Санкт-Петербургский Государственный Университет

На правах рукописи

Крюков Николай Алексеевич

Различные задачи случайного заполнения множеств

Специальность 01.01.05 –
Теория вероятностей и математическая статистика

Диссертация на соискание степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доцент. Ананьевский С. М.

Санкт-Петербург
2022

Оглавление:

1 Введение

Задача случайного заполнения отрезка впервые была рассмотрена в работе Реньи [1] в следующей формулировке. На отрезке $[0, x]$ для $x > 1$ размещается случайным образом интервал $(t, t+1)$ единичной длины, тем самым разбивая изначальный отрезок на два отрезка меньшей длины: $[0, t]$ и $[t+1, x]$. Если какой-либо из них имеет длину меньше единицы, он исключается из дальнейшего рассмотрения. Остальные, в свою очередь, продолжают заполняться по вышеописанному правилу. По окончании данного процесса подсчитывается количество размещённых на изначальном отрезке интервалов. Оно обозначается за ξ_x. Для $0 \leqslant x < 1$ значение ξ_x принимается равным нулю. Выражение «случайным образом» в вышеописанной задаче означает что t является равномерно распределённой на $[0, x-1]$ случайной величиной. Более того, любое следующее случайное размещение интервала не зависит от предыдущих.

В работе Реньи [1] был показан следующий результат

Теорема 1.1. *Пусть ξ_x — описанное выше множество случайных величин. Тогда для любого $n > 1$ имеет место следующее соотношение*

$$E\{\xi_x\} = \lambda x + \lambda - 1 + o(x^{-n}), \qquad (x \to +\infty), \tag{1}$$

где константа λ определена следующим образом

$$\lambda = \int\limits_0^\infty e^{-2\int\limits_0^t \frac{1-e^{-u}}{u} du} dt.$$

Позднее в работе Дворецкого и Роббинса [2] было дано уточнение скорости сходимости в соотношении (1), а так же изучено поведение дисперсий того же множества случайных величин

Теорема 1.2. *Пусть ξ_x — описанное выше множество случайных величин. Тогда имеет место следующее соотношение*

$$E\{\xi_x\} = \lambda x + \lambda - 1 + O\left(\left(\frac{2e}{x}\right)^{x-\frac{3}{2}}\right), \qquad (x \to +\infty).$$

Также, существует такая положительная константа λ_2, что

$$D\{\xi_x\} = \lambda_2 x + \lambda_2 + O\left(\left(\frac{4e}{x}\right)^{x-4}\right), \qquad (x \to +\infty).$$

В работе [2] также был представлен результат об асимптотической нормальности последовательности случайных величин ξ_x:

Теорема 1.3. *Последовательность случайных величин*

$$\frac{\xi_x - \mathbb{E}\{\xi_x\}}{\sqrt{\mathbb{D}\{\xi_x\}}} \qquad (2)$$

слабо сходится к стандартной нормальной случайной величине при $x \to \infty$.

В работе [3] был рассмотрен дискретный аналог задачи о парковке. В нём на отрезок некоторой целой длины x (будем в таком случае обозначать длину за n) размещаются интервалы заранее заданной целой длины l, которая может быть отлична от единичной. Случайная величина t в данной задаче имеет равномерное распределение на множестве целых чисел $\{0, \ldots, n-l\}$, а отрезки длиной меньше l исключаются из рассмотрения. При помощи производящих функций в статье [3] было получено следующее асимптотическое поведение математических ожиданий $E\{\xi_n\}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E\{\xi_n\}}{ln} = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} dx =: \lambda_l.$$

В последнее время задачи о случайном заполнении отрезка вновь привлекают внимание математиков. Они были недавно рассмотрены в ряде статей, в том числе [4]–[8]. В работах [4]–[5] рассматривались дискретные варианты задачи, в то время как [6]–[8] обращали внимание на непрерывные аналоги.

Аналоги описанных выше задач были так же рассмотрены в работах [9]–[16].

В разделе 2 описано обобщение Теорем 1.1–1.3 на случай неравномерного расположения отрезков. В разделах 3,4,5 рассмотрены дискретные аналоги задачи Реньи. В разделе 3 располагаемые интервалы имеют целую длину большую единицы, а в разделе 4 располагаемые интервалы имеют длину 1, но они не могут быть расположены на отрезках достаточно малой длины. В разделе 5 интервалы имеют случайную длину. Раздел 6 посвящён доказательству технических Лемм.

Цель диссертационной работы. Основной целью данной диссертации является обобщение полученных в работах [1, 2] результатов на случаи одного класса законов распределений случайного размещения интервалов, включающего в себя равномерный закон, а также получение аналогов асимптотических результатов, приведенных в работе [2] для различных моделей дискретных законов случайного размещения интервалов, обобщающих предложенную в работе [3] модель.

Методы. В настоящей диссертации развиваются методы, приведенные в работах [1] – [3]. Также используется метод, основанный на вычислении производящих функций. Для получения предельных распределений используется метод, основанный на получении точных асимптотик моментов.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая значимость.Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы в различных областях теории вероятностей и математической статистики, в которых важны оценки числа случайно размещенных интервалов малой длины на отрезках большой длины.

Результаты и положения, выносимые на защиту.

1. Обобщение результатов, полученных в работах [1, 2] на случай, когда распределение размещаемого интервала обладает свойством антисимметричности.

2. Уточнение асимптотики математических ожиданий и дисперсий в дискретном аналоге задачи о парковке, рассмотренном в работе [3], а также установление асимптотической нормальности в данной задаче.

3. Вычисление точных значений математических ожиданий для описанной в пункте 2 задачи для расположения интервалов длины 2.

4. Вычисление точных значений математических ожиданий, дисперсий и третьих центральных моментов в задаче о дискретной парковке машин длины 1 с дополнительным условием остановки процесса заполнения в случае, если длина отрезка становится меньше заранее заданного значения.

5. Установление асимптотической нормальности для описанной в пункте 4 задачи.

6. Вычисление точных значений математических ожиданий в задаче о дискретной парковке машин длины 1 с дополнительным условием запрета расположения интервала на самом первом месте.

7. Вычисление точных значений математических ожиданий в задаче о дискретной парковке машин, длина которых является случайной величиной, распределённой на множестве $\{1, 2\}$.

Степень достоверности. Все полученные в этой диссертационной работе результаты являются математически достоверными фактами.

Апробация результатов.Результаты диссертации докладывались автором на Санкт-Петербургском Городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике по руководством академика РАН И. А. Ибрагимова (Санкт-Петербург, 22 октября 2021). Материалы диссертации опубликованы в статьях [17]–[22] в рецензируемых журналах, которые входят в список ВАК.

2 Обобщение задачи Реньи о парковке

Рассмотрим следующее обобщение описанной в прошлом разделе задачи. Пусть интервалы $(t, t+1)$ размещаются на отрезке $[0, x]$ отличным от равномерного образом. Будем считать, что распределения располагаемых интервалов не зависят от конкретного отрезка, а только от его длины. В таком случае нам достаточно определить семейство распределений

$$\mathcal{P} = \{P_x\}_{x \geqslant 1},$$

где P_x — некоторое распределение на отрезке $[0, x-1]$. Тогда интервал $(t, t+1)$ располагается на отрезке $[0, x]$ таким образом, чтобы случайная величина t имела распределение P_x. Обозначив за $\xi_{\mathcal{P}}(x)$ общее количество размещённых на изначальном отрезке $[0, x]$ единичных интервалов, эти случайные величины удовлетворяют следующему соотношению.

$$\begin{aligned}
&\xi_{\mathcal{P}}(x) = 0, \qquad x < 1,\\
&\xi_{\mathcal{P}}(1) = 1,\\
&\xi_{\mathcal{P}}(x+1) = 1 + \xi_{\mathcal{P}}(\eta(x)) + \xi_{\mathcal{P}}(t - \eta(x)), \qquad x > 0,
\end{aligned}$$

где $\eta(x)$ — случайная величина, имеющая распределение P_x. В данном разделе мы будем считать, что распределения P_x имеют соответствующие плотности p_x. В данном разделе мы хотим показать, что при определённом условии на плотности p_x распределения случайных величин $\xi_{\mathcal{P}}(x)$ не зависят от конкретных мер P_x.

