{\varphi}_j(n)} e^{2\pi i \cdot 2^{-j} n k} = \\ &= \sum_{m \in \mathcal{R}_j} e^{2\pi i \cdot 2^{-j} m k} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j n + m) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j n + m)} = \sum_{m \in \mathcal{R}_j} [\widehat{f}, \widehat{\varphi}_j]_m^j e^{2\pi i \cdot 2^{-j} m k}, \end{aligned}$$

что возможно только при условии $[\widehat{f}, \widehat{\varphi}_j]_m^j = 0$ ввиду линейной независимости экспонент. Таким образом, $T_j \widehat{f} = 0$ для $f \in V_j^\perp$ и, по определению, $\widehat{\mathcal{P}}_j \widehat{f} = \widehat{\mathcal{P}}_j f = 0$.

Всякая функция $f \in V_j$ может быть представлена в виде линейной комбинации конечного числа сдвигов масштабирующей функции $\{\varphi_j(\cdot + 2^{-j}k)\}_{k \in \mathcal{R}_j}$. Поэтому достаточно изучить действие рассматриваемых операторов на сдвиги масштабирующей функции. Если $[\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_n^j = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, то в частности $\widehat{\varphi}_j(n) = 0$ и

$$\widehat{\mathcal{P}}_j \left(\widehat{S_j^k \varphi_j} \right)_n = e^{2\pi i \cdot 2^{-j} k n} \widehat{\varphi}_j(n) = 0.$$

Если $[\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_n^j \neq 0$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, то

$$\alpha_n^j(S_j^k \varphi_j) = \frac{\left[e^{2\pi i \cdot 2^{-j} k n} \widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j \right]_n^j}{[\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_n^j} = e^{2\pi i \cdot 2^{-j} k n}$$

для всех $k \in \mathcal{R}_j$ и, следовательно,

$$T_j \left(\widehat{S_j^k \varphi_j} \right)_n = e^{2\pi i \cdot 2^{-j} k n} \widehat{\varphi}_j(n) = \widehat{S_j^k \varphi_j}(n) = \widehat{\mathcal{P}}_j \left(\widehat{S_j^k \varphi_j} \right)_n.$$

Для доказательства второго утверждения леммы воспользуемся только что доказанной

формулой для оператора $\widehat{\mathcal{P}}_j$

$$\begin{aligned}
E^2(f, V_j) &= E^2(\widehat{f}, \widehat{V}_j) = \|\widehat{f}\|_2^2 - \|\widehat{\mathcal{P}}_j f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2 - \|\alpha^j(f)\widehat{\varphi}_j\|_2^2 = \\
&= \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\widehat{f}(2^j m + k)|^2 - \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \frac{\left| \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j p + k) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)} \right|^2}{\left([\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_k^j \right)^2} \cdot [\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_k^j = \\
&= \sum_{k \in \{2^j m + \mathcal{R}_j\}} |\widehat{f}(k)|^2 \left(1 - \frac{|\widehat{\varphi}_j(k)|^2}{[\widehat{\varphi}_j, \widehat{\varphi}_j]_k^j} \right) = \sum_{k \in \{2^j m + \mathcal{R}_j\}} |\widehat{f}(k)|^2 \Lambda_j^2(k).
\end{aligned}$$

□

Теперь введём вспомогательную функцию $g_j^*(x) = \sum_{k \in \mathcal{R}_j} e^{2\pi i k x}$ и пространство $V_j^* = \text{span} \{g_j^*(\cdot + 2^{-j}k), k \in \mathcal{R}_j\}$, порождённое сдвигами этой функции g_j^* . Обозначим через \mathcal{P}_j^* ортогональный проектор на V_j^* . Тогда для $f \in L_2$

$$\widehat{\mathcal{P}}_j^* f(k) = \frac{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j l + k) \cdot \overline{\widehat{g}_j^*(2^j l + k)}}{\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{g}_j^*(2^j l + k) \right|^2} \widehat{g}_j^*(k) = \begin{cases} \widehat{f}(k), & k \in \mathcal{R}_j \\ 0, & k \notin \mathcal{R}_j \end{cases}.$$

Лемма 2. 1. Для всех $f \in L_2$ и $k \in \mathbb{Z}$

$$\left| E(f, V_j)_2 - E(\mathcal{P}_j^* f, V_j)_2 \right| \leq E(f, V_j^*)_2.$$

2. Для всех $f \in H^\mu, \mu \geq 0$

$$E(f, V_j^*)_2 \leq \varepsilon_j(f) \cdot 2^{-j\mu} \cdot 2^\mu \cdot \|f\|_{H^\mu},$$

где

$$\varepsilon_j(f) = \left(\frac{\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{R}_j} (1 + |k|^2)^\mu |\widehat{f}(k)|^2}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^\mu |\widehat{f}(k)|^2} \right)^{1/2},$$

а значит, $0 \leq \varepsilon_j(f) \leq 1$ и $\lim_{j \rightarrow +\infty} \varepsilon_j(f) = 0$.

Доказательство. Используя элементарные свойства расстояния и равенство Парсеваля, получаем

$$E^2(f, V_j)_2 = \|f\|_2^2 - \|\mathcal{P}_j f\|_2^2 = \|\widehat{f}\|_2^2 - \|\widehat{\mathcal{P}}_j f\|_2^2.$$

Применяя неравенство треугольника и свойства ортопроекторов, приходим к оценке

$$\begin{aligned}
& \left| E(f, V_j)_2 - E(\mathcal{P}_j^* f, V_j)_2 \right| = \left| E(\widehat{f}, \widehat{V}_j)_2 - E(\widehat{\mathcal{P}_j^* f}, \widehat{V}_j)_2 \right| = \\
& = \left| E(\widehat{f}, \widehat{V}_j)_2 - E(\delta_{\mathcal{R}_j} \widehat{f}, \widehat{V}_j)_2 \right| = \left\| \widehat{f} - \widehat{\mathcal{P}}_j \widehat{f} \right\|_2 = \left\| \delta_{\mathcal{R}_j} \widehat{f} - \widehat{\mathcal{P}}_j(\delta_{\mathcal{R}_j} \widehat{f}) \right\|_2 \leq \\
& \leq \left\| \widehat{f} - \widehat{\mathcal{P}}_j \widehat{f} - \delta_{\mathcal{R}_j} \widehat{f} + \widehat{\mathcal{P}}_j(\delta_{\mathcal{R}_j} \widehat{f}) \right\|_2 = \left\| (1 - \delta_{\mathcal{R}_j}) \widehat{f} - \widehat{\mathcal{P}}_j \left((1 - \delta_{\mathcal{R}_j}) \widehat{f} \right) \right\|_2 = \\
& = \left\| (I - \widehat{\mathcal{P}}_j) \left((1 - \delta_{\mathcal{R}_j}) \widehat{f} \right) \right\|_2 \leq \|I - \widehat{\mathcal{P}}_j\| \cdot \|(1 - \delta_{\mathcal{R}_j}) \widehat{f}\|_2 \leq \|(1 - \delta_{\mathcal{R}_j}) \widehat{f}\|_2,
\end{aligned}$$

где I – тождественный оператор и операторная норма разности $\|I - \widehat{\mathcal{P}}_j\| \leq 1$, поскольку ортопроектор является сжимающим отображением.

С другой стороны,

$$\begin{aligned}
E(f, V_j^*)_2 &= E(\widehat{f}, \widehat{V}_j^*)_2 = \left(\|\widehat{f}\|_2^2 - \|\widehat{\mathcal{P}_j^* f}\|_2^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 - \sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} = \\
&= \|(1 - \delta_{\mathcal{R}_j}) \widehat{f}\|_2.
\end{aligned}$$

Перейдём к доказательству второго утверждения леммы. Для $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{R}_j$ имеем $(1 + |k|^2)^{-\mu} \leq (1 + 2^{2j-2})^{-\mu} \leq 2^{(2-2j)\mu}$. Тогда для всякой $f \in H^\mu$ получаем

$$\begin{aligned}
E(f, V_j^*)_2 &= \|(1 - \delta_{\mathcal{R}_j}) \widehat{f}\|_2 = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{R}_j} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq \left(2^{(2-2j)\mu} \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{R}_j} (1 + |k|^2)^\mu |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} = \\
&= \left(\frac{\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \mathcal{R}_j} (1 + |k|^2)^\mu |\widehat{f}(k)|^2}{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + |k|^2)^\mu |\widehat{f}(k)|^2} \right)^{1/2} \cdot 2^{-j\mu} \cdot 2^\mu \cdot \|f\|_{H^\mu}
\end{aligned}$$

□

Теорема 5. Пусть $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ – ПКМА в L_2 с масштабирующими функциями $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$. Порядок аппроксимации ПКМА равен $\mu_0 \geq 0$ тогда и только тогда, когда μ_0 есть супремум таких неотрицательных чисел μ , для которых найдутся такие постоянные $C_\mu > 0$ и $J_\mu \in \mathbb{N}$, что для всех целых $j \geq J_\mu$

$$(2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\mu} \Lambda_j^2(k) \leq C_\mu \quad \text{для любого } k \in \mathcal{R}_j. \quad (2.28)$$

Доказательство. Докажем, что выполнение неравенства (2.28) для некоторого $\mu \geq 0$ равносильно тому, что для этого μ выполнены условия (2.27) из определения порядка аппроксимации ПКМА. Для доказательства необходимости рассмотрим функции $f_k = e^{2\pi i k \cdot}$, $k \in \mathcal{R}_j$. Так как $\|f_k\|_{H^\mu}^2 = (1 + |k|^2)^\mu$, то из леммы 1 следует, что

$$\Lambda_j^2(k) = \sum_{n \in \mathcal{R}_j} |\widehat{f}_k(n)|^2 \Lambda_j^2(n) = E^2(f_k, V_j)_2 \leq 2^{-2j\mu} C_\mu \|f_k\|_{H^\mu}^2 = 2^{-2j\mu} (1 + |k|^2)^\mu C_\mu,$$

где постоянная C_μ берётся из определения порядка аппроксимации и зависит только от μ .

Для доказательства достаточности воспользуемся результатами леммы 1 и леммы 2. Для $f \in H^\mu$ и $j \geq J_\mu$

$$\begin{aligned} E(f, V_j)_2 &= E(f, V_j)_2 - E(\widehat{\mathcal{P}_j^* f}, \widehat{V}_j)_2 + E(\widehat{\mathcal{P}_j^* f}, \widehat{V}_j)_2 \leq E(f, V_j^*)_2 + E(\widehat{\mathcal{P}_j^* f}, \widehat{V}_j)_2 = \\ &= E(f, V_j^*)_2 + \left(\sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\widehat{f}(k)|^2 |\Lambda_j(k)|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq E(f, V_j^*)_2 + \left(\sum_{k \in \mathcal{R}_j} |\widehat{f}(k)|^2 \cdot C_\mu (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^\mu \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \varepsilon_j(f) \cdot 2^{-j\mu+\mu} \|f\|_{H^\mu} + \sqrt{C_\mu} \cdot 2^{-j\mu} \|f\|_{H^\mu} \leq 2^{-j\mu} C' \|f\|_{H^\mu}, \end{aligned}$$

где $C' = 2^\mu + \sqrt{C_\mu}$. Таким образом, множество чисел $\mu \geq 0$, удовлетворяющих условию (2.27) из определения порядка аппроксимации ПКМА, и из условий теоремы совпадают, а значит совпадают и их супремумы. \square

Замечание 3. Из теоремы 5 следует, что множество неотрицательных чисел μ из определения порядка аппроксимации есть интервал $[0, \mu_0)$. Действительно, если неравенство (2.28) справедливо для некоторого $\mu_* \geq 0$, то оно будет справедливо и для всякого неотрицательного $\mu < \mu_*$ (с теми же постоянными C_{μ_*} и $J_{\mu_*} \in \mathbb{N}$). Заметим, что $\Lambda_j^2(k)$ не зависит от f и μ и, поскольку $(2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-1} = 2^{2j} (1 + |k|^2)^{-1} > 1$ при $k \in \mathcal{R}_j$, получаем

$$(2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\mu} \Lambda_j^2(k) \leq (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\mu_*} \Lambda_j^2(k) \leq C_{\mu_*}$$

для всех $j \geq J_{\mu_*}$.

Замечание 4. Все результаты данного раздела верны и для более общего случая подпространств пространства L_2 инвариантных относительно сдвига, поскольку в доказательствах не используются особенности конструкции ПКМА. Однако, для наглядности изложения нам было удобно формулировать данные результаты сразу в терминах масштабирующих функций.