Теорема 2.1. *Рассмотрим два множества случайных величин $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, которые определены при неотрицательных t следующим образом:*

$$\begin{aligned}
&\xi_1(t) = \xi_2(t) = 0, \qquad t < 1\\
&\xi_1(1) = \xi_2(1) = 1\\
&\xi_1(t+1) = 1 + \xi_1(\eta_1(t)) + \xi_1(t - \eta_1(t)), \qquad t > 0\\
&\xi_2(t+1) = 1 + \xi_2(\eta_2(t)) + \xi_2(t - \eta_2(t)), \qquad t > 0,
\end{aligned}$$

где множества случайных величин $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ независимы и соответственно имеют плотности $p_{1,t}(x)$ и $p_{2,t}(x)$, определённые на отрезке $[0, t]$ и удовлетворяющие следующему соотношению:

$$p_{i,t}(u) + p_{i,t}(t-u) = \frac{2}{t}, \qquad \forall u \in [0, t], \quad \forall i = 1, 2. \tag{3}$$

Тогда распределения случайных величин $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ совпадают для всех положительных t.

Доказательство Теоремы 2.1: Определим два вспомогательных набора случайных величин

$$\eta_1'(t) = \begin{cases} \eta_1(t), & \eta_1(t) \leqslant \frac{t}{2}, \\ t - \eta_1(t), & \eta_1(t) > \frac{t}{2}, \end{cases}$$
$$\eta_2'(t) = \begin{cases} \eta_2(t), & \eta_2(t) \leqslant \frac{t}{2}, \\ t - \eta_2(t), & \eta_2(t) > \frac{t}{2}. \end{cases}$$

Покажем, что в силу (3)

$$\eta_1'(t) \overset{\mathrm{d}}{=} \eta_2'(t) \overset{\mathrm{d}}{=} \eta^*(t) \qquad \forall t \geqslant 0,$$

где $\eta^*(t)$ — равномерно распределённая на отрезке $\left[0, \frac{t}{2}\right]$ случайная величина. Заметим, что носителем случайных величин $\eta_1'(t)$ и $\eta_2'(t)$ является отрезок $[0, t/2]$. Теперь изучим их распределения. Зафиксируем интервал $< a, b >\subset [0, t/2]$. Вероятность попасть в этот интервал равна

$$P\left(\eta_1'(t) \in < a, b >\right) = P\left(\eta_1(t) \in < a, b >\right) + P\left(\eta_1(t) \in < t-b, t-a >\right) =$$
$$= \int_a^b p_{1,t}(u)du + \int_{t-b}^{t-a} p_{1,t}(u)du = \int_a^b p_{1,t}(u)du + \int_{t-b}^{t-a} \frac{2}{t} - p_{1,t}(t-u)du =$$
$$= \int_a^b \left(p_{1,t}(u) + \frac{2}{t} - p_{1,t}(u)\right) du = (b-a)\frac{2}{t} = P\left(\eta^*(t) \in < a, b >\right).$$

Аналогично ведёт себя распределение случайной величины $\eta_2(t)$.
Построим по набору $\eta^*(t)$ аналогичный набор случайных величин $\xi^*(t)$:

$$\xi^*(t) = 0 \qquad t < 1,$$
$$\xi^*(1) = 1,$$
$$\xi^*(t+1) = 1 + \xi^*(\eta^*(t)) + \xi^*(t - \eta^*(t)),$$

и покажем, что для любого натурального n при $t \leqslant n$

$$\xi_1(t) \overset{\mathrm{d}}{=} \xi^*(t). \tag{4}$$

Доказывать это будем по индукции по n. База при $n = 1$ следует напрямую из определения.Пусть для $n = m$ это верно. Докажем для $n = m + 1$. Пусть $(t + 1) \leqslant (m + 1)$. Не умаляя общности можно считать, что $t > 0$. Значит, $\xi_1(t + 1)$ и $\xi^*(t + 1)$ можно представить в следующем виде:

$$\xi_1(t+1) = 1 + \xi_1(\eta_1(t)) + \xi_1(t - \eta_1(t)), \tag{5}$$
$$\xi^*(t+1) = 1 + \xi^*(\eta^*(t)) + \xi^*(t - \eta^*(t)). \tag{6}$$

Докажем следующее равенство:

$$\xi_1(\eta_1(t)) + \xi_1(t - \eta_1(t)) = \xi_1(\eta_1'(t)) + \xi_1(t - \eta_1'(t)).$$

Заметим, что при $\eta_1(t) \leqslant \frac{t}{2}$ верно $\eta_1(t) = \eta_1'(t)$, и равенство очевидно. А при $\eta_1(t) > \frac{t}{2}$ имеет место соотношение $\eta_1(t) + \eta_1'(t) = t$, и значит

$$\xi_1(\eta_1(t)) + \xi_1(t - \eta_1(t)) = \xi_1(t - \eta_1'(t)) + \xi_1(\eta_1'(t)).$$

Тогда соотношение (5) можно переписать в виде

$$\xi_1(t+1) = 1 + \xi_1(\eta_1'(t)) + \xi_1(t - \eta_1'(t)).$$

Так как $\eta_1'(t) \overset{\mathrm{d}}{=} \eta^*(t)$, имеет место равенство

$$\xi_1(t+1) \overset{\mathrm{d}}{=} 1 + \xi_1(\eta^*(t)) + \xi_1(t - \eta^*(t)).$$

Теперь заметим, что по определению случайной величины $\eta^*(t)$,

$$\eta^*(t) \leqslant t - \eta^*(t) \leqslant t \leqslant m.$$

Значит, можно применить индукционное предположение:

$$\xi_1(\eta^*(t)) \overset{\mathrm{d}}{=} \xi^*(\eta^*(t)).$$
$$\xi_1(t - \eta^*(t)) \overset{\mathrm{d}}{=} \xi^*(t - \eta^*(t)).$$

Таким образом,

$$\xi_1(t+1) \overset{\mathrm{d}}{=} 1 + \xi^*(\eta^*(t)) + \xi^*(t - \eta^*(t)). \tag{7}$$

Наконец, из равенства (6) получаем требуемое соотношение (4).
Так как данное утверждение верно при всех натуральных n, то равенство (4) верно при всех положительных t. Аналогично, при всех положительных t верно равенство

$$\xi_2(t) \overset{\mathrm{d}}{=} \xi^*(t). \tag{8}$$

А из равенств (4) и (8) следует утверждение изначально поставленной теоремы. □

Следствие 1. *Пусть $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ — два семейства мер, удовлетворяющих соотношению* (3). *Тогда для любого $x \geqslant 0$ случайные величины $\xi_{\mathcal{P}_1}(x)$ и $\xi_{\mathcal{P}_2}(x)$ имеют одинаковые распределения.*

Данное следствие является прямой переформулировкой Теоремы 2.1.

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{P}$ — семейство мер, удовлетворяющее соотношению* (3)*. Тогда последовательность случайных величин*

$$\frac{\xi_{\mathcal{P}}(x) - \mathbb{E}\left\{\xi_{\mathcal{P}}(x)\right\}}{\sqrt{\mathbb{D}\left\{\xi_{\mathcal{P}}(x)\right\}}}$$

слабо сходится к стандартной нормальной случайной величине при $x \to \infty$.

Доказательство Следствия 2: Определим дополнительную систему мер $\mathcal{Q} = \{Q_x\}_{x\geqslant 1}$, где Q_x — равномерное распределение на отрезке $[0, x-1]$. Заметим, что в таком случае плотности q_x распределений Q_x удовлетворяют соотношению (3). Значит, согласно Следствию 1, случайные величины

$$\frac{\xi_{\mathcal{P}}(x) - \mathbb{E}\left\{\xi_{\mathcal{P}}(x)\right\}}{\sqrt{\mathbb{D}\left\{\xi_{\mathcal{P}}(x)\right\}}}$$

распределены так же как случайные величины

$$\frac{\xi_{\mathcal{Q}}(x) - \mathbb{E}\left\{\xi_{\mathcal{Q}}(x)\right\}}{\sqrt{\mathbb{D}\left\{\xi_{\mathcal{Q}}(x)\right\}}}.$$

А предел таких случайных величин показан в Теореме 1.3. $\square$

3 Задачи о дискретной парковке в классической постановке

Пусть n, l — два натуральных числа. Будем случайно помещать на отрезок $[0, n]$ интервалы длины l таким образом, чтобы начало и конец интервала были целыми числами. В случае $n < l$ такое невозможно, и процесс считается завершённым. Иначе поместим интервал $(t, t+l)$, где t — случайная величина, равномерно распределённая на множестве $\{0, \dots, n-l\}$. Он разбивает изначальный отрезок на два: $[0, t]$ и $[t+l, n]$, которые заполняются независимо по аналогичному правилу. Как только процесс завершается, что означает, что все оставшиеся свободными отрезки имеют длину меньше чем l, обозначим за $\xi_{n,l}$ суммарную длину расположенных интервалов.

Более формально задачу можно поставить следующим образом. Зафиксируем некоторое натуральное число $l \geqslant 2$ и рассмотрим последовательность случайных величин $\xi_{n,l}$:

$$\xi_{0,l} = \ldots = \xi_{l-1,l} = 0, \tag{9}$$

$$\xi_{n,l} := l + \xi^*_{\nu_n,l} + \xi^*_{n-\nu_n-l,l} \quad \text{при} \quad n \geq 3, \tag{10}$$

где $\xi^*_{\nu_n,l}$ и $\xi^*_{n-\nu_n-l,l}$ — независимые копии случайных величин $\xi_{\nu_n,l}$ и $\xi_{n-\nu_n-l,l}$ соответственно, а ν_n — независимая случайная величина, не зависящая от ξ^*_m, равновероятно принимающая значения $0, \dots, n-l$.

Следующая Теорема описывает поведение математических ожиданий случайных величин $\xi_{n,l}$

Теорема 3.1. *Для описанных выше случайных величин $\xi_{n,l}$ и любого $T > 1$ верно соотношение*

$$\mathbb{E}\{\xi_{n,l}\} = l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l + o(T^{-n}), \qquad (n \to +\infty), \tag{11}$$

где константа λ_l имеет вид

$$\lambda_l = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} dx. \tag{12}$$

Замечание 1. *Приблизительные значения констант λ_l таковы*

$$\lambda_2 = \frac{e^2-1}{2e^2},$$
$$\lambda_3 \approx 0.274551,$$
$$\lambda_4 \approx 0.200973,$$
$$\lambda_5 \approx 0.158455.$$

Замечание 2. *Данная теорема является уточнением полученного в книге [3] результата (Теорема 3.1, стр. 21). В теореме 3.1, [3] представлено выражение для* $\mathbb{E}\left\{\xi_{n,l}\right\}$ *с точностью* $O(1/n)$*, в то время как в Теореме* 3.1 *точность выражения для* $\mathbb{E}\left\{\xi_{n,l}\right\}$ *равна* $o(e^{-n})$.

Доказательство Теоремы 3.1: Доказательство этой теоремы аналогично доказательству Теоремы 3.1 из книги [3], однако в конце уделяется больше внимания анализу полученной производящей функции.

Зафиксируем некоторое натуральное значение $l \geqslant 2$. Пусть $E_{n,l} = \mathbb{E}(\xi_{n,l})$. Опустим для удобства индекс l и будем писать далее E_n вместо $E_{n,l}$ и ξ_n вместо $\xi_{n,l}$. Очевидно, что из начальных условий (9) на последовательность ξ_n следуют начальные условия на E_n:

$$E_0 = \ldots = E_{l-1} = 0.$$

А из соотношения (10) следует рекуррентное соотношение на эту последовательность:

$$E_{n+1} = l + \frac{1}{n+2-l} \sum_{i=0}^{n+1-l} \left(E_i + E_{n+1-i-l}\right).$$

Его можно переписать в следующем виде:

$$E_{n+1} = l + \frac{2}{n+2-l} \sum_{i=0}^{n+1-l} E_i.$$

Определив вспомогательную последовательность S_n:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} E_i,$$

можно получить следующие условия на последовательность S_n:

$$\begin{aligned} S_0 &= \ldots = S_{l-1} = 0, \\ S_{n+1} &= S_n + \frac{2}{n+2-l} S_{n+1-l} + l,\ n \geq l-1. \end{aligned} \tag{13}$$

Перепишем рекуррентное соотношение (13) в следующем виде:

$$(n+1)S_{n+1} - (l-1)S_{n+1} = nS_n - (l-2)S_n + 2S_{n+1-l} + ln - (l^2 - 2l).$$

Для вычисления последовательности S_n будем использовать метод производящей функции. Введём вещественную переменную z, домножим уравнение выше на z^{n+1}, и сложим все полученные выражения по n от $l-1$ до бесконечности.

$$\sum_{n=l}^{\infty} nS_n z^n - (l-1)\sum_{n=l}^{\infty} S_n z^n = z^2 \sum_{n=l-1}^{\infty} nS_n z^{n-1} - (l-2)z \sum_{n=l-1}^{\infty} S_n z^n$$
$$+ 2z^l \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n + lz \sum_{n=l-1}^{\infty} nz^n - (l^2-2l)\sum_{n=l}^{\infty} z^n.$$

Зная начальные значения последовательности S_n, все суммы в выражении выше можно заменить на суммы по всем неотрицательным целым n:

$$z\sum_{n=1}^{\infty} nS_n z^{n-1} - (l-1)\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} nS_n z^{n-1} - (l-2)z \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n$$
$$+2z^l \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n + lz^l \frac{l+2z-1-lz}{(1-z)^2} - (l^2-2l)\frac{z^l}{1-z},$$

что равносильно следующему

$$z\sum_{n=1}^{\infty} nS_n z^{n-1} - (l-1)\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n = z^2 \sum_{n=1}^{\infty} nS_n z^{n-1} - (l-2)z \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n$$
$$+2z^l \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n + \frac{lz^l}{(1-z)^2}.$$

Определив производящую функцию последовательности S_n, и её производную

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n,$$
$$G'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nS_n z^{n-1},$$

уравнение выше можно записать как дифференциальное уравнение:

$$zG'(z) - (l-1)G(z) = z^2 G'(z) - (l-2)zG(z) + 2z^l G(z) + \frac{lz^l}{(1-z)^2},$$

что эквивалентно следующему равенству

$$(z-z^2)G'(z) - (2z^l - z(l-2) + l - 1)G(z) = \frac{lz^l}{(1-z)^2}. \tag{14}$$

Обозначим правую часть этого равенства за $g(z)$. Решим сначала однородное уравнение, соответствующее уравнению (14):

$$(z-z^2)H'(z)-(2z^l-(l-2)z+(l-1))H(z)=0,$$

Откуда можно получить следующее уравнение:

$$(ln(H(z)))'=\frac{2z^l-(l-2)z+(l-1)}{z-z^2}=-2\frac{1-z^{l-1}}{1-z}+\frac{l-1}{z}+\frac{3}{1-z},$$