2.5 Порядок аппроксимации фреймом всплесков

Перейдём к изучению аппроксимационных свойств периодических фреймов Парсевалья системы всплесков, масштабирующие функции которых удовлетворяют масштабирующему уравнению (2.5), а всплеск-функции — всплесковому уравнению (2.6). Тогда для рассматриваемой

системы всплесков верны теоремы 1-4. Далее будем использовать те же обозначения, что и в упомянутых теоремах.

Под частичной суммой разложения по системе всплесков, образующей фрейм Парсеваля, уровня $j \in \mathbb{N}$ будем понимать

$$Q_j(f) = \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \langle f, S_r^l \psi_r^m \rangle S_r^l \psi_r^m. \quad (2.29)$$

Будем говорить, что фрейм Парсеваля имеет порядок аппроксимации фреймом $\nu_0 \geq 0$, если ν_0 есть супремум таких неотрицательных чисел ν , для которых найдутся такие постоянные $C_\nu > 0$ и $J_\nu \in \mathbb{N}$, что для всякого $j \geq J_\nu$ и всех функций $f \in H^\nu$ верно неравенство

$$\|f - Q_j(f)\|_2 \leq 2^{-j\nu} C_\nu \|f\|_{H^\nu}. \quad (2.30)$$

В работе [23] для жёстких фреймов всплесков, построенных с помощью унитарного принципа расширения, были установлены необходимые и достаточные условия, при которых фрейм Парсеваля имеет заданный порядок аппроксимации. Далее мы покажем, что эти результаты можно распространить и на периодические фреймы Парсеваля, построенные с помощью критерия фреймовости. Условия в следующих утверждениях будут сформулированы в терминах фундаментальных коэффициентов.

Теорема 6. Пусть система $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$ образует фрейм Парсеваля, удовлетворяющий условиям (2.5)–(2.6). Тогда для любого $\nu \geq 0$

$$\|f - Q_j(f)\|^2 \leq \max \left\{ 2\tilde{C}_{j,1} + 4\tilde{C}_{j,2}, 2\tilde{C}_{j,3} + 4\tilde{C}_{j,4} + 2^{2\nu+1} \right\} \cdot 2^{-2j\nu} \|f\|_{H^\nu}^2, \quad (2.31)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{j,1} &= \max_{k \in \mathcal{R}_j} (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} (1 - 2^j \theta_j(k) |\hat{\varphi}_j(k)|^2)^2 \\ \tilde{C}_{j,2} &= \max_{k \in \mathcal{R}_j} 2^{2j} \theta_j^2(k) |\hat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \\ \tilde{C}_{j,3} &= \max_{k \in \mathcal{R}_j} 2^{2j} \theta_j^2(k) |\hat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2^{-2j} + |p + 2^{-j}k|^2)^{-\nu} |\hat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \\ \tilde{C}_{j,4} &= \max_{k \in \mathcal{R}_j} 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\hat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \times \\ &\quad \times \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2^{-2j} + |q + 2^{-j}k|^2)^{-\nu} |\hat{\varphi}_j(2^j q + k)|^2. \end{aligned}$$

Доказательство. Перепишем внутренние суммы в определении (2.29), используя равенство Парсеваля и свойства коэффициентов Фурье

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \langle f, S_r^l \psi_r^m \rangle \widehat{S_r^l \psi_r^m}(k) &= \sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \sum_{q \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(q) \overline{\widehat{\psi_r^m}(q)} e^{2\pi i \cdot 2^{-r} l q} \cdot \widehat{\psi_r^m}(k) e^{-2\pi i \cdot 2^{-r} l k} = \\
&= \sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathcal{R}_r} \widehat{f}(2^r p + n) \overline{\widehat{\psi_r^m}(2^r p + n)} e^{2\pi i \cdot 2^{-r} l n} \cdot \widehat{\psi_r^m}(k) e^{-2\pi i \cdot 2^{-r} l k}.
\end{aligned}$$

Последнее равенство получено заменой суммы по всем целым q на две суммы, исходя из представления $q = 2^j p + n$, где $p \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathcal{R}_j$. Так же в показателях была учтена периодичность экспонент. Далее, меняя местами порядок суммирования и складывая экспоненты, применим уравнение всплесков (2.6)

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \langle f, S_r^l \psi_r^m \rangle \widehat{S_r^l \psi_r^m}(k) &= \\
&= \sum_{p \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathcal{R}_r} \widehat{f}(2^r p + n) \left(\sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{\psi_r^m}(2^r p + n)} \widehat{\psi_r^m}(k) \right) \sum_{l \in \mathcal{R}_r} e^{2\pi i \cdot 2^{-r} l (n-k)} = \\
&= 2^r \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^r p + k) \left(\sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{\psi_r^m}(2^r p + k)} \widehat{\psi_r^m}(k) \right) = \\
&= 2^r \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^r p + k) \left(2 \sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{b_{r+1}^m}(2^r p + k)} \widehat{b_{r+1}^m}(k) \overline{\widehat{\varphi_{r+1}}(2^r p + k)} \widehat{\varphi_{r+1}}(k) \right).
\end{aligned}$$

Смена порядка суммирования оправдана абсолютной сходимостью ряда. Теперь, применяя (2.9) и (2.8) получим, что для чётных $p = 2q$

$$\sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{b_{r+1}^m}(2^{r+1}q + k)} \widehat{b_{r+1}^m}(k) = \sum_{m=1}^{\rho_r} \left| \widehat{b_{r+1}^m}(k) \right|^2 = \theta_{r+1}(k) - \theta_r(k) |\widehat{a_{r+1}}(k)|^2,$$

а для нечётных $p = 2q + 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{b_{r+1}^m}(2^{r+1}q + 2^r + k)} \widehat{b_{r+1}^m}(k) &= \\
&= \sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{b_{r+1}^m}(2^r + k)} \widehat{b_{r+1}^m}(k) = -\theta_r(k) \overline{\widehat{a_{r+1}}(2^r + k)} \widehat{a_{r+1}}(k).
\end{aligned}$$

Следовательно, из масштабирующего уравнения (2.5) имеем

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \langle f, S_r^l \psi_r^m \rangle \widehat{S_r^l \psi_r^m}(k) &= \\
&= 2^{r+1} \theta_{r+1}(k) \widehat{\varphi_{r+1}}(k) \sum_{q \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^{r+1}q + k) \overline{\widehat{\varphi_{r+1}}(2^{r+1}q + k)} - \\
&\quad - 2^r \theta_r(k) \widehat{\varphi_r}(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^r p + k) \overline{\widehat{\varphi_r}(2^r p + k)}.
\end{aligned}$$

Просуммировав эти равенства по $0 \leq r \leq j-1$, получаем телескопическую сумму справа от знака равенства, то есть

$$\begin{aligned} \widehat{Q_j(f)}(k) &= \sum_{r=0}^{j-1} \sum_{m=1}^{\rho_r} \sum_{l \in \mathcal{R}_r} \langle f, S_r^l \psi_r^m \rangle \widehat{S_r^l \psi_r^m}(k) = \\ &= 2^j \theta_j(k) \widehat{\varphi_j}(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j p + k) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j p + k)} - 2\theta_1(k) \widehat{\varphi_1}(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2p + k) \overline{\widehat{\varphi_1}(2p + k)} + \\ &+ \sum_{m=1}^{\rho_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{\psi_0^m}(n)} \widehat{\psi_0^m}(k), \end{aligned}$$

где

$$\sum_{m=1}^{\rho_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{\psi_0^m}(n)} \widehat{\psi_0^m}(k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \cdot 2 \left(\sum_{m=1}^{\rho_r} \overline{\widehat{b_1^m}(n)} \widehat{b_1^m}(k) \right) \overline{\widehat{\varphi_1}(n)} \widehat{\varphi_1}(k).$$

Принимая во внимание, что $\widehat{b_1^m} \in \mathcal{S}(2)$, по определению θ_1 , θ_0 и условию (2.8) для $j = 0$, получаем, что сумма в скобках равна нулю, если n и k имеют различную чётность и равна $\theta_1(k)$, если их чётности совпадают. Тогда

$$\sum_{m=1}^{\rho_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) \overline{\widehat{\psi_0^m}(n)} \widehat{\psi_0^m}(k) = 2\theta_1(k) \widehat{\varphi_1}(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2p + k) \overline{\widehat{\varphi_1}(2p + k)}.$$

Следовательно,

$$\widehat{Q_j(f)}(k) = 2^j \theta_j(k) \widehat{\varphi_j}(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j p + k) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j p + k)}. \quad (2.32)$$

Теперь, следуя идее доказательства в [23], для $\nu > 0$ и $f \in H^\nu$, оценим разность

$$\|f - Q_j(f)\|_2^2 = \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left| \widehat{Q_j(f)}(k) - \widehat{f}(k) \right|^2 + \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \widehat{Q_j(f)}(2^j p + k) - \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2. \quad (2.33)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \widehat{Q_j(f)}(k) - \widehat{f}(k) &= (2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi_j}(k)|^2 - 1) \widehat{f}(k) + 2^j \theta_j(k) \widehat{\varphi_j}(k) \times \\ &\times \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{f}(2^j p + k) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j p + k)}, \end{aligned}$$

для первой суммы в (2.33) получаем, что

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left| \widehat{Q_j(f)}(k) - \widehat{f}(k) \right|^2 &\leq 2 \sum_{k \in \mathcal{R}_j} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi_j}(k)|^2)^2 \left| \widehat{f}(k) \right|^2 + \\ &+ 2 \cdot 2^{2j} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi_j}(k)|^2 \cdot \left| \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{f}(2^j p + k) \overline{\widehat{\varphi_j}(2^j p + k)} \right|^2. \end{aligned}$$

Умножая и деля каждый k -ый коэффициент Фурье функции f в первой сумме на $2^{2j\nu}(1 + |k|^2)^\nu$ и каждый $(2^j p + k)$ -ый коэффициент Фурье функции f на $(1 + |2^j p + k|^2)^\nu$ во второй сумме, где $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k \in \mathcal{R}_j$, получаем для первой суммы

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathcal{R}_j} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2)^2 \left| \widehat{f}(k) \right|^2 = \\ & = \sum_{k \in \mathcal{R}_j} (2^{-2j} + |2^{-j} k|^2)^{-\nu} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2)^2 2^{-2j\nu} (1 + k^2)^\nu \left| \widehat{f}(k) \right|^2 \leq \\ & \leq \widetilde{C}_{j,1} \cdot 2^{-2j\nu} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} (1 + k^2)^\nu \left| \widehat{f}(k) \right|^2, \end{aligned}$$

а для второй суммы с помощью неравенство Коши-Буняковского-Шварца приходим к оценке

$$\begin{aligned} & 2^{2j} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot \left| \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{f}(2^j p + k) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)} \right|^2 \leq \\ & \leq 2^{2j} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot \left(\sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 + |2^j p + k|^2)^\nu |\widehat{f}(2^j p + k)|^2 \right) \times \\ & \times \left(2^{-2j\nu} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2^{-2j} + |p + 2^{-j} k|^2)^{-\nu} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \right) \leq \\ & \leq \widetilde{C}_{j,3} \cdot 2^{-2j\nu} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 + |2^j p + k|^2)^\nu |\widehat{f}(2^j p + k)|^2. \end{aligned}$$

Теперь, используя (2.32) для двойной суммы в правой части равенства (2.33), аналогичным образом получаем, что

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \widehat{Q_j(f)}(2^j p + k) - \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2 = \\ & = \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| 2^j \theta_j(k) \widehat{\varphi}_j(2^j p + k) \sum_{q \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j q + k) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j q + k)} - \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2 \leq \\ & \leq 2 \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2 + 2 \cdot \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} 2^{2j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \times \\ & \times \left| \sum_{q \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j q + k) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j q + k)} \right|^2 \leq 2 \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2 + \\ & + 4 \cdot 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left| \widehat{f}(k) \right|^2 |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 + \\ & + 4 \cdot 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \right) \left| \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{f}(2^j q + k) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j q + k)} \right|^2 \end{aligned} \quad (2.34)$$

Заметим, что $(1 + |2^j q + k|^2)^{-\nu} \leq 2^{2\nu}$ для всех $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k \in \mathcal{R}_j$. Тогда вновь, умножая и деля каждый коэффициент Фурье f на $2^{2j\nu}(1 + |k|^2)^\nu$ для k -го коэффициента, $k \in \mathcal{R}_j$, и на $(1 + |2^j p + k|^2)^\nu$ для $(2^j p + k)$ -го коэффициента, $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $k \in \mathcal{R}_j$, получаем следующие оценки. Для первой суммы справа от знака равенства в (2.34)

$$\sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2 \leq 2^{2\nu} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 + |2^j p + k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(2^j p + k) \right|^2$$