решением которого является набор функций

$$ln(H(z))=c^*-2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}+(l-1)\ln(z)-3ln(1-z),$$

где c^* — вещественная константа. Таким образом

$$H(z)=\frac{cz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^3}$$

для некоторой константы c. Значит, функция $G(z)$ представима в виде произведения $H(z)K(z)$, где функция $K(z)$ является решением следующего уравнения:

$$(z-z^2)H(z)K'(z)=g(z).$$

Подставив в него $g(z)$ и $H(z)$, получим

$$\frac{cz^le^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2}K'(z)=\frac{lz^l}{(1-z)^2},$$

$$cK'(z)=le^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}},$$

$$cK(z)=c_2+l\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx.$$

Перемножив функции $H(z)$ и $K(z)$, получим общее выражение для $G(z)$:

$$G(z)=\frac{z^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\left(c_2+l\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx\right)}{(1-z)^3}.$$

Заметим, что исходя из начального условия,

$$0=S_{l-1}=\left.\frac{G(z)}{z^{l-1}}\right|_{z=0}=c_2.$$

Таким образом, функция $G(z)$ равна

$$G(z) = \frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx}{(1-z)^3}. \tag{15}$$

Теперь выразим производящую функцию последовательности E_n через функцию $G(z)$. Из определения S_n следует, что

$$E_n = S_n - S_{n-1}.$$

Домножив это равенство на z^n и сложив по n от одного до бесконечности, получим соотношение

$$F(z) - E_0 = G(z) - S_0 - zG(z),$$

где $F(z)$ — производящая функция последовательности E_n. Так как $E_0 = S_0 = 0$, то их можно убрать. Тогда мы получим следующее выражение для функции $F(z)$:

$$F(z) = (1-z)G(z) = \frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx}{(1-z)^2}. \tag{16}$$

Теперь необходимо разложить функцию $F(z)$ в ряд. Для этого определим ещё одну функцию:

$$f(z) = z^{l-2}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx,$$

и перепишем с её помощью функцию (16):

$$F(z) = \frac{lz}{(1-z)^2}f(z). \tag{17}$$

Мы знаем разложение функции $z/(1-z)^2$ в ряд:

$$\frac{lz}{(1-z)^2} = l\sum_{n=0}^{\infty} nz^n.$$

Пусть функция $f(z)$ имеет следующее разложение в ряд

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i.$$

Подставив эти разложения в формулу (17), получим следующее выражение для E_n:

$$E_n = l\sum_{i=0}^{n} c_i(n-i) = l\left(\sum_{i=0}^{n} c_i\right) n - l\sum_{i=0}^{n} ic_i.$$

Заметим, что при $n \to \infty$,

$$\sum_{i=0}^{n} c_i \to \sum_{i=0}^{\infty} c_i = f(1) = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} dx = \lambda_l,$$

$$\sum_{i=0}^{n} ic_i \to \sum_{i=0}^{\infty} ic_i = f'(1) = 1 - l\lambda_l.$$

Изучим скорости вышеозначенных сходимостей. Для этого введём четыре вспомогательные функции

$$H_i(x) = e^{2x^i/i} = \sum_{k=0}^{\infty} h_{i,k}x^k,$$

$$\bar{H}_i(x) = e^{-2x^i/i} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{h}_{i,k}x^k,$$

$$W_i(x) = \prod_{j=1}^{i} H_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{i,k}x^k,$$

$$\bar{W}_i(x) = \prod_{j=1}^{i} \bar{H}_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{w}_{i,k}x^k.$$

Константы $h_{i,k}$ можно оценить следующим образом (здесь и далее $[x]$ обозначает целую часть вещественного числа x)

$$|h_{i,k}| \leqslant \frac{2^{k/i}i^{-k/i}}{[k/i]!} \leqslant \frac{2^k}{[k/l]!}.$$

Теперь по индукции докажем, что

$$|w_{i,k}| \leqslant \frac{2^k(k+1)^{i-1}}{[k/2^i l]!}.$$

База для $i=1$ доказана выше. Переход можно доказать следующим образом

$$|w_{i+1,k}| \leqslant \sum_{j=0}^{k} |w_{i,j}|\,|h_{i+1,k-j}| \leqslant \sum_{j=0}^{k} \frac{2^j(j+1)^i}{[j/2^i l]!}\frac{2^{k-j}}{[k-j/l]!}$$

$$\leqslant 2^k \sum_{j=0}^{k} \frac{(k+1)^{i-1}}{[k/2^{i+1}l]!} = \frac{2^k(k+1)^i}{[k/2^{i+1}l]!}.$$

Аналогичным образом можно показать что

$$|\bar{w}_{i,k}| \leqslant \frac{2^k(k+1)^{i-1}}{[k/2^i l]!}.$$

Функция $f(z)$ может быть записана следующим образом

$$f(z) = z^{l-2}\bar{W}_{l-1}(z)\int_0^z W_{l-1}(x)dx.$$

Для констант c_i в таком случае верна следующая оценка

$$\begin{aligned}|c_{k+l-2}| = \sum_{i=0}^{k-1} |\bar{w}_{l-1,i}| \frac{|w_{l-1,k-i-1}|}{k-i} &\leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \frac{2^i(i+1)^{l-2}}{[i/2^{l-1}l]!}\frac{2^{k-i-1}(k-i)^{l-2}}{[(k-i-1)/2^{l-1}l]!} \\ &\leqslant \frac{2^{k-1}k^{2l-2}}{[(k-1)/2^l l]!}.\end{aligned}$$

Покажем, что $|c_k| = o(T^{-k})$ для любого положительного T.

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}|c_k T^k| &\leqslant \lim_{k\to\infty}\frac{T^k 2^{k+1-l}(k+2-l)^{2l-2}}{[(k+1-l)/2^l l]!} \leqslant \lim_{c\to\infty}\frac{T^{c+l-1}2^c(c+1)^{2l-2}}{[c/2^l l]!} \\ &\leqslant \lim_{k\to\infty}\frac{T^{2^l lk+l-1}2^{2^l lk}(2^l lk+1)^{2l-2}}{k!} \\ &= T^{l-1}\lim_{k\to\infty}\frac{(T^{2^l l}+2^{2^l l})^k(2^l lk+1)^{2l-2}}{k!} = 0.\end{aligned}$$

что заканчивает доказательство теоремы. □

Отдельно можно рассмотреть случай $l = 2$. Тогда выражения для $\xi_{n,2}$ можно выписать явно.

Теорема 3.2. *Для описанных выше случайных величин $\xi_{n,2}$ верно соотношение*

$$\mathbb{E}\left\{\xi_{n,2}\right\} = n - \frac{n}{e^2}\frac{\Gamma(n+1,-2)}{n!} - \frac{(-2)^{n+1}}{n!} - \frac{2}{e^2}\frac{\Gamma(n+1,-2)}{n!}.$$

Доказательство Теоремы 3.2: Сохраним обозначения из доказательства Теоремы 3.1. Можно воспользоваться уже полученным соотношением (15). Получаем, что

$$G(z) = \frac{2ze^{-2z}\int_0^z e^{2x}dx}{(1-z)^3} = \frac{z - ze^{-2z}}{(1-z)^3}.$$

Разложим функцию G в ряд. Для этого заметим, что

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i,$$

значит,

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} z^i\right)^3 = \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+2}^2 z^i.$$

Также,

$$1 - e^{-2z} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i!} z^i.$$

Перемножив эти два ряда, получим

$$\frac{1-e^{-2z}}{(1-z)^3} = -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-2)^i}{i!} z^i \sum_{i=0}^{\infty} C_{i+2}^2 z^i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i z^i,$$

где

$$c_n = -\sum_{i=1}^{n} \frac{(-2)^i C_{n-i+2}^2}{i!} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-2)^{i-1}(n-i+2)(n-i+1)}{i!}.$$

Получаем, что ряд функции $G(z)$ равен

$$\begin{aligned} G(z) &= z \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(-2)^{i-1}(n-i+2)(n-i+1)}{i!} \right) z^n \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-2)^{i-1}(n-i+1)(n-i)}{i!} \right) z^n. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}\left\{\xi_n\right\} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-2)^{i-1}(n-i+1)(n-i)}{i!}.$$

Отсюда можно получить выражение для $\mathbb{E}\left\{\xi_n\right\}$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\{\xi_n\right\} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(-2)^{i-1}(n-i+1)(n-i)}{i!} - \sum_{i=1}^{n-2} \frac{(-2)^{i-1}(n-i)(n-i-1)}{i!} \\ &= -\frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{2(-2)^{i-1}(n-i)}{i!} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2(-2)^{i-1}(n-i)}{i!}. \end{aligned}$$

Докажем следующую формулу:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c^{i-1}(n-i)}{i!} = \frac{c^n - e^c\Gamma(n+1,c)}{\Gamma(n+1)} + \frac{1}{c}\left(\frac{e^c\Gamma(n+1,c)}{\Gamma(n)} - n\right)$$
$$= \frac{c^n}{n!} + \frac{ne^c\Gamma(n+1,c)}{cn!} - \frac{e^c\Gamma(n+1,c)}{n!} - \frac{n}{c}. \tag{18}$$

Для этого воспользуемся формулой для усечённой гамма-функции

$$\Gamma(n+1,c) = n!e^{-c}\sum_{i=0}^{n}\frac{c^i}{i!}$$

и распишем с её помощью левую часть формулы (18)

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c^{i-1}(n-i)}{i!} = \frac{n}{c}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{c^i}{i!} - \sum_{i=1}^{n-1}\frac{c^{i-1}}{(i-1)!}$$
$$= \frac{n}{c}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{c^i}{i!} - 1 - \frac{c^n}{n!}\right) - \sum_{i=0}^{n-2}\frac{c^i}{i!}$$
$$= \frac{n}{c}\sum_{i=0}^{n}\frac{c^i}{i!} - \frac{n}{c} - \frac{c^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{i=0}^{n-2}\frac{c^i}{i!}$$
$$= \frac{ne^c}{n!c}n!e^{-c}\sum_{i=0}^{n}\frac{c^i}{i!} - \frac{n}{c} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{c^i}{i!}$$
$$= \frac{e^c}{c\Gamma(n)}\Gamma(n+1,c) - \frac{n}{c} - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{c^i}{i!}$$
$$= \frac{1}{c}\left(\frac{e^c\Gamma(n+1,c)}{\Gamma(n)} - n\right) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{c^i}{i!}.$$

Последнюю сумму можно вычислить следующим образом

$$-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{c^i}{i!} = \frac{c^n}{n!} - \sum_{i=0}^{n}\frac{c^i}{i!} = \frac{c^n}{\Gamma(n+1)} - \frac{e^c}{\Gamma(n+1)}n!e^{-c}\sum_{i=0}^{n}\frac{c^i}{i!} = \frac{c^n - e^c\Gamma(n+1,c)}{\Gamma(n+1)}.$$

Таким образом, мы доказали формулу (18). Подставив в неё $c = -2$ получим

$$\mathbb{E}\left\{\xi_n\right\} = n - \frac{n}{e^2}\frac{\Gamma(n+1,-2)}{n!} - \frac{(-2)^{n+1}}{n!} - \frac{2}{e^2}\frac{\Gamma(n+1,-2)}{n!}.$$

$\square$

Также, можно получить аналогичный результат для асимптотического поведения дисперсий случайных величин $\xi_{n,l}$

Теорема 3.3. *Для описанных выше случайных величин $\xi_{n,l}$ верно соотношение*

$$\mathbb{D}\{\xi_{n,l}\} = K_0(n-l) + o(1).$$

где константа K_0 имеет вид

$$K_0 = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \Bigg(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l\right) Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n \Bigg) dz$$

$$- 4e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \frac{z-z^l}{1-z} \times \left(\frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{y^i}{i}} dy}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 dz,$$

и константы Z_{l-1}, Z_0 и L_n определены следующим образом

$$\begin{aligned}
Z_{l-1} &= \frac{l^3}{6}\left(\lambda_l^2(14l^2 - 9l + 1) + \lambda_l(6 - 18l) + 6\right),\\
Z_0 &= (l\lambda_l - l)^2,\\
L_n &= (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)^2.
\end{aligned}$$

Замечание 3. *Константа K_0 конечна, так как по правилу Лопиталя*

$$\lim_{x\to 0} \frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{y^i}{i}} dy}{(1-z)} - \frac{\lambda_l l z}{(1-z)} = \lambda_l l^2 - l.$$

Доказательство Теоремы 3.3: Определим функцию

$$\delta(n) = \mathbb{E}\{\xi_n\} - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l).$$

Согласно Теореме 3.1, $\delta(n) = o(e^{-n})$, и значит ряд $\sum \delta(n)z^n$ абсолютно сходится на всей вещественной прямой. Как и в доказательстве предыдущей

Теоремы мы можем опустить индекс l. Определим вспомогательную последовательность

$$L_n = \mathbb{E}\left\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l))^2\right\}.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\{\xi_n\} &= \mathbb{E}\left\{(\xi_n - E\{\xi_n\})^2\right\} = \mathbb{E}\left\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l) - \delta(n))^2\right\} \\ &= L_n - 2\delta(n)E\{\xi_n\} + \delta^2(n) = L_n + o(e^{-n}).\end{aligned}$$

Значит, достаточно найти асимптотическое поведение последовательности L_n. Для $n \geqslant l$ имеет место следующее соотношение

$$\begin{aligned}L_n &= \mathbb{E}\left\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l))^2\right\} = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l))^2 | i\right\}\right\} = \\ &= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{((\xi_{i-1} - (l\lambda_l(i-1) + l^2\lambda_l - l)) \\ &\quad + (\xi_{n+1-l-i} - (l\lambda_l(n+1-i-l) + l^2\lambda_l - l)))^2 | i\}\} = \\ &= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{(\xi_{i-1} - (l\lambda_l(i-1) + l^2\lambda_l - l))^2 | i\right\}\right\} \\ &\quad + \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\{(\xi_{n+1-l-i} - (l\lambda_l(n+1-i-l) + l^2\lambda_l - l))^2 | i\}\right\} \\ &\quad + 2\mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\{(\xi_{i-1} - (l\lambda_l(i-1) + l^2\lambda_l - l))^2 | i\}\right. \\ &\qquad \left. \times \mathbb{E}\left\{(\xi_{n+1-l-i} - (l\lambda_l(n+1-i-l) + l^2\lambda_l - l))^{2-j} | i\right\}\right\} = \\ &= \frac{1}{n+1-l}\sum_{i=0}^{n-l} L_i + L_{n-l-i} + 2\delta(i)\delta(n-l-i).\end{aligned}$$

Определим вспомогательную последовательность

$$\alpha_n = 2\sum_{i=0}^{n-l} \delta(i)\delta(n-l-i).$$

Тогда последовательность L_n при $n \geqslant l$ удовлетворяет следующему рекуррентному соотношению:

$$L_n = \frac{2}{n+1-l}\sum_{i=0}^{n-l} L_i + \alpha_n. \tag{19}$$

Для $n < l$ мы знаем, что

$$L_n = (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)^2.$$

Определим последовательность $Z_n = \sum_{i=0}^{n} L_i$. Для этой последовательности, согласно соотношению (23) при $n \geqslant l$ верно соотношение

$$nZ_n - (l-1)Z_n - (n-1)Z_{n-1} + (l-2)Z_{n-1} = 2Z_{n-l} + (n+1-l)\alpha_2(n).$$