Для второй суммы справа от знака равенства в (2.34)

$$\begin{aligned} & 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left| \widehat{f}(k) \right|^2 |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 = \\ & = 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} 2^{-2j\nu} (1 + |k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(k) \right|^2 (2^{-2j} + |2^{-j} k|^2)^{-\nu} |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \times \\ & \times \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \leq \tilde{C}_{j,2} \cdot 2^{-2j\nu} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} (1 + |k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(k) \right|^2 \end{aligned}$$

Наконец, используя неравенство Коши-Буняковского-Шварца для последней оставшейся суммы в правой части (2.34), имеем

$$\begin{aligned} & 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \right) \left| \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \widehat{f}(2^j q + k) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j q + k)} \right|^2 \leq \\ & \leq 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \left(\sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \right) \times \\ & \times \left(2^{-2j\nu} \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2^{-2j} + |p + 2^{-j} k|^2)^{-\nu} |\widehat{\varphi}_j(2^j q + k)|^2 \right) \times \\ & \times \left(\sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 + |2^j q + k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(2^j q + k) \right|^2 \right)^2 \leq \\ & \leq \tilde{C}_{j,4} \cdot 2^{-2j\nu} \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 + |2^j q + k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(2^j q + k) \right|^2 \end{aligned}$$

Складывая все полученные неравенства приходим к искомой оценке

$$\begin{aligned} \|f - Q_j(f)\|_2^2 & \leq 2^{-2j\nu} \left(2\tilde{C}_{j,1} + 4\tilde{C}_{j,2} \right) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} (1 + |k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(k) \right|^2 + \\ & + 2^{-2j\nu} \left(2^{1+2\nu} + 2\tilde{C}_{j,3} + 4\tilde{C}_{j,4} \right) \sum_{k \in \mathcal{R}_j} \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 + |2^j q + k|^2)^\nu \left| \widehat{f}(2^j q + k) \right|^2 \leq \\ & \leq \max \left\{ 2\tilde{C}_{j,1} + 4\tilde{C}_{j,2}, 2\tilde{C}_{j,3} + 4\tilde{C}_{j,4} + 2^{2\nu+1} \right\} \cdot 2^{-2j\nu} \|f\|_{H^\nu}^2. \end{aligned}$$

Теорема 7. Фрейм Парсевалья $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$, удовлетворяющий условиям (2.5)–(2.6), имеет порядок аппроксимации фреймом $\nu_0 \geq 0$ тогда и только тогда, когда ν_0 есть супремум таких неотрицательных чисел ν , для которых найдутся такие постоянные $C_\nu > 0$ и $J_\nu \in \mathbb{N}$, что

$$\max \left\{ \tilde{C}_{j,1}, \tilde{C}_{j,2} \right\} \leq C_\nu, \quad \text{для всех } j \geq J_\nu. \quad (2.35)$$

Доказательство. Покажем, что для выполнения условия (2.30) для некоторого $\nu \geq 0$ необходимо и достаточно выполнение условия (2.35) теоремы для этого ν . Тогда множества чисел ν из условия теоремы и ν из определения порядка аппроксимации фреймом совпадут, а значит, совпадут и их супреумы. Далее в доказательстве индексы u постоянных C_ν и J_ν для упрощения будем опускать, подразумевая, что они зависят только от ν . Начнём с доказательства необходимости. Пусть

$$\|f - Q_j(f)\|_2 \leq 2^{-j\nu} C \|f\|_{H^\nu},$$

для $j \geq J$ и некоторых фиксированных констант J, C и $\nu \geq 0$. Зафиксируем $j \geq J$ и $k \in \mathcal{R}_j$ и рассмотрим $f \in H^\nu$ такое, что $\widehat{f}(n) = \delta_{kn}$. Тогда для всех $n \in \mathcal{R}_j, p \in \mathbb{Z}$ из равенства (2.32) следует, что

$$\begin{aligned} \widehat{Q_j(f)}(n + 2^j p) &= 2^j \theta_j(n) \widehat{\varphi}_j(n + 2^j p) \sum_{q \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^j q + n) \overline{\widehat{\varphi}_j(2^j q + n)} = \\ &= 2^j \theta_j(n) \widehat{\varphi}_j(n + 2^j p) \overline{\widehat{\varphi}_j(n)} \delta_{kn}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \|f - Q_j(f)\|_2^2 &= \sum_{n \in \mathcal{R}_j} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{f}(2^j p + n) - 2^j \theta_j(n) \widehat{\varphi}_j(n + 2^j p) \overline{\widehat{\varphi}_j(n)} \delta_{kn} \right|^2 = \\ &= (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2)^2 + 2^{2j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(k + 2^j p)|^2. \end{aligned}$$

Поскольку $\|f\|_{H^\nu}^2 = (1 + |k|^2)^\nu$, то

$$\begin{aligned} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2)^2 + 2^{2j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(k + 2^j p)|^2 &\leq \\ &\leq C \cdot 2^{-2j\nu} (1 + |k|^2)^\nu. \end{aligned}$$

Тогда и каждое слагаемое не превосходит $C \cdot 2^{-2j\nu} (1 + |k|^2)^\nu$. Для завершения доказательства неравенства (2.35) осталось обратиться к определениям $\tilde{C}_{j,1}$ и $\tilde{C}_{j,2}$.

Перейдём к доказательству достаточности. Для этого будет достаточно показать, что

$$2^j \theta_j(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \leq 1, \quad \text{для всех } k \in \mathcal{R}_j. \quad (2.36)$$

Действительно, если справедливо неравенство (2.36), то в частности, $2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \leq 1$ и, учитывая что $(2^{-2j} + |p + 2^{-j}k|^2)^{-\nu} \leq 2^{2\nu}$ для $\nu \geq 0$, получаем

$$\begin{aligned} & 2^{2j} \theta_j^2(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2^{-2j} + |p + 2^{-j}k|^2)^{-\nu} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \leq \\ & \leq 2^{2\nu} (2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2) \cdot \left(2^j \theta_j(k) \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \right) \leq 2^{2\nu} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & 2^{2j} \theta_j^2(k) \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \sum_{q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (2^{-2j} + |q + 2^{-j}k|^2)^{-\nu} |\widehat{\varphi}_j(2^j q + k)|^2 \leq \\ & \leq 2^{2\nu} \left(2^j \theta_j(k) \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \right) \leq 2^{2\nu}. \end{aligned}$$

Поэтому величины $\tilde{C}_{j,3}$ и $\tilde{C}_{j,4}$ из неравенства (2.31) не превосходят $2^{2\nu}$ и, следовательно, по теореме 6

$$\|f - Q_j(f)\|_2^2 \leq \max \left\{ 2\tilde{C}_{j,1} + 4\tilde{C}_{j,2}, 7 \cdot 2^{2\nu} \right\} \cdot 2^{-2j\nu} \|f\|_{H^\nu}^2,$$

для $f \in H^\nu$, $j \geq J$.

Вернёмся к доказательству неравенства (2.36). Зафиксируем $j \geq J$ и $k \in \mathcal{R}_j$. Из (2.9) и определений индексов j_0 и j_1 из условий (II) и (III) теоремы 4, получаем, что

$$\widehat{\varphi}_j(k) = 0 \text{ для } j \leq j_0 \quad \text{и} \quad \theta_j(k) = 0 \text{ для } j_0 < j \leq j_1 - 1.$$

Так как для каждого $r \geq j_1$ коэффициенты $\widehat{a}_r(k) \neq 0$, разделив обе части равенства из условия (II) теоремы 4 на $2^{j-j_1} \prod_{r=j_1+1}^j |\widehat{a}_r(k)|^2$ и применяя масштабирующее уравнение (2.5), получаем

$$2^j |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 = \left(\sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} |\widehat{b}_{j_1}^m(k)|^2 \right)^{-1} \prod_{r=j_1+1}^j \frac{|\tilde{a}_r(k)|^2}{|\widehat{a}_r(k)|^2} \prod_{r=j+1}^{\infty} |\tilde{a}_r(k)|^2.$$

Условия (2.9) и (III) из теоремы 4 влекут $\theta_{j_1}(k) = \sum_{m=1}^{\rho_{j_1-1}} |\widehat{b}_{j_1}^m(k)|^2$, откуда так же следует, что $\theta_j(k) \neq 0$ для $j \geq j_1$. В то же время (2.18) приводит к

$$\prod_{r=j_1+1}^j \frac{|\tilde{a}_r(k)|^2}{|\widehat{a}_r(k)|^2} = \prod_{r=j_1+1}^j \frac{\theta_{r-1}(k)}{\theta_r(k)} = \frac{\theta_{j_1}(k)}{\theta_j(k)}.$$

Следовательно,

$$2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 = \prod_{r=j+1}^{\infty} |\tilde{a}_r(k)|^2, \quad \text{for } j \geq j_1. \quad (2.37)$$

Теперь, выражая $\widehat{a}_j(k)$ и $\widehat{b}_j^m(k)$ через коэффициенты $\tilde{a}_j(k)$, $\tilde{b}_j^m(k)$ и $\theta_j(k)$ из (2.18) и подставляя

их в (2.9) и (2.8), получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \overline{\tilde{a}_j(k)}\tilde{a}_j(k+2^{j-1}) + \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} \overline{\tilde{b}_j^m(k)}\tilde{b}_j^m(k+2^{j-1}) = 0, \\ \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} |\tilde{b}_j^m(k)|^2 + |\tilde{a}_j(k)|^2 = 1, \\ \sum_{m=1}^{\rho_{j-1}} |\tilde{b}_j^m(k+2^{j-1})|^2 + |\tilde{a}_j(k+2^{j-1})|^2 = 1. \end{cases}$$

Обозначим

$$M_j(k) = \begin{pmatrix} \tilde{b}_j^1(k) & \tilde{b}_j^1(k+2^{j-1}) \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{b}_j^{\rho_{j-1}}(k) & \tilde{b}_j^{\rho_{j-1}}(k+2^{j-1}) \end{pmatrix}$$

и перепишем систему в матричном виде

$$M_j(k)^* M_j(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{\tilde{a}_j(k)} \\ \tilde{a}_j(k+2^{j-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a}_j(k) & \tilde{a}_j(k+2^{j-1}) \end{pmatrix},$$

где $M_j(k)^*$ обозначает эрмитово сопряжение матрицы $M_j(k)$. Ясно, что определитель матрицы в левой части равенства неотрицателен, а определитель матрицы в правой части равенства равен $1 - |\tilde{a}_j(k)|^2 - |\tilde{a}_j(k+2^{j-1})|^2$, поэтому,

$$|\tilde{a}_j(k)|^2 + |\tilde{a}_j(k+2^{j-1})|^2 \leq 1. \quad (2.38)$$

Далее, следуя идеям из [23] и [28], рассмотрим

$$2^j \theta_j(k) \sum_{p=-M}^M |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{p=-M}^M \prod_{r=j+1}^N |\tilde{a}_r(2^j p + k)|^2.$$

Заметим, что для достаточно больших N выполняется неравенство $2^{N-j} \geq 2M + 1$, поэтому

$$\sum_{p=-M}^M \prod_{r=j+1}^N |\tilde{a}_r(2^j p + k)|^2 \leq \sum_{p=-M}^{2^{N-j}-1-M} \prod_{r=j+1}^N |\tilde{a}_r(2^j p + k)|^2$$

Воспользуемся 2^{j+1} -периодичностью последовательности $\tilde{a}_{j+1}(\cdot)$ и разделим сумму на две суммы — по чётным и по нечётным индексам. Тогда

$$\begin{aligned}
L_1(0) &= \sum_{p=-M}^{2^{N-j-1}-M} \prod_{r=j+1}^N |\tilde{a}_r(2^j p + k)|^2 = \sum_{s=0}^{2^{N-j-1}} \prod_{r=j+1}^N |\tilde{a}_r(2^j s + k - 2^j M)|^2 = \\
&= |\tilde{a}_{j+1}(k - 2^j M)|^2 \left(\sum_{s=0}^{2^{N-j-1}-1} \prod_{r=j+2}^N |\tilde{a}_r(2^{j+1} s + k - 2^j M)|^2 \right) + \\
&+ |\tilde{a}_{j+1}(2^j + k - 2^j M)|^2 \left(\sum_{s=0}^{2^{N-j-1}-1} \prod_{r=j+2}^N |\tilde{a}_r(2^{j+1} s + 2^j + k - 2^j M)|^2 \right) = \\
&= |\tilde{a}_{j+1}(k - 2^j M)|^2 L_2(0) + |\tilde{a}_{j+1}(2^j + k - 2^j M)|^2 L_2(1),
\end{aligned}$$