Вычислим производящую функцию последовательности Z_n. Для этого домножим равенство, написанное выше, на z^n и сложим по $n \geqslant l$.

$$\sum_{n=l}^{\infty} nZ_n z^n - (l-1)\sum_{n=l}^{\infty} Z_n z^n - \sum_{n=l-1}^{\infty} nZ_n z^{n+1} + (l-2)\sum_{n=l-1}^{\infty} Z_n z^{n+1}$$
$$= 2\sum_{n=0}^{\infty} Z_n z^{n+l} + \sum_{n=l}^{\infty} (n+1-l)\alpha_2(n) z^n.$$

Определим неполную производящую функцию последовательности Z_n

$$G(z) = \sum_{n=l}^{\infty} Z_n z^n.$$

Её производная равна

$$G'(z) = \sum_{n=l}^{\infty} nZ_n z^{n-1},$$

и следовательно

$$zG'(z) - (l-1)G(z) - z^2G'(z) - (l-1)Z_{l-1}z^l + (l-2)zG(z) + (l-2)Z_{l-1}z^l$$
$$= 2z^lG(z) + 2\sum_{n=0}^{l-1} Z_n z^{n+l} + \sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^n,$$

что можно переписать следующим образом

$$(z-z^2)G'(z)-(2z^l-z(l-2)+l-1)G(z) = Z_{l-1}z^l+2\sum_{n=0}^{l-1} Z_n z^{n+l}+\sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^n.$$

Левая часть данного уравнения аналогична левой части уравнения (14). Значит, функция $G(z)$ в данном случае также представима в виде произведения $H(z)K(z)$, где

$$H(z) = \frac{cz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^3},$$

а $K(z)$ удовлетворяет уравнению

$$(z-z^2)H(z)K'(z) = Z_{l-1}z^l + 2\sum_{n=0}^{l-1} Z_n z^{n+l} + \sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^n.$$

Преобразуем его следующим образом

$$\frac{cz^l e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2}K'(z) = Z_{l-1}z^l + 2\sum_{n=0}^{l-1} Z_n z^{n+l} + \sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^n,$$

$$\frac{ce^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2}K'(z) = Z_{l-1} + 2\sum_{n=0}^{l-1} Z_n z^{n} + \sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^{n-l},$$

$$\begin{aligned}\frac{ce^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)}K'(z) = (1-z)Z_{l-1} + 2(1-z)\sum_{n=0}^{l-1} Z_n z^{n} \\ + (1-z)\sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^{n-l},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{ce^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)}K'(z) = (1-z)Z_{l-1} + 2Z_0 - 2Z_{l-1}z^l + \sum_{n=1}^{l-1} L_n z^{n} \\ + (1-z)\sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^{n-l}.\end{aligned}$$

Значит, производная функции $K(z)$ представима в виде

$$\begin{aligned}cK'(z) = e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\left(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l\right)Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n\right) \\ + e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\left((1-z)^2\sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^{n-l}\right).\end{aligned}$$

Изучим это представление. Так как мы знаем значения L_n при $n < l$, первое слагаемое можно преобразовать следующим образом

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n &= \sum_{n=1}^{l-1}(l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)^2 z^n, \\ Z_0 &= L_0 = (l\lambda_l - l)^2, \\ Z_{l-1} &= \sum_{n=0}^{l-1}(l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)^2 = \frac{l^3}{6}\left(\lambda_l^2(14l^2 - 9l + 1) + \lambda_l(6 - 18l) + 6\right).\end{aligned}$$

Для вычисления второго найдём производящую функцию последовательности $\delta(n)$ используя производящую функцию последовательности $\mathbb{E}\{\xi_n\}$, приведённую в доказательстве Теоремы 3.1.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\delta(n)z^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}\left\{\xi_n\right\}z^n - \sum_{n=0}^{\infty}(l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)z^n \\
&= \frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx}{(1-z)^2} - \sum_{n=0}^{\infty}(l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)z^n \\
&= \frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx}{(1-z)^2} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)^2}.
\end{aligned}$$

Тогда вторую сумму можно записать следующим образом

$$\begin{aligned}
\sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)\alpha_2(n)z^{n-l} &= 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sum_{i=0}^{n}\delta(i)\delta(n-i)z^n \\
&= 2z\left(\left(\frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx}{(1-z)^2} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)^2}\right)^2\right)' \\
&+ 2\left(\frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}dx}{(1-z)^2} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)^2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, функция $cK(z)$ представима в виде

$$
\begin{aligned}
cK'(x) = &\int_0^x e^{2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \\
&\quad \times \left(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l \right) Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n \right) dz \\
&+ 2\int_0^x z e^{2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \\
&\quad \times \left(\left(\frac{l z^{l-1} e^{-2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int_0^z e^{2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{k^i}{i}} dk}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 \right)' dz \\
&+ 2\int_0^x e^{2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \\
&\quad \times \left(\frac{l z^{l-1} e^{-2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int_0^z e^{2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} dx}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 dz \\
&+ C.
\end{aligned}
$$

Заметим, что так как разложение функции $G(z)$ в ряд начинается с коэффициента с номером l, то $C = 0$. Таким образом,

$$
G(z) = \frac{z^{l-1} e^{-2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^3} K_0(z),
$$

где

$$
\begin{aligned}
K_0(x) = &\int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \\
&\times \left(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l \right) Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n \right) dz \\
&+ 2\int\limits_0^x z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \\
&\times \left(\left(\frac{l z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{k^i}{i}} dk}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 \right)' dz \\
&+ 2\int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \\
&\times \left(\frac{l z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} dx}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 dz.
\end{aligned}
$$

Исследуем второе слагаемое в этой сумме. Проинтегрировав его по частям, получим

$$K_0(x) = \int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}$$

$$\times \left(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l\right) Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n\right) dz$$

$$+ 2xe^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \left(\frac{lx^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} dz}{(1-x)} - \frac{(1-x)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l x}{(1-x)} \right)^2$$

$$- 4\int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}$$

$$\times \sum_{i=1}^{l} z^i \left(\frac{lz^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{y^i}{i}} dy}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 dz.$$

Домножив обе части выражения для функции $G(z)$ на $(1-z)$ получим

$$Z_l z^l + \sum_{n=l+1}^{\infty} L_n z^n = \frac{z^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2} K_0(z).$$

Используя рассуждения, аналогичные приведённым в доказательстве Теоремы 3.1, можно получить соотношение

$$L_n = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} K_0(1)n - \left(z^{l-2}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} K_0(z) \right)'\Bigg|_{z=1} + o(1)$$

$$= e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} K_0(1)n - le^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} K_0(1) - e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} K_0'(1) + o(1).$$

Заметим что из определения λ_l следует, что

$$
\begin{aligned}
K_0 &:= e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} K_0(1) \\
&= e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \\
&\qquad\qquad \times \left(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l\right) Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n \right) dz \\
&\quad + 2\left(\lambda_l l^2 - l + l\left(x^{l-2} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} dz\right)'\Bigg|_{x=1}\right)^2 \\
&\quad - 4e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \\
&\qquad\qquad \times \sum_{i=1}^{l} z^i \left(\frac{l z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{y^i}{i}} dy}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 dz.
\end{aligned}
$$

Написанное выше выражение для константы K_0 можно записать следующим образом

$$K_0 = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}$$

$$\times \left(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l \right) Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n \right) dz$$

$$+ 2\left(\lambda_l l^2 - l + l\left((l-2)\lambda_l - 2(l-1)\lambda_l + 1\right)\right)^2$$

$$- 4e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}$$

$$\times \sum_{i=1}^{l} z^i \left(\frac{l z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{y^i}{i}} dy}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 dz.$$

Значит,

$$K_0 = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}$$

$$\times \left(\left((1-z)^2 - 2(1-z)z^l \right) Z_{l-1} + 2(1-z)Z_0 + (1-z)\sum_{n=1}^{l-1} L_n z^n \right) dz$$

$$- 4e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} \int\limits_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}$$

$$\times \frac{z - z^l}{1-z} \left(\frac{l z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int\limits_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{y^i}{i}} dy}{(1-z)} - \frac{(1-z)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l z}{(1-z)} \right)^2 dz.$$

Также

$$
\begin{aligned}
K_0' &:= e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}} K_0'(1) \\
&= 2\left(xe^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\right)'\Bigg|_{x=1}\left(\lambda_l l^2 - l + l\left(lx^{l-2}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}dz\right)'\Bigg|_{x=1}\right)^2 \\
&+ 4xe^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\left(\lambda_l l^2 - l + l\left(lx^{l-2}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}dz\right)'\Bigg|_{x=1}\right) \\
&\times \left(\frac{lx^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}dz}{(1-x)} - \frac{(1-x)(\lambda_l l^2 - l) + \lambda_l l x}{(1-x)}\right)' \\
&- 4l\left(\lambda_l l^2 - l + l\left(lx^{l-2}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\int\limits_0^x e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}dz\right)'\Bigg|_{x=1}\right)^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Получаем необходимое равенство

$$L_n = K_0(n-l) + o(1).$$

□

В следующей теореме эти соотношения обобщаются на все центральные моменты случайных величин $\xi_{n,l}$

Теорема 3.4. *Для определённой выше последовательности случайных величин для любого натурального k при $n \to \infty$ верно соотношение*

$$\mathbb{E}\left\{(\xi_{n,l} - \mathbb{E}\{\xi_{n,l}\})^k\right\} = n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(c_k + o(1)),$$

где $c_k \in \mathbb{R}$, и при чётных k для констант c_k верно равенство

$$c_k = c_2^{k/2}(k-1)!!. \tag{20}$$

Из этой теоремы, в частности, следует асимптотическая нормальность последовательности $\xi_{n,l}$ при $n \to \infty$

Теорема 3.5. *Последовательность случайных величин*

$$\frac{\xi_{n,l} - \mathbb{E}\{\xi_{n,l}\}}{\sqrt{\mathbb{D}\{\xi_{n,l}\}}}$$

слабо сходится к стандартной нормальной случайной величине

Доказательство Теоремы 3.4: Для доказательства нам понадобятся следующие леммы, доказательства которых размещены в Приложении

Лемма 3.6. *Пусть* $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, *а так же* $f_1(n), f_2(n)$ *— две последовательности, определённые для* $n \in \mathbb{N}$, *такие что при* $n \to \infty$.

$$f_1(n) \to 0, \qquad f_2(n) \to 0.$$

Тогда существует такая последовательность $f(n)$, *что при* $n \to \infty$

$$f(n) \to 0,$$

а также

$$\sum_{i=0}^{n-l} i^a (c_1 + f_1(i))(n-l-i)^b (c_2 + f_2(n-l-i)) = (n-l)^{a+b+1}(c + f(n)),$$

где константа c *имеет вид*

$$c = c_1 c_2 \frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

Лемма 3.7. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ *и* $c \in \mathbb{R}$. *Пусть также есть некоторая последовательность* $f(n)$, *определённая для* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *такая что* $f(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда существует некоторая функция* $f^*(n)$, *также определённая для* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *что* $f^*(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *а так же*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha (c + f(n)) z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{i=0}^{\infty} n^{\alpha+1}\left(\frac{c}{\alpha+1} + f^*(n)\right) z^n$$

Лемма 3.8. *Пусть* $\alpha, c \in \mathbb{R}$. *Пусть также определены последовательности* $f(n)$, v_n *определённые для* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *такие что* $f(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *и* $\sum_{n=0}^{\infty} |v_n| < \infty$. *Тогда существует некоторая функция* $f^*(n)$, *также определённая для* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *что* $f^*(n) \to 0$ *при* $n \to \infty$,*и*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha (c + f(n)) z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_i z^n\right) = \sum_{i=0}^{\infty} n^{\alpha+\frac{1}{2}} f^*(n) z^n$$

Теперь продолжим доказательство Теоремы 3.4. Определим вспомогательную последовательность

$$L_{k,n} = \mathbb{E}\left\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l))^k\right\}.$$

Тогда для $n \geqslant l$ имеет место следующее рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned}
L_{k,n} &= \mathbb{E}\left\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l))^k\right\} = \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l))^k | i\right\}\right\} \\
&= \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{((\xi_{i-1} - (l\lambda_l(i-1) + l^2\lambda_l - l) \\
&\quad + (\xi_{n+1-l-i} - (l\lambda_l(n+1-i-l) + l^2\lambda_l - l)))^k | i\}\} \\
&= \frac{1}{n+1-l}\sum_{i=0}^{n-l}\sum_{j=0}^{k} C_k^j L_{j,i} L_{k-j,n-l-i},
\end{aligned} \tag{21}$$

а для $n < l$

$$L_{k,n} = (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)^k$$

Будем доказывать по индукции что для всех $k \geqslant 1$

$$L_{k,n} = n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(c_k + f_k(n)), \tag{22}$$

где

$$f_k(n) \to 0 \qquad n \to \infty.$$

Из Теорем 3.1 и 3.3 мы знаем это соотношение для $k = 1$ и $k = 2$, причем $c_1 = 0$. Заметим, что соотношение (21) можно переписать в виде

$$L_{k,n} = \frac{2}{n+1-l}\sum_{i=0}^{n-l} L_{k,i} + \frac{1}{n+1-l}\sum_{i=0}^{n-l}\sum_{j=1}^{k-1} C_k^j L_{j,i} L_{k-j,n-l-i}. \tag{23}$$

Заметим, что второе слагаемое не зависит от последовательности $L_{k,n}$. Определим последовательность $r_{k,n}$:

$$r_{k,n} = \sum_{i=0}^{n-l}\sum_{j=1}^{k-1} C_k^j L_{j,i} L_{k-j,n-l-i}.$$

Рассмотрим отдельно эту последовательность. По Лемме 3.6 и индукционному предположению,

$$\sum_{i=0}^{n-l} L_{j,i} L_{k-j,n-l-i} = c_j c_{k-j} \frac{\left[\frac{j}{2}\right]! \left[\frac{k-j}{2}\right]!}{\left(\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1\right)!}(n-l)^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{k-j}{2}\right]+1} + o\left(n^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{k-j}{2}\right]+1}\right).$$

Таким образом, для $k \geqslant 3$

$$r_{k,n} = \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j c_j c_{k-j} \frac{\left[\frac{j}{2}\right]! \left[\frac{k-j}{2}\right]!}{\left(\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1\right)!}(n-l)^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{k-j}{2}\right]+1} + o(n^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{k-j}{2}\right]+1}).$$

Будем далее считать что $k \geqslant 4$. Рассмотрим сумму $\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1$. Заметим, что:

Для нечётного k эта сумма всегда равна $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$.
Для чётного k и нечётного j она равна $\left[\frac{k}{2}\right]$.
Для чётного k и чётного j она равна $\left[\frac{k}{2}\right] + 1$.