где $L_2(0)$ и $L_2(1)$ сокращённые обозначения соответствующих выражений в скобках. Пользуясь 2^r -периодичностью последовательности $\tilde{a}_r(\cdot)$ для $r = j+2, \dots, N-j-1$ будем повторять разбиения сумм на суммы по чётным и по нечётным индексам. Обозначая получающиеся в скобках суммы через $L_n(l)$, приходим к выражению

$$\begin{aligned}
L_n(l) &= |\tilde{a}_{j+n}(2^j l + k - 2^j M)|^2 \left(\sum_{s=0}^{2^{N-j-n}-1} \prod_{r=j+n+1}^N |\tilde{a}_r(2^{j+n} s + 2^j l + k - 2^j M)|^2 \right) + \\
&+ |\tilde{a}_{j+n}(2^j l + 2^{n+j-1} + k - 2^j M)|^2 \times \\
&\times \left(\sum_{s=0}^{2^{N-j-n}-1} \prod_{r=j+n+1}^N |\tilde{a}_r(2^{j+n} s + 2^{n+j-1} + 2^j + k - 2^j M)|^2 \right),
\end{aligned}$$

где $n = 1, 2, \dots, N-j-1$, $l = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$. На $N-j-1$ -ом шаге мы получаем равенство

$$\begin{aligned}
L_{N-j-1}(l) &= |\tilde{a}_{N-1}(2^j l + k - 2^j M)|^2 \left(\sum_{s=0}^1 |\tilde{a}_N(2^{N-1} s + 2^j l + k - 2^j M)|^2 \right) + \\
&+ |\tilde{a}_{N-1}(2^j l + 2^{N-2} + k - 2^j M)|^2 \left(\sum_{s=0}^1 |\tilde{a}_N(2^{N-1} s + 2^{N-2} + 2^j l + k - 2^j M)|^2 \right).
\end{aligned}$$

Из (2.38) следует, что

$$\sum_{s=0}^1 |\tilde{a}_N(2^{N-1} s + \cdot)|^2 = |\tilde{a}_N(\cdot)|^2 + |\tilde{a}_N(2^{N-1} + \cdot)|^2 \leq 1.$$

Ещё раз используем (2.38),

$$L_{N-j-1}(l) \leq |\tilde{a}_{N-1}(2^j l + k - 2^j M)|^2 + |\tilde{a}_{N-1}(2^j l + 2^{N-2} + k - 2^j M)|^2 \leq 1.$$

Тогда по рекурсии получаем, что для каждого $n \leq N-j-1$ и $l = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ сумма

$L_n(l)$ не превосходит 1. Поэтому

$$\sum_{p=-M}^M \prod_{r=j+1}^N |\tilde{a}_r(2^j p + k)|^2 \leq L_1(0) \leq 1.$$

Таким образом, (2.36) доказано, что завершает доказательство теоремы. \square

Перейдём к обсуждению взаимосвязи между порядком аппроксимации фреймом и порядком аппроксимации соответствующим ему ПКМА.

Замечание 5. В предложении 3.1. и теореме 3.1. статьи [25] доказано, что первая аксиома ПКМА $V_j \subseteq V_{j+1}$ для всех $j \in \mathbb{Z}_+$ равносильна тому, что для масштабирующих функций, порождающих ПКМА, выполнено масштабирующее уравнение (2.5), а плотность объединения пространств V_j в L_2 равносильна тому, что множество $\{n \in \mathbb{Z} : \widehat{\varphi}_j(n) = 0 \text{ для всех } j \in \mathbb{Z}_+\}$ пусто. Последнее условие эквивалентно выполнению условия $\{j : \widehat{\varphi}_j(n) \neq 0\} \neq \emptyset$ при всех $n \in \mathbb{Z}$, которое следует из усорвия (I) теоремы 4. Таким образом, для фрейма Парсевалля, удовлетворяющего условиям (2.5)–(2.6), подпространства, порождённые $2^{-j}k$ -сдвигами функций φ_j образуют ПКМА.

Теорема 8. Фрейм Парсевалля $\{S_j^k \psi_j^m : j \in \mathbb{Z}_+, m = 1, 2, \dots, \rho_j, k \in \mathcal{R}_j\}$, удовлетворяющий условиям (2.5)–(2.6), имеет порядок аппроксимации фреймом $\nu_0 = \min\{\mu_0, \gamma_0\}$, где $\mu_0 \geq 0$ — порядок аппроксимации соответствующим ПКМА и $\gamma_0 \geq 0$ есть супремум неотрицательных чисел γ , для которых найдутся такие постоянные $C_\gamma > 0$ и $J_\gamma \in \mathbb{N}$, что

$$\max_{k \in \mathcal{R}_j} (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\gamma} (1 - 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2)^2 \leq C_\gamma, \quad j \geq J_\gamma. \quad (2.39)$$

Доказательство. Согласно теореме 7 достаточно показать, что неравенство (2.35) выполнено для всех $\nu = \nu(\mu, \gamma) = \min\{\mu, \gamma\}$ и только для них, где μ — неотрицательное число, для которого выполнено условие (2.27) из определения порядка аппроксимации ПКМА, а γ из условия теоремы. Заметим, что если неравенство (2.35) выполняется для некоторого неотрицательного ν_* , то оно остаётся верным и для всякого неотрицательного числа ν , меньшего ν_* , поскольку $2^{2j}(1 + |k|^2)^{-1} > 1$ для всех $k \in \mathcal{R}_j$. Аналогично для неравенства (2.39), то есть множество неотрицательных чисел γ , для которых выполнено условие теоремы (2.39), образует промежуток на положительной полуоси. Тогда из (2.39) следует, что для выбранного ν имеет место оценка $\tilde{C}_{j,1} \leq C_\gamma$, так как $\nu \leq \gamma$. Теперь рассмотрим $\tilde{C}_{j,2}$ для данного ν . Неравенство (4.24) и определение Λ_j дают следующую оценку.

$$\begin{aligned}
& 2^{2j}\theta_j^2(k)|\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} \sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 = \\
& = 2^j \theta_j(k) |\widehat{\varphi}_j(k)|^2 \cdot 2^j \theta_j(k) \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2 \cdot (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} \times \\
& \times \frac{\sum_{p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2}{\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}_j(2^j p + k)|^2} \leq 1 \cdot 1 \cdot (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\nu} \cdot \Lambda_j^2(k) \\
& \leq (2^{-2j} + |2^{-j}k|^2)^{-\mu} \cdot \Lambda_j^2(k) \leq C_\mu
\end{aligned}$$

где C_μ есть константа из определения порядка аппроксимации ПКМА. Следовательно, условие (2.35) выполнено для всех $\nu = \min\{\mu, \gamma\}$ с постоянной $C = \max\{C_\gamma, C_\mu\}$. Учитывая, что множество неотрицательных чисел μ , для которых выполнено условие (2.27), образует интервал $[0, \mu_0)$ (см. замечание 3), а множество положительных чисел γ из условия теоремы, как было отмечено выше, также образуют интервал $[0, \gamma_0)$, то либо $(0, \mu_0) \subseteq (0, \gamma_0)$, либо $(0, \gamma_0) \subseteq (0, \mu_0)$. Тогда неравенство (2.35) выполняется только для чисел $\nu = \min\{\mu, \gamma\}$. Следовательно, порядок аппроксимации фреймом $\nu_0 = \sup \nu = \min\{\mu_0, \gamma_0\}$. \square

Замечание 6. Из условий (2.37) и (II) теоремы 4 следует, что неравенство (2.39) принимает вид

$$\max_{k \in \mathcal{R}_j} 2^{2j\gamma} (1 + |k|^2)^{-\gamma} \left(1 - \frac{2^{j_1} \sum_{m=1}^{\rho_{j_1}-1} |\widehat{b}_{j_1}^m(k)|^2 |\widehat{\varphi}_{j_1}(k)|^2}{\prod_{r=j_1+1}^j |\tilde{a}_r(k)|^2} \right)^2 \leq C_\gamma.$$

Можно заметить, что порядок аппроксимации зависит от скорости сходимости бесконечного произведения в условии (II) теоремы 4. Эта скорость в свою очередь зависит от вспомогательных коэффициентов (2.11), которые можно выбрать практически произвольно, см. (2.13). Таким образом, теоремы 5, 7 и 8 дают конструктивный способ построения фреймов Парсеваля с требуемым порядком аппроксимации.

Глава 3

Аппроксимационные свойства систем диадических всплесков в пространствах Лебега

3.1 Введение

В данной главе изучаются аппроксимационные свойства диадических фреймов всплесков, заданных на положительной полупрямой с операцией двоичного сложения. Рассматриваемые системы всплесков строятся с помощью унитарного принципа расширения (см. [40] и [22]) в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$. Получены условия для сходимости разложений по фрейму всплесков к приближаемой функции почти везде и по норме пространств $L^p(\mathbb{R}_+)$, $p \in (1, \infty)$.

При $p = 2$ сходимость частичных сумм разложения по системе всплесков к приближаемой функции эквивалентна тому, что система всплесков образует фрейм Парсевала. Для вещественного случая это хорошо известный факт (см., например, [11, предложение 1.8.2]). Для диадического случая доказательство содержится в статье [42], где фреймы всплесков и сходимость при $p = 2$ изучается для пространств M -положительных векторов, и группа Кантора является частным случаем этого пространства. Также в [42] в качестве масштабирующих функций рассматриваются только тест-функции. Это функции, которые наряду со своим преобразованием Фурье являются кусочно постоянными и имеют компактный носитель. В данной главе изучается сходимость частичных сумм разложения по системе всплесков при всех $p \in [1, \infty)$. Также мы рассматриваем более широкий класс функций, а именно функции только с компактным носителем.

Все результаты, полученные в данной главе, могут быть записаны для функций, определенных на локально компактной группе Кантора, снабженной мерой Хаара, либо непосредственно в терминах группы, либо для реализации группы в виде модифицированной полупрямой $[0, +\infty)^*$ с раздвоенными положительными двоично-рациональными точками (см. [1, 4]). Для упрощения обозначений был выбран язык полупрямой с операцией двоичного сложения.

Результаты главы опубликованы в [6].

3.2 Построение диадических систем всплесков

Представим $x \in \mathbb{R}_+$ с помощью двоичного разложения

$$x = \sum_{k<0} x_k 2^{-k-1} + \sum_{k>0} x_k 2^{-k},$$

в котором цифры $x_k, x_{-k}, k \in \mathbb{N}$, определяются равенствами

$$x_k = [2^k x](\text{mod } 2), \quad x_{-k} = [2^{1-k} x](\text{mod } 2).$$

Зададим операцию двоичного сложения для $x, y \in \mathbb{R}_+$

$$x \oplus y = \sum_{k<0} |x_k - y_k| 2^{-k-1} + \sum_{k>0} |x_k - y_k| 2^{-k}$$

и положим $x \ominus y = x \oplus y$. Для $x, t \in \mathbb{R}_+$ определим функцию

$$\chi(x, t) := (-1)^{\sum_{k \in \mathbb{N}} (x_k t_{-k} + x_{-k} t_k)},$$

при $j \in \mathbb{Z}_+$ приходим к функциям Уолша $w_j(x) := \chi(x, j)$. Эти функции являются аналогом характеров на группе Кантора. Их основные свойства изложены в монографии [4].

Мера Лебега на \mathbb{R}_+ оказывается инвариантной относительно двоичного сдвига, а пространства $\tilde{L}^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$, совпадают с одноименными пространствами на обычной полупрямой. Поэтому в дальнейшем волну над $L^p(\mathbb{R}_+)$ будем опускать. Обозначим $L_c^p(\mathbb{R}_+)$ множество функций с компактным носителем из $L^p(\mathbb{R}_+)$. В этой главе под 1-периодической функцией понимается функция f , для которой $f(x \oplus h) = f(x)$ для любого $h \in \mathbb{Z}_+$, а символом \tilde{L}^p будем обозначать множество 1-периодических функций, сужение которых на $[0, 1)$ принадлежит $L^p[0, 1)$.