Значит, если k нечётно, то

$$r_{k,n} = (n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j c_j c_{k-j} \frac{\left[\frac{j}{2}\right]! \left[\frac{k-j}{2}\right]!}{\left(\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1\right)!} + o(n^{\left[\frac{k}{2}\right]+1}).$$

Определим константу c_k^* в данном случае как

$$c_k^* = \sum_{j=1}^{k-1} C_k^j c_j c_{k-j} \frac{\left[\frac{j}{2}\right]! \left[\frac{k-j}{2}\right]!}{\left(\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1\right)!}.$$

Если k чётно, то

$$r_{k,n} = (n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} \sum_{\substack{j=2 \\ 2|j}}^{k-2} C_k^j c_j c_{k-j} \frac{\left[\frac{j}{2}\right]! \left[\frac{k-j}{2}\right]!}{\left(\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1\right)!} + o(n^{\left[\frac{k}{2}\right]+1}).$$

Константа c_k^* в таком случае определяется как

$$c_k^* = \sum_{\substack{j=2 \\ 2|j}}^{k-2} C_k^j c_j c_{k-j} \frac{\left[\frac{j}{2}\right]! \left[\frac{k-j}{2}\right]!}{\left(\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{k-j}{2}\right] + 1\right)!}.$$

Упростим выражение для этой константы. Так как k и j чётные, определим $k = 2a$, $j = 2b$. Тогда

$$c_k = \sum_{b=1}^{a-1} c_{2b} c_{2a-2b} \frac{b!(a-b)!}{(a+1)!}.$$

В силу индукционного предположения (20) так как $2b < k$, $2(a-b) < k$,

$$\begin{aligned} c_{2b} =& c_2^b (2b-1)!! = c_2^b \frac{(2b)!}{2^b b!}, \\ c_{2(a-b)} =& c_2^{a-b} (2a-2b-2)!! = c_2^{a-b} \frac{(2a-2b)!}{2^{a-b}(a-b)!}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
c_k^* &= \sum_{b=1}^{a-1} C_{2a}^{2b} c_2^b \frac{(2b)!}{2^b b!} c_2^{a-b} \frac{(2a-2b)!}{2^{a-b}(a-b)!} \frac{b!(a-b)!}{(a+1)!} \\
&= \frac{c_2^a}{2^a} \sum_{b=1}^{a-1} C_{2a}^{2b} \frac{(2b)!(2a-2b)!}{(a+1)!} = \frac{c_2^a (2a)!}{2^a (a+1)!}(a-1) = c_2^a \frac{a-1}{a+1}(2a-1)!!.
\end{aligned}
$$

Вернув на место k получим

$$
c_k^* = \frac{k-2}{k+2} c_2^{\left[\frac{k}{2}\right]} (k-1)!!.
$$

Значит, для любого k мы знаем следующее асимптотическое соотношение для $r_{k,n}$:

$$
r_{k,n} = (n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} (c_k^* + o(1)).
$$

Определим последовательность $f^*(n)$ следующим образом

$$
f_k^*(n) = \frac{r_{k,n}}{(n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]}} - c_k^*.
$$

В таком случае при $n \to \infty$ верно $f_k^*(n) \to 0$, а также

$$
r_{k,n} = (n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]+1} (c_k^* + f_k^*(n))
$$

Вернёмся к рекуррентному соотношению (23). Определим вспомогательную последовательность

$$
S_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} L_{k,i}.
$$

Тогда для этой последовательности верно соотношение

$$
\begin{gathered}
S_{k,n} - S_{k,n-1} = \frac{2}{n+1-l} S_{k,n-l} + \frac{1}{n+1-l} r_{k,n}, \\
(n+1-l) S_{k,n} - (n+1-l) S_{k,n-1} = 2 S_{k,n-l} + r_{k,n}.
\end{gathered}
$$

Определим производящие функции последовательностей $S_{n,k}$ и $r_{n,k}$

$$
\begin{aligned}
F_k(z) &= \sum_{i=l}^{\infty} S_{k,i} z^i, \\
h_k(z) &= \sum_{i=l}^{\infty} r_{i,k} z^{i-l}.
\end{aligned}
$$

Из определения $r_{i,k}$ очевидно, что $h_k(z)$ сходится при $|z| < 1$. А так как для любого n верно неравенство

$$|L_{k,n}| \leqslant (n + l\lambda_l n + l^2\lambda_l + l)^k,$$

то ряд $F_k(z)$ также сходится при $|z| < 1$. Тогда

$$F_k'(z) = \sum_{i=l}^{\infty} iS_{k,i}z^{i-1}.$$

Домножив соотношение для $S_{k,n}$ на z^n и сложив по $n \geqslant l$ получим

$$\sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)S_{k,n}z^n - \sum_{n=l}^{\infty}(n+1-l)S_{k,n-1}z^n = 2z^l\sum_{n=l}^{\infty}S_{k,n-l}z^{n-l} + z^l h_k(z).$$

Преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned}
&z\sum_{n=l}^{\infty}nS_{k,n}z^{n-1} - (l-1)\sum_{n=l}^{\infty}S_{k,n}z^n - z^2\sum_{n=l}^{\infty}(n-1)S_{k,n-1}z^{n-2} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + (l-2)z\sum_{n=l}^{\infty}S_{k,n-1}z^{n-1} \\
&= 2z^l\sum_{n=0}^{\infty}S_{k,n}z^n + z^l h_k(z), \\
&zF_k'(z) - (l-1)F_k(z) - z^2F_k'(z) - (l-1)S_{k,l-1}z^l + (l-2)zF_k(z) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + (l-2)S_{k,l-1}z^l \\
&= 2z^l\sum_{n=0}^{l-1}S_{k,n}z^n + 2z^lF_k(z) + z^l h_k(z).
\end{aligned}$$

В итоге получаем соотношение

$$(z-z^2)F_k'(z) - \left(2z^l - z(l-2) + l - 1\right)F_k(z) = 2z^l\sum_{n=0}^{l-1}S_{k,n}z^n + S_{k,l-1}z^l + z^l h_k(z).$$

Определив дополнительно функцию

$$g_k(z) = 2\sum_{n=0}^{l-1}S_{k,n}z^n + S_{k,l-1}.$$

мы получаем, что

$$(z-z^2)F_k'(z) - \left(2z^l - z(l-2) + l - 1\right)F_k(z) = z^l g_k(z) + z^l h_k(z).$$

Данное дифференциальное уравнение эквивалентно уравнению (14) из доказательства Теоремы 3.1. Значит, функция $F_k(z)$ принимает вид

$$F_k(z) = H(z)K_k(z),$$

где

$$H(z) = \frac{cz^{l-1}e^{-2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^3},$$

а также верно соотношение

$$(z-z^2)H(z)K_k'(z) = z^l g_k(z) + z^l h_k(z).$$

Из последнего равенства следует, что

$$cK_k'(z) = e^{2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2 g_k(z) + e^{2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2 h_k(z).$$

Таким образом,

$$K_k(z) = \int_0^z e^{2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2 g_k(x)dx + \int_0^z e^{2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2 h_k(x)dx. \tag{24}$$

Также заметим, что

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{\infty} L_{k,i}z^i &= \sum_{i=0}^{l} L_{k,i}z^i + \sum_{i=l+1}^{\infty}(S_{k,i}-S_{k,i-1})z^i \\
&= \sum_{i=0}^{l} L_{k,i}z^i + \sum_{i=l+1}^{\infty} S_{k,i}z^i - z\sum_{i=l}^{\infty} S_{k,i}z^i \\
&= \sum_{i=0}^{l} L_{k,i}(z^i - z^l) + (1-z)F_k(z) \\
&= \sum_{i=0}^{l} L_{k,i}(z^i - z^l) + \frac{z^{l-1}e^{-2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2}K_k(z).
\end{aligned} \tag{25}$$

Рассмотрим случай $k=3$ отдельно. Заметим, что в этом случае функция $K_3(z)$ конечна в точке $z=1$, а значит