Коэффициенты Фурье функции $f \in \tilde{L}_1$ определяются как

$$\hat{f}(k) = \int_0^1 f(x) w_k(x) dx.$$

Система $w_k, k \in \mathbb{Z}_+$, образует ортонормированный базис \tilde{L}_2 и для любой функции $f \in \tilde{L}_2$ имеет место разложение

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) w_k(x).$$

Преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ определяется как

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+} f(x) \chi(x, \xi) dx$$

и стандартно продолжается на $L^2(\mathbb{R}_+)$.

Определим для функции $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ систему сжатий и сдвигов следующим образом

$$f_{j,k}(x) := 2^{j/2} f(2^j x \oplus k), \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad j \in \mathbb{Z}_+, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

Зафиксируем $r \in \mathbb{N}$. Система

$$\Psi := \{\psi_{j,k}^{(\nu)} : \nu = 1, \dots, r, j \in \mathbb{Z}_+, k \in \mathbb{Z}_+\} \quad (3.1)$$

называется системой всплесков, порожденной набором всплеск-функций $\psi^{(\nu)} \in L^2(\mathbb{R}_+)$, $\nu = 1, \dots, r$. Говорят, что система Ψ образует фрейм Парсеваля в $L^2(\mathbb{R}_+)$, если

$$\sum_{\nu=1}^r \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} |\langle f, \psi_{j,k}^{(\nu)} \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

Системы всплесков и, в частности, фреймов всплесков строятся с помощью вспомогательной функции φ , называемой масштабирующей. Она удовлетворяет масштабирующему уравнению

$$\varphi(x) = \sum_k b_k^{(0)} \varphi_{1,k}(x), \quad (3.2)$$

где

$$m_0(\xi) = 2^{-1/2} \sum_k b_k^{(0)} w_k(\xi) \in \tilde{L}_2.$$

Функция m_0 называется масштабирующей маской. В дальнейшем мы будем изучать масштабирующие функции и всплески только с компактным носителем. Известно, что компактность носителя масштабирующей функции равносильна тому, что только конечное количество коэффициентов маски отличны от нуля, при этом

$$\text{supp } \varphi \subset [0, 2^n) \Leftrightarrow m_0(\xi) = 2^{-1/2} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} b_k^{(0)} w_k(\xi).$$

Интересно отметить, что на вещественной прямой без дополнительных предположений верна только достаточность. Необходимость доказана в статье [22, Предложение 1] (о связи размера носителя и порядка полинома см. также [4, параграф 6.2]) для группы Виленкина и доказательство этого факта для нашего случая полупрямой с диадической операцией сложения будет отличаться только обозначениями, поэтому мы его не приводим.

Система всплесков строится с помощью унитарного принципа расширения (для диадических функций см. [40], [22]). Принцип состоит в том, что мы подбираем полиномы Уолша $m_\nu(t) = 2^{-1/2} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} b_k^{(\nu)} w_k(t)$, $\nu = 1, \dots, r$, так, чтобы строки матрицы

$$\begin{pmatrix} m_0(t) & \dots & m_r(t) \\ m_0(t \oplus 1/2) & \dots & m_r(t \oplus 1/2) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

были ортонормированы. Тогда если $\widehat{\varphi}(0) = 1$, то функции

$$\psi^{(\nu)}(x) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2^{n+1}-1} b_k^{(\nu)} \varphi_{1,k}(x), \quad \nu = 1, \dots, r, \quad (3.4)$$

порождают фрейм Парсеваля всплесков. Хорошо известно [22, Алгоритм А], что условия

$$m_0(0) = 1, \quad |m_0(t)|^2 + |m_0(t \oplus 1/2)|^2 \leq 1$$

необходимы и достаточны для существования полиномов m_ν , $\nu = 1, \dots, r$. При этом построенные всплеск-функции и масштабирующая функция имеют компактные носители и принадлежат $L^2(\mathbb{R}_+)$, см. [22, теорема 11]. Отметим также, что при сделанных предположениях масштабирующая функция удовлетворяет свойству разбиения единицы [13, теорема 1]

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi(x \oplus k) = \widehat{\varphi}(0) = 1 \text{ для п.в. } x \in \mathbb{R}_+. \quad (3.5)$$

В данной главе мы изучаем сходимость частичных сумм

$$Q_{n,j}f = \sum_{i=n}^{j-1} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \psi_{i,k}^{(\nu)} \rangle \psi_{i,k}^{(\nu)}$$

к функции f при $j \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow -\infty$ в пространствах $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$, и почти везде. Поскольку функция φ почти везде конечна, будем считать ее определенной и конечной на \mathbb{R}_+ , при необходимости переопределив ее значения на множестве меры нуль.

Для изучения сходимости частичных сумм $Q_{n,j}$ прежде всего заметим, что, как и в вещественном случае, верно тождество, известное как свойство точного восстановления (perfect reconstruction property)

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \varphi_{j',k} \rangle \varphi_{j',k}(x) - \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}(x) = \sum_{i=j}^{j'-1} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \psi_{i,k}^{(\nu)} \rangle \psi_{i,k}^{(\nu)}(x). \quad (3.6)$$

Схема доказательства повторяет вещественный случай, см. [33, лемма 4.3.1], и будет приведена в лемме 1 только для полноты изложения. Таким образом, вопрос о сходимости сумм $Q_{n,j}f$ сводится к изучению поведения сумм

$$P_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k},$$

так как из тождества (3.6) ясно, что $Q_{n,j}f$ сходится к f при $j \rightarrow +\infty$ и $n \rightarrow -\infty$ тогда и только тогда, когда $P_j f$ сходится к f при $j \rightarrow +\infty$ и $P_n f$ сходится к 0 при $n \rightarrow -\infty$.

Лемма 1. Пусть $\varphi \in L_c^q(\mathbb{R}_+)$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, где $1/p + 1/q = 1$, тогда для каждого $x \in \mathbb{R}_+$ верно равенство (3.6).

Доказательство. Так как φ и $\psi_{i,k}^{(\nu)}$ имеют компактные носители, то для фиксированного аргумента в суммах только конечное количество отличных от нуля слагаемых. Достаточно проверить равенство для случая $j' = j + 1$,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \varphi_{j+1,k} \rangle \varphi_{j+1,k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \varphi_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} + \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \psi_{j,k}^{(\nu)} \rangle \psi_{j,k}^{(\nu)}. \quad (3.7)$$

Из (3.4) и (3.2) следует

$$\varphi_{j,k} = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} b_{l \oplus 2k}^{(0)} \varphi_{j+1,l}, \quad \psi_{j,k}^{(\nu)} = \sqrt{2} \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} b_{l \oplus 2k}^{(\nu)} \varphi_{j+1,l}.$$

Подставляя эти равенства в правую часть (3.7), получим

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\langle f, \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} b_{n \oplus 2k}^{(0)} \varphi_{j+1,n} \right\rangle \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} b_{l \oplus 2k}^{(0)} \varphi_{j+1,l} + \\ & + \sqrt{2} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\langle f, \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} b_{n \oplus 2k}^{(\nu)} \varphi_{j+1,n} \right\rangle \sum_{l \in \mathbb{Z}_+} b_{l \oplus 2k}^{(\nu)} \varphi_{j+1,l}. \end{aligned}$$

В последнем выражении коэффициент при $\varphi_{j+1,l}$ имеет вид

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(2 \sum_{\nu=0}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} b_{l \oplus 2k}^{(\nu)} \overline{b_{n \oplus 2k}^{(\nu)}} \right) \langle f, \varphi_{j+1,n} \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \delta_{n,l} \langle f, \varphi_{j+1,n} \rangle = \langle f, \varphi_{j+1,l} \rangle,$$

причем равенство

$$2 \sum_{\nu=0}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} b_{l \oplus 2k}^{(\nu)} \overline{b_{n \oplus 2k}^{(\nu)}} = \delta_{n,l}$$

следует из ортонормированности строк матрицы (3.3). Таким образом, тождество (3.7), а вместе с ним и лемма 1 доказаны. \square

В дальнейшем мы изучаем сходимость последовательности $P_j f$ при $j \rightarrow +\infty$ и $j \rightarrow -\infty$. Наша ближайшая цель — получить интегральное представление для $P_j f$. Для этого рассмотрим ядро данного представления

$$K_j(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \varphi_{j,k}(x) \overline{\varphi_{j,k}(y)} = 2^j K_0(2^j x, 2^j y).$$

Обозначим

$$\Phi(x, y) := \sum_{k=0}^{2^n-1} \varphi(x \oplus k) \overline{\varphi(y \oplus k)}. \quad (3.8)$$

Тогда

$$K_0(x, y) = \sum_{r \in \mathbb{Z}_+} \Phi(x \oplus r2^n, y \oplus r2^n).$$

Из $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^n)$ следует, что $\text{supp } \Phi \subset [0, 2^n)^2$, и в последней сумме носители слагаемых – это дизъюнктные квадраты $[r2^n, (r+1)2^n)^2$. Поэтому если $x \in [r02^n, (r_0 + 1)2^n)$, то

$$K_0(x, y) = \Phi(x \oplus r_0 2^n, y \oplus r_0 2^n).$$

Для дальнейшего изложения нам удобно ввести функции

$$r_0(x) := \lfloor x/2^n \rfloor \quad \text{и} \quad c(x) := x \oplus r_0(x)2^n, \quad (3.9)$$

с помощью которых ядро K_0 записывается в виде

$$K_0(x, y) = \Phi(c(x), c(y)). \quad (3.10)$$

Также обозначим

$$\widetilde{K}_j(x, y) := \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left| \varphi_{j,k}(x) \overline{\varphi_{j,k}(y)} \right|, \quad \widetilde{\Phi}(x, y) := \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| \varphi(x \oplus k) \overline{\varphi(y \oplus k)} \right|.$$

При этом

$$\widetilde{K}_0(x, y) = \widetilde{\Phi}(c(x), c(y)). \quad (3.11)$$

Лемма 2. Если $\varphi \in L_c^q(\mathbb{R}_+)$ и $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, $1/p + 1/q = 1$, $1 \leq p \leq \infty$, то для всех $x \in \mathbb{R}_+$

$$P_j f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y) K_j(x, y) dy.$$

Доказательство. Достаточно проверить равенство для $j = 0$. Проверим, что при каждом фиксированном $x \in \mathbb{R}_+$ верно $\widetilde{K}_0(x, \cdot) \in L^q(\mathbb{R}_+)$. Тогда доказательство леммы будет следовать из теоремы Лебега о мажорированной сходимости. При $1 < q < \infty$, пользуясь представлением (3.11), для $x \in [r2^n, (r+1)2^n)$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+} \left| \widetilde{K}_0(x, y) \right|^q dy &= \int_{\mathbb{R}_+} \left| \widetilde{\Phi}(c(x), c(y)) \right|^q dy = \int_{r2^n}^{(r+1)2^n} \left| \widetilde{\Phi}(c(x), y \oplus r2^n) \right|^q dy \\ &= \int_0^{2^n} \left| \widetilde{\Phi}(c(x), y) \right|^q dy. \end{aligned}$$

Вспоминая определение функции $\widetilde{\Phi}$, по неравенству Гельдера получаем

$$\int_0^{2^n} \left| \sum_{k=0}^{2^n-1} \left| \varphi(c(x) \oplus k) \overline{\varphi(y \oplus k)} \right| \right|^q dy$$

$$\leq \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} |\varphi(c(x) \oplus k)|^p \right)^{q/p} \int_0^{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} |\varphi(y \oplus k)|^q dy.$$

Так как

$$\begin{aligned} \int_0^{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} |\varphi(y \oplus k)|^q dy &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^{2^n} |\varphi(y \oplus k)|^q dy \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^{2^n} |\varphi(y)|^q dy = 2^n \|\varphi\|_q^q, \end{aligned}$$

то окончательно для $1 < q < \infty$ получим

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left| \widetilde{K}_0(x, y) \right|^q dy \leq 2^n \|\varphi\|_q^q \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} |\varphi(c(x) \oplus k)|^p \right)^{q/p}. \quad (3.12)$$

При $q = \infty$ или $q = 1$ аналогично, пользуясь (3.11), для $x \in [r2^n, (r+1)2^n)$ имеем

$$\sup_{y \in \mathbb{R}_+} \left| \widetilde{K}_0(x, y) \right| = \sup_{y \in [0, 2^n)} \left| \widetilde{\Phi}(c(x), y) \right| \leq \|\varphi\|_\infty \sum_{k=0}^{2^n-1} |\varphi(c(x) \oplus k)|$$

и

$$\int_{\mathbb{R}_+} \left| \widetilde{K}_0(x, y) \right| dy = \int_0^{2^n} \left| \widetilde{\Phi}(c(x), y) \right| dy \leq \|\varphi\|_1 \sum_{k=0}^{2^n-1} |\varphi(c(x) \oplus k)|.$$

Таким образом, соотношение $\widetilde{K}_0(x, \cdot) \in L^q(\mathbb{R}_+)$, а вместе с ним и лемма 2 доказаны. \square

Лемма 3. Пусть масштабированная функция $\varphi \in L_c^2(\mathbb{R}_+)$ и $\widehat{\varphi}(0) = 1$, тогда

$$\int_{\mathbb{R}_+} K_j(x, y) dy = 1 \text{ для п.в. } x \in \mathbb{R}_+.$$

Доказательство. Достаточно проверить равенство для $j = 0$. Пользуясь представлением (3.10), для $x \in [r2^n, (r+1)2^n)$ имеем

$$\int_{\mathbb{R}_+} K_0(x, y) dy = \int_{r2^n}^{(r+1)2^n} \Phi(c(x), y \oplus r2^n) dy = \int_0^{2^n} \Phi(c(x), y) dy.$$

Вспоминая (3.8) определение функции Φ , придем к интегралу

$$\int_0^{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \varphi(c(x) \oplus k) \overline{\varphi(y \oplus k)} dy = \sum_{k=0}^{2^n-1} \varphi(c(x) \oplus k) \int_0^{2^n} \overline{\varphi(y \oplus k)} dy.$$

Поскольку по условию леммы

$$\int_0^{2^n} \overline{\varphi(y \oplus k)} dy = \int_0^{2^n} \overline{\varphi(y)} dy = \overline{\widehat{\varphi}(0)} = 1,$$

осталось воспользоваться свойством разбиения единицы (3.5). \square

3.3 Сходимость разложений по фрейму Парсеваля диадических всплесков

Прежде всего, установим ограниченность норм операторов P_j , действующих из $L^p(\mathbb{R}_+)$ в $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 1. Если $\varphi \in L_c^{\max\{p,q\}}(\mathbb{R}_+)$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in [1, \infty]$, $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^n)$, $\widehat{\varphi}(0) = 1$, то $\|P_j\|_{L^p \rightarrow L^p} \leq 2^n \|\varphi\|_p \|\varphi\|_q$.

Доказательство. По лемме 2, определению ядра K_j и представлению ядра (3.10) имеем

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_p &= \left\| \int_{\mathbb{R}_+} f(y) K_j(x, y) dy \right\|_p = \left\| \int_{\mathbb{R}_+} f(y) 2^j K_0(2^j x, 2^j y) dy \right\|_p = \\ &= \left\| \int_{\mathbb{R}_+} f(2^{-j} y) K_0(2^j x, y) dy \right\|_p = \left\| \int_{\mathbb{R}_+} f(2^{-j} y) \Phi(c(2^j x), c(y)) dy \right\|_p. \end{aligned}$$

По определению (3.9) функций r_0 и c последнее выражение примет вид

$$\left\| \int_{r_0(2^j x)2^n}^{(r_0(2^j x)+1)2^n} f(2^{-j} y) \Phi(c(2^j x), y \oplus r_0(2^j x)2^n) dy \right\|_p, \quad (3.13)$$

или после замены переменной

$$\left\| \int_0^{2^n} f(2^{-j}(y \oplus r_0(2^j x)2^n)) \Phi(c(2^j x), y) dy \right\|_p.$$

Вспоминая определение функции Φ , по неравенству треугольника и неравенству Минковского продолжим

$$\left\| \int_0^{2^n} f(2^{-j}(y \oplus r_0(2^j x)2^n)) \sum_{k=0}^{2^n-1} \varphi(c(2^j x) \oplus k) \overline{\varphi(y \oplus k)} dy \right\|_p \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \left\| \int_0^{2^n} f(2^{-j}(y \oplus r_0(2^j x)2^n)) \varphi(c(2^j x) \oplus k) \overline{\varphi(y \oplus k)} dy \right\|_p \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^{2^n} |\varphi(y \oplus k)| \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(2^{-j}(y \oplus r_0(2^j x)2^n)) \varphi(c(2^j x) \oplus k)|^p dx \right)^{1/p} dy. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно внутренний интеграл. Вспоминая определение (3.9) функций c и r_0 и заменяя переменную, получим

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_+} |f(2^{-j}(y \oplus r_0(2^j x)2^n)) \varphi(c(2^j x) \oplus k)|^p dx = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \int_{r2^{n-1-j}}^{(r+1)2^{n-1-j}} |f(2^{-j}(y \oplus r2^n)) \varphi(2^j x \oplus r2^n \oplus k)|^p dx = \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-j} |f(2^{-j}(y \oplus r2^n))|^p \int_0^{2^n} |\varphi(x)|^p dx = \|\varphi\|_p^p \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-j} |f(2^{-j}(y \oplus r2^n))|^p. \end{aligned}$$

Таким образом, оценка для $\|P_j f\|_p$ принимает вид

$$\|P_j f\|_p \leq \|\varphi\|_p \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^{2^n} |\varphi(y \oplus k)| \left(\sum_{r=0}^{\infty} 2^{-j} |f(2^{-j}(y \oplus r2^n))|^p \right)^{1/p} dy.$$

По неравенству Гёльдера правая часть последнего неравенства не превосходит

$$\begin{aligned} &\|\varphi\|_p \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\int_0^{2^n} |\varphi(y \oplus k)|^q dy \right)^{1/q} \left(\int_0^{2^n} \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-j} |f(2^{-j}(y \oplus r2^n))|^p dy \right)^{1/p} = \\ &= 2^n \|\varphi\|_p \|\varphi\|_q \left(\int_0^{2^n} \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-j} |f(2^{-j}(y \oplus r2^n))|^p dy \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Меняя местами суммирование и интегрирование и проводя замену переменной в интеграле, окончательно получим

$$\int_0^{2^n} \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-j} |f(2^{-j}(y \oplus r2^n))|^p dy = \sum_{r=0}^{\infty} \int_{r2^n}^{(r+1)2^n} 2^{-j} |f(2^{-j}y)|^p dy = \|f\|_p^p.$$

□

В следующей теореме мы получаем сходимость частичных сумм $P_j f$ к функции f при $j \rightarrow +\infty$ в пространстве $L^p(\mathbb{R}_+)$, $1 \leq p < \infty$. В доказательстве мы воспользуемся тем, что, подобно вещественному случаю, множество финитных непрерывных в диадической метрике

$\rho(x, y) := x \ominus y$, $x, y \in \mathbb{R}_+$, функций всюду плотно в $L^p(\mathbb{R}_+)$, см. [1, глава 2]. Непрерывные в диадической метрике функции также называют w -непрерывными.

Теорема 2. Если $\varphi \in L_c^{\max\{p, q\}}(\mathbb{R}_+)$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in [1, \infty)$, $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^n)$, $\widehat{\varphi}(0) = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, то

$$P_j f \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} f.$$

Доказательство. Пусть сначала функция f w -непрерывна, финитна и $\text{supp } f \subset [0, 2^m)$, $m > n$, $m \in \mathbb{N}$. Докажем, что $\int_{2^m}^{\infty} |f(x) - P_j f(x)|^p dx = 0$. Учитывая, что на множестве $[2^m, +\infty)$ функция f тождественно равна нулю, применяя лемму 2 и делая замену переменной, получаем

$$\begin{aligned} \int_{2^m}^{\infty} |f(x) - P_j f(x)|^p dx &= \int_{2^m}^{\infty} |P_j f(x)|^p dx = \int_{2^m}^{\infty} \left| \int_{\mathbb{R}_+} f(y) K_j(x, y) dy \right|^p dx = \\ &= \int_{2^m}^{\infty} \left| \int_{\mathbb{R}_+} f(y) 2^j K_0(2^j x, 2^j y) dy \right|^p dx = \\ &= \int_{2^m}^{\infty} \left| \int_{\mathbb{R}_+} f(x \oplus 2^{-j} t) K_0(2^j x, 2^j x \oplus t) dt \right|^p dx. \end{aligned}$$

При $t \in [0, 2^m)$ функция $f(x \oplus 2^{-j} t)$ равна нулю, так как $x \geq 2^m$ и, значит, сумма $x \oplus 2^{-j} t$ лежит вне интервала $[0, 2^m)$. При $t \geq 2^m > 2^n$

$$\begin{aligned} K_0(2^j x, 2^j x \oplus t) &= \Phi(c(2^j x), c(2^j x \oplus t)) = \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \varphi(2^j x \oplus r_0(2^j x) 2^n \oplus k) \overline{\varphi(2^j x \oplus t \oplus r_0(2^j x) 2^n \oplus k)} = 0, \end{aligned}$$

так как $2^j x \oplus r_0(2^j x) 2^n \oplus k \in [0, 2^n)$ по определению $r_0(2^j x)$, и $2^j x \oplus t \oplus r_0(2^j x) 2^n \oplus k \geq 2^m$, а следовательно, это число лежит вне носителя φ .

Теперь рассмотрим $\int_0^{2^m} |f(x) - P_j f(x)|^p dx$. Применяя лемму 2 и лемму 3 и делая замену переменной, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{2^m} |f(x) - P_j f(x)|^p dx &= \int_0^{2^m} \left| \int_{\mathbb{R}_+} (f(x) - f(y)) 2^j K_0(2^j x, 2^j y) dy \right|^p dx = \\ &= \int_0^{2^m} \left| \int_{\mathbb{R}_+} (f(x) - f(x \oplus 2^{-j} t)) K_0(2^j x, 2^j x \oplus t) dt \right|^p dx. \end{aligned}$$

Разобьем внутренний интеграл по схеме $\int_{\mathbb{R}_+} = \int_0^{2^n} + \int_{2^n}^{\infty}$ и заметим, что так как $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^n)$, то $K_0(2^j x, 2^j x \oplus t) \equiv 0$ при $t \geq 2^n$, поэтому

$$\int_{2^n}^{\infty} (f(x) - f(x \oplus 2^{-j}t)) K_0(2^j x, 2^j x \oplus t) dt = 0. \quad (3.14)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^{2^m} |f(x) - P_j f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \\ & = \left(\int_0^{2^m} \left| \int_0^{2^n} (f(x) - f(x \oplus 2^{-j}t)) K_0(2^j x, 2^j x \oplus t) dt \right|^p dx \right)^{1/p} = \\ & = \left(\int_0^{2^m} \left| \int_0^{2^n} (f(x) - f(x \oplus 2^{-j}t)) \sum_{k=0}^{2^n-1} \varphi(c(2^j x) \oplus k) \overline{\varphi(c(2^j x) \oplus t \oplus k)} dt \right|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

По неравенству треугольника последнее выражение не превосходит

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\int_0^{2^m} \left(\int_0^{2^n} |f(x) - f(x \oplus 2^{-j}t)| \varphi(c(2^j x) \oplus k) \varphi(c(2^j x) \oplus t \oplus k) dt \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \\ & \leq \sup_{\substack{x \in [0, 2^m) \\ t \in [0, 2^n)}} |f(x) - f(x \oplus 2^{-j}t)| \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\int_0^{2^m} \left(\int_0^{2^n} |\varphi(c(2^j x) \oplus k) \varphi(y)| dy \right)^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Применим к последней сумме неравенство Йенсена для функции $(\cdot)^p$, где $p > 1$. При $p = 1$ необходимости в этом шаге нет, и дальнейшие оценки получаются сразу.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\int_0^{2^m} \left(\int_0^{2^n} |\varphi(c(2^j x) \oplus k) \varphi(y)| dy \right)^p dx \right)^{1/p} \leq \\ & \leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\int_0^{2^m} 2^{-n} \left(\int_0^{2^n} 2^{np} |\varphi(c(2^j x) \oplus k)|^p |\varphi(y)|^p dy \right) dx \right)^{1/p} = \\ & = 2^{n(p-1)/p} \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\int_0^{2^m} |\varphi(c(2^j x) \oplus k)|^p \left(\int_0^{2^n} |\varphi(y)|^p dy \right) dx \right)^{1/p} = \\ & = 2^{n(p-1)/p} \|\varphi\|_p \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\int_0^{2^m} |\varphi(c(2^j x) \oplus k)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Применяя определение (3.9) и заменяя переменную, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2^m} |\varphi(c(2^j x) \oplus k)|^p dx &= \sum_{r=0}^{2^{m-n+j}-1} \int_{r2^{n-j}}^{(r+1)2^{n-j}} |\varphi(2^j x \oplus r2^n \oplus k)|^p dx = \\ &= \sum_{r=0}^{2^{m-n+j}-1} \int_0^{2^n} 2^{-j} |\varphi(x \oplus k)|^p dx = 2^{m-n} \|\varphi\|_p^p. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left(\int_0^{2^m} |f(x) - P_j f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq 2^{2n+(m-2n)/p} \|\varphi\|_p^2 \sup_{\substack{x \in [0, 2^m) \\ t \in [0, 2^n)}} |f(x) - f(x \oplus 2^{-j}t)|.$$

Осталось заметить, что, поскольку функция f финитна и непрерывна, то по теореме Кантора (см. [1, глава 2]) она равномерно непрерывна и, следовательно,

$$\sup_{\substack{x \in [0, 2^m) \\ t \in [0, 2^n)}} |f(x) - f(x \oplus 2^{-j}t)| \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow +\infty.$$

Для доказательства общего случая достаточно приблизить произвольную $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ непрерывной, финитной функцией и воспользоваться теоремой 1. \square

Перейдем к изучению сходимости почти везде частичных сумм $P_j f$ к функции f при $j \rightarrow +\infty$.

Теорема 3. Если $\varphi \in L_c^{\max\{2, q\}}(\mathbb{R}_+)$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in [1, \infty)$, $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^n)$, $\widehat{\varphi}(0) = 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и почти для всех $x \in \mathbb{R}_+$ последовательность $\{\varphi(c(2^j x))\}_{j \in \mathbb{N}}$ ограничена, то

$$P_j f(x) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} f(x) \text{ для п.в. } x \in \mathbb{R}_+$$

Доказательство. Пусть x – точка Лебега порядка p функции f , то есть имеет место соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(2^k \int_0^{2^{-k}} |f(x \oplus t) - f(x)|^p dt \right)^{1/p} = 0,$$

и в этой точке выполняется заключение леммы 3.

Известно, см. [3], что для функций $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ почти все $x \in \mathbb{R}_+$ являются точками Лебега порядка p . Применяя лемму 2 и лемму 3 и делая замену переменной, получаем

$$f(x) - P_j f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} (f(x) - f(y)) 2^j K_0(2^j x, 2^j y) dy =$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} (f(x) - f(x \oplus 2^{-j}t)) K_0(2^j x, 2^j x \oplus t) dt.$$

Учитывая равенство (3.14) и определение функции Φ , имеем

$$\begin{aligned} f(x) - P_j f(x) &= \int_0^{2^n} (f(x) - f(x \oplus 2^{-j}t)) K_0(2^j x, 2^j x \oplus t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \varphi(c(2^j x) \oplus k) \int_0^{2^n} (f(x) - f(x \oplus 2^{-j}t)) \varphi(2^j x \oplus t \oplus k) dt. \end{aligned}$$

Применим неравенство Гёльдера и придем к оценке для интеграла

$$\left(\int_0^{2^n} |f(x) - f(x \oplus 2^{-j}t)|^p dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{2^n} |\varphi(2^j x \oplus t \oplus k)|^q dt \right)^{1/q}.$$

Для $\varepsilon > 0$ выберем достаточно большое $j \in \mathbb{N}$, такое что

$$\left(2^{j-n} \int_0^{2^{n-j}} |f(x) - f(x \oplus t)|^p dt \right)^{1/p} < \varepsilon,$$

тогда

$$\int_0^{2^n} |f(x) - f(x \oplus 2^{-j}t)|^p dt = 2^j \int_0^{2^{n-j}} |f(x) - f(x \oplus t)|^p dt \leq 2^n \varepsilon^p.$$

Возвращаясь к доказываемому неравенству, получаем оценку

$$|P_j f(x) - f(x)| \leq 2^{n/p} \varepsilon \|\varphi\|_q \sum_{k=0}^{2^n-1} |\varphi(c(2^j x) \oplus k)|.$$

Ввиду ограниченности при почти всех x членов последовательности $\{\varphi(c(2^j x))\}_{j \in \mathbb{N}}$ последнее выражение сколь угодно мало при достаточно малых ε . \square

Рассмотрим поведение сумм $P_j f$ при $j \rightarrow -\infty$.

Теорема 4. В условиях теоремы 2 при $p \neq 1$

$$P_j f \xrightarrow{j \rightarrow -\infty} 0.$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2, пусть сначала функция f w -непрерывна, финитна и $\text{supp } f \subset [0, 2^m)$, $m > n$, $m \in \mathbb{N}$. Выберем $-j$ настолько большим, чтобы $\text{supp } f \subset [0, 2^{-j+n})$, тогда в интегральном представлении и норме интегрирование про-

исходит только по квадрату $[0, 2^{-j+n}]^2$, то есть

$$\begin{aligned} \|P_j f\|_p &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} \left| \int_{\mathbb{R}_+} f(y) K_j(x, y) dy \right|^p dx \right)^{1/p} = \\ &= \left(\int_0^{2^{-j+n}} \left| \int_0^{2^m} f(y) K_j(x, y) dy \right|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Поэтому в представлении (3.10) для участвующих x и y $c(x) = x$ и $c(y) = y$, так что приходим к выражению

$$\left(\int_0^{2^{-j+n}} \left| \int_0^{2^m} f(y) 2^j \Phi(2^j x, 2^j y) dy \right|^p dx \right)^{1/p}.$$

Остальные рассуждения повторяют шаги доказательства теоремы 1. Вспоминая определение (3.8), применяя неравенство треугольника и неравенство Минковского, получим

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^{2^{-j+n}} \left| \int_0^{2^m} f(y) 2^j \sum_{k=0}^{2^n-1} \varphi(2^j x \oplus k) \overline{\varphi(2^j y \oplus k)} dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\int_0^{2^{-j+n}} \left| \int_0^{2^m} f(y) 2^j \varphi(2^j x \oplus k) \overline{\varphi(2^j y \oplus k)} dy \right|^p dx \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^{2^m} |f(y) 2^{j/q} \varphi(2^j y \oplus k)| dy \left(\int_0^{2^{-j+n}} 2^j |\varphi(2^j x \oplus k)|^p dx \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Вычисляя внутренний интеграл, продолжим

$$\|\varphi\|_p \sum_{k=0}^{2^n-1} \int_0^{2^m} |f(y) 2^{j/q} \varphi(2^j y \oplus k)| dy.$$

Применяя к оставшемуся интегралу неравенство Гельдера и делая замену переменной, получим

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_p \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\int_0^{2^m} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} \left(\int_0^{2^m} 2^j |\varphi(2^j y \oplus k)|^q dy \right)^{1/q} \leq \\ \leq \|\varphi\|_p \|f\|_p \sum_{k=0}^{2^n-1} \left(\int_0^{2^{j+m}} |\varphi(y \oplus k)|^q dy \right)^{1/q} \end{aligned}$$

Последнее выражение стремится к нулю при j , стремящемся к $-\infty$. Для доказательства общего случая достаточно приблизить произвольную $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ w -непрерывной, финитной

функцией и воспользоваться теоремой 1. □

Замечание 1. При $p = 1$ заключение теоремы 4 неверно. Например, возьмём $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ такую, что $f \geq 0$ и $\text{supp } f \subset [0, 2^m)$, $m \in \mathbb{N}$, и положим $\varphi = 2^{-m}\chi_{[0, 2^m)}$. Тогда, учитывая неотрицательность всех слагаемых и то, что $\varphi(2^j x) \equiv 2^{-m}$ на $[0, 2^m)$ для любого $j < 0$, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^{2^j-1} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk} \right\|_1 &= 2^j \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{k=0}^{2^j-1} \left(\int_0^{2^m} f(t) \varphi(2^j t \oplus k) dt \right) \varphi(2^j x \oplus k) dx \geq \\ &\geq 2^j \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_0^{2^m} f(t) \varphi(2^j t) dt \right) \varphi(2^j x) dx = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(x) dx \cdot 2^{-m} \int_0^{2^m} f(t) dt = 2^{-m} \|f\|_1 \end{aligned}$$

Теорема 5. Пусть $\varphi \in L_c^{\max\{2, q\}}(\mathbb{R}_+)$, $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^n)$, φ w -непрерывна в точках $0, 1, \dots, 2^n - 1$, $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$, тогда

$$P_j f(x) \rightarrow 0 \text{ при } j \rightarrow -\infty \text{ для п.в. } x \in \mathbb{R}_+.$$

Доказательство. Подобно тому, как в доказательстве теоремы 1 мы получили формулу (3.13), пользуясь леммой 2, представлением (3.10) и определениями (3.9), получим

$$\begin{aligned} P_j f(x) &= \int_{r_0(2^j x)2^n}^{(r_0(2^j x)+1)2^n} f(2^{-j} y) \Phi(c(2^j x), y \oplus r_0(2^j x)2^n) dy = \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \varphi(c(2^j x) \oplus k) \int_{r_0(2^j x)2^n}^{(r_0(2^j x)+1)2^n} f(2^{-j} y) \varphi(y \oplus r_0(2^j x)2^n \oplus k) dy. \end{aligned}$$

По неравенству Гельдера

$$\begin{aligned} |P_j f(x)| &\leq \sum_{k=0}^{2^n-1} |\varphi(c(2^j x) \oplus k)| \left(\int_{r_0(2^j x)2^n}^{(r_0(2^j x)+1)2^n} |f(2^{-j} y)|^p dy \right)^{1/p} \times \\ &\times \left(\int_{r_0(2^j x)2^n}^{(r_0(2^j x)+1)2^n} |\varphi(y \oplus r_0(2^j x)2^n \oplus k)|^q dy \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \|\varphi\|_q \sum_{k=0}^{2^n-1} |\varphi(c(2^j x) \oplus k)| \left(\int_{\mathbb{R}_+} |f(2^{-j} y)|^p dy \right)^{1/p} = \\ &= 2^{j/p} \|\varphi\|_q \|f\|_p \sum_{k=0}^{2^n-1} |\varphi(c(2^j x) \oplus k)|. \end{aligned}$$

Последнее выражение стремится к нулю при j , стремящемся к $-\infty$. □

Таким образом, вспоминая связь между разложениями по сдвигам масштабирующей функции и по системе всплесков (лемма 1), мы приходим к следующим результатам

Теорема 6. *Если масштабирующая функция $\varphi \in L_c^{\max\{p,q\}}(\mathbb{R}_+)$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1, \infty)$, $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^n)$, $\widehat{\varphi}(0) = 1$, и система всплесков (3.1) построена с помощью унитарного принципа расширения по формуле (3.4), то для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$*

$$f = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \psi_{i,k}^{(\nu)} \rangle \psi_{i,k}^{(\nu)},$$

где равенство понимается по норме пространства $L^p(\mathbb{R}_+)$.

Теорема 7. *Если масштабирующая функция $\varphi \in L_c^{\max\{2,q\}}(\mathbb{R}_+)$, $1/p + 1/q = 1$, $p \in [1, \infty)$, $\text{supp } \varphi \subset [0, 2^n)$, $\widehat{\varphi}(0) = 1$, φ w -непрерывна в точках $0, 1, \dots, 2^n - 1$, последовательность $\{\varphi(c(2^j x))\}_{j \in \mathbb{N}}$ ограничена для п. в. $x \in \mathbb{R}_+$, и система всплесков (3.1) построена с помощью унитарного принципа расширения по формуле (3.4), то для любой функции $f \in L^p(\mathbb{R}_+)$ и для п. в. $x \in \mathbb{R}_+$*

$$f(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \sum_{\nu=1}^r \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \langle f, \psi_{i,k}^{(\nu)} \rangle \psi_{i,k}^{(\nu)}(x).$$

Заключение

В диссертации рассмотрены вопросы приближения системами всплесков. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. В первой главе получена прямая теорема типа Джексона для нестационарных систем периодических всплесков, образующих биортогональные базисы в пространствах Лебега L_p , $p \in [1, +\infty)$, и в пространстве непрерывных функций.
2. Во второй главе получены конструктивные необходимые и достаточные условия, при которых система периодических всплесков образует фрейм Парсевалья в пространстве L_2 . В отличие от известных ранее критериев фреймовости, данный критерий можно использовать непосредственно для построения фрейма всплесков. Так же получены необходимые и достаточные условия, при которых периодический фрейм Парсевалья всплесков имеет заданный порядок аппроксимации фреймом. Выявлена взаимосвязь между порядком аппроксимации фреймом и порядком аппроксимации периодическим кратномасштабным анализом, порождённым сдвигами масштабирующих функций.
3. В третьей главе получены условия для сходимости разложения по системе диадических фреймов всплесков, заданных на положительной полупрямой с операцией двоичного сложения, к приближаемой функции почти всюду и по L^p -норме, $p \in (1, \infty)$.

Обозначения

Обозначим через \mathbb{C} , \mathbb{R} , \mathbb{Z} , \mathbb{N} множества комплексных, вещественных, целых и натуральных чисел соответственно; $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ — положительная полупрямая и множество неотрицательных целых чисел соответственно. Будем обозначать символом $[t] = \max \{n \in \mathbb{Z} : n \leq t\}$ — целую часть числа $t \in \mathbb{R}$. Считаем, что на \mathbb{R} задана мера Лебега.

Для $p \in [1, +\infty)$ под L_p понимается пространство измеримых, 1-периодических функций f , модуль которых суммируем на $[0, 1]$ со степенью p , оснащённое нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f|^p \right)^{1/p}.$$

Символом L_∞ будем обозначать пространство 1-периодических существенно ограниченных функций с равномерной нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

Аналогично определяются пространства Лебега $L^p(X)$, $p \in [1, \infty]$, где X есть \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$, или их подмножества оснащённые мерой Лебега. Для обозначения пространств Лебега множеств с операцией двоичного сложения будем использовать символы \tilde{L}_p и $\tilde{L}^p(X)$, в случае, если данное пространство отлично от обычного пространства $L^p(X)$.

Через l_p , при $p \in [1, +\infty)$, обозначим пространство двусторонних последовательностей $a = \{a(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, для которых

$$\|a\|_p = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |a(k)|^p \right)^{1/p} < +\infty.$$

Таким образом, нормы пространств L_p и l_p будут обозначаться одинаково и нужная формула будет следовать из контекста. Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем использовать для обозначения скалярного произведения как в пространстве L_2 , так и в пространстве l_2 , то есть

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \bar{g}(x) dx \quad \text{для функций } f, g \in L_2,$$

и

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a(k) \bar{b}(k) \quad \text{для последовательностей } a, b \in l_2.$$

Пространство непрерывных 1-периодических функций с равномерной нормой будем обозначать C . Для $m \in \mathbb{N}$ символом C^m будем обозначать множество m раз непрерывно дифференцируемых функций, при этом полагаем $C^0 = C$.

Если из контекста не следует противное, все рассматриваемые пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными. В точках устранимого разрыва функции доопределяются по непрерывности. Под $\frac{0}{0}$ понимается 0, а сумма ряда по \mathbb{Z} понимается в смысле главного значения: $\sum_{k \in \mathbb{Z}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N$.

При $n \in \mathbb{Z}$ будем обозначать n -ый коэффициент Фурье функции $f \in L_1$ символом

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x) e^{2\pi i n x} dx.$$

Для $\nu \in \mathbb{R}$ под H^ν будем понимать пространство Соболева всех 1-периодических функций $f \in L_2$ таких, что

$$\|f\|_{H^\nu} = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} (1 + k^2)^\nu |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Далее определим для функции f оператор сдвига $S_j^n f := f(\cdot + 2^{-j}n)$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $n \in \mathcal{R}_j$, где $\mathcal{R}_j = \{-2^{j-1} + 1, -2^{j-1} + 2, \dots, 2^{j-1}\}$. Так же определим схожее множество $R_j = \{-2^{\lfloor j/2 \rfloor} + 1, -2^{\lfloor j/2 \rfloor} + 2, \dots, 2^{\lfloor j/2 \rfloor} - 1\}$, при этом полагаем $\mathcal{R}_0 = R_0 = \{0\}$.

Обозначим $\mathcal{S}(2^j)$ – пространство всех 2^j -периодических последовательностей $\{c(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ комплексных чисел, то есть таких, что $c(2^j p + k) = c(k)$ для всех $p \in \mathbb{Z}$.

Модулем непрерывности функции f из L_p , $p \in [1, +\infty)$, или C (пологая $p = +\infty$) порядка $r \in \mathbb{Z}_+$ будем называть функцию переменной $h \in [0; +\infty)$, которая определяется равенством

$$\omega_r(f, h)_p = \sup_{|t| \leq h} \|\Delta_t^r f\|_p,$$

где $\Delta_t^r f(x) = \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} C_r^k f(x + kt)$ – конечная разность порядка r функции f с шагом h в точке x .

Наилучшим приближением функции f в пространстве L_p подпространством $V \subset L_p$ (при $p \in [1, +\infty)$, а при $p = \infty$ в пространстве C) будем называть

$$E(f, V)_p = \text{dist}(f, V)_p = \inf_{g \in V} \|f - g\|_p.$$

В частности, наилучшее приближение функции f в пространстве L_p или C (при $p = \infty$) множеством тригонометрических полиномов порядка $N \in \mathbb{Z}_+$ будем обозначать $E_N(f)_p$.

Для $N \in \mathbb{N}$ средними Валле-Пуссена функции f будем называть тригонометрические

ПОЛИНОМЫ

$$v_n(f)(x) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} \sum_{l=-k}^k \widehat{f}(l) e^{2\pi i l x}.$$

Так же для $n, m \in \mathbb{Z}$ положим $\delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{при } n = m \\ 0, & \text{при } n \neq m \end{cases}$. Аналогично, характеристическую

функцию множества M будем обозначать символом $\delta_M(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \in M \\ 0, & \text{при } x \notin M \end{cases}$.

Литература

- [1] Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах*, Баку, Элм (1981).
- [2] Ахиезер Н. И., *Лекции по теории аппроксимации*, Изд. 2-е, М., НАУКА (1965).
- [3] Волосивец С. С., *О некоторых приложениях P -ичных обобщенных функций и приближении системой P -ичных сдвигов одной функции*, Сиб. матем. журн., **50** (2009), 1, 3–18.
- [4] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А., *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения*. Изд. 2-е, ЛКИ, М. (2008).
- [5] Горшанова А. А., Лебедева Е. А., *О критериях для фреймов периодических всплесков*, Мат. заметки, **118**(2025), 2, 221–239.
- [6] Горшанова А. А., Лебедева Е. А., *О сходимости разложений по системам диадических всплесков*, Алгебра и Анализ, **37**(2025), 5, 179–197.
- [7] Горшанова А. А., Лебедева Е. А., *Порядки аппроксимации периодическими фреймами всплесков*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **545**(2025), 84–110.
- [8] Желудев В. А., *О вейвлетах на базе периодических сплайнов*, Докл. РАН, **335** (1994), 1, 9–13.
- [9] Жук В. В., *Лекции по теории аппроксимации*, ВВМ, СПб. (2008).
- [10] Жук В. В., *Лекции по теории аппроксимации*, Ленинград: Издательство Ленинградского университета (1982).
- [11] Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А., *Теория всплесков*, Физматлит, М. (2006).
- [12] Петухов А. П., *Периодические всплески*, Матем. сб., **188** (1997), 10, 69–94.
- [13] Протасов В. Ю., Фарков Ю. А., *Диадические вейлеты и масштабирующие функции на полупрямой*, Матем. сб., **197** (2006), 10, 129–160.
- [14] Тиман А. Ф., *Теория приближения функций действительного переменного*, Физматгиз., М. (1960).

- [15] Улицкая А.Ю., *Точные оценки среднеквадратичных приближений классов периодических свёрток пространствами сдвигов*, Алгебра и анализ, **32** (2020), 2, 201–228.
- [16] Andrianov P., Skopina M., *On Jackson-type inequalities associated with separable Haar wavelets*, Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process., **14** (2016), 3, 1650005.
- [17] Christensen O., Goh S. S., *Pairs of oblique duals in spaces of periodic functions*, J. Adv. Comput. Math., **32** (2010), 2, 353–379.
- [18] Chui C. K., Wang J. Z., *A general framework of compact supported splines and wavelets*, J. Approx. Th., **71** (1992), 3, 263–304.
- [19] Daubechies I., *The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis*, IEEE Trans. Inform. Theory, **36** (1990), 5, 961–1005.
- [20] Daubechies I., Han B., Ron A., Shen Z., *Framelets: MRA-based constructions of wavelet frames*, J. Appl. Comput. Harmon. Anal., **14** (2003), 1, 1–46.
- [21] De Boor C., DeVore R. A., Ron A., *Approximation from shift-invariant subspaces of $L_2(\mathbb{R}^d)$* , Trans. Amer. Math. Soc., **341**(1994), 2, 787–806.
- [22] Farkov Yu., Lebedeva E., Skopina M., *Wavelet frames on Vilenkin groups and their approximation properties*, Int. J. of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, **13** (2015) 5, 1550036.
- [23] Goh S. S., Han B., Shen Z., *Tight periodic wavelet frames and approximation orders*, Appl. Comput. Harmon. Anal., **31** (2011), 2, 228–248.
- [24] Goh S. S., Teo K. M., *Extension principles for tight wavelet frames of periodic functions*, J. Appl. Comput. Harmon. Anal., **25** (2008), 2, 168–186.
- [25] Goh S. S., Teo K. M., *Wavelet frames and shift-invariant subspaces of periodic functions*, J. Appl. Comput. Harmon. Anal., **20** (2006), 3, 326–344.
- [26] Gorsanova A., *Jackson-type theorem on approximation by non-stationary periodic wavelets*, Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process. **20** (2022), 2, 2150055.
- [27] Gripenberg G., *A necessary and sufficient condition for the existence of father wavelet*, Studia Mathematica, **114** (1995), 3, 207–226.
- [28] Han B., Shen Z., *Compactly supported symmetric C^∞ wavelets with spectral approximation order*, SIAM J. Math. Anal., **40** (2008), 3, 905–938.
- [29] Jetter K., Zhou D.-X., *Order of linear approximation from shift-invariant spaces*, Constr. Approx., **11** (1995), 423–438.
- [30] Kelly S.E., Kon M. A., Raphael L. A., *Pointwise Convergence of Wavelet Expansions*, Bull. Amer. Math. Soc., **30** (1994), 1, 87-94.

- [31] Koh Y. W., Lee S. L., Tan H. H., *Periodic orthogonal splines and wavelets*, J. Appl. Comput. Harmon. Anal., **2** (1995), 3, 201–218.
- [32] Kolomoitsev Yu., Krivoshein A., Skopina M., *Approximation by periodic multivariate quasi-projection operators*, J. Math. Anal. Appl., **489** (2020), 2, 124192.
- [33] Krivoshein A. V., Protasov V. Y., Skopina M. A., *Multivariate Wavelet Frames*, Springer, (2016).
- [34] Krivoshein A. V., Skopina M. A., *Approximation by frame-like wavelet systems*, Appl. Comput. Harmon. Anal. **31** (2011), 410–428.
- [35] Kyriazis G. C., *Approximation of distribution spaces by means of kernel operators*, J. Fourier Anal. Appl. **2** (1996), 3, 261–286.
- [36] Lemarié-Rieusset P.-G., *Ondelettes à localisation exponentielle*, J. Math. Pures Appl., **67** (1988), 227–236.
- [37] Lukomskii S., *Tight wavelet frames on zero-dimensional groups. Construction and approximation*, Numerical Functional Analysis and Optimization, **44** (2023), 12, 1209–1227.
- [38] Meyer Y., *Wavelets and Operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1992).
- [39] Ron A., Shen Z., *Affine Systems in $L^2(\mathbb{R}^d)$: The Analysis of the Analysis Operator*, J. Func. Anal., **148** (1997), 2, 408-447.
- [40] Shah F. A., *Tight wavelet frames generated by the Walsh polynomials*, Int. J. Wavelets, Multiresolut. Inf. Process. **11** (2013), 6, 1350042.
- [41] Skopina M., *Multiresolution analysis of periodic functions*, East J. Approx., **3** (1997), 2, 203–224.
- [42] Skopina. M., *Tight wavelet frames on the space of M -positive vectors* Analysis and Applications, **22**(2024), 05, 913-936.
- [43] Trigub R. M., Bellinsky E. S., *Fourier Analysis and Approximation of Functions*, Dordrecht: Springer (2004).
- [44] Vinogradov O. L., *Structural characterization of deviations of quasi-projectors on the real line*, J. Math. Anal. Appl., **500** (2021), 125115.
- [45] Walter G. G., *Pointwise Convergence of Wavelet Expansions*, J. of Approx. Th., **80** (1995), 1, 108-118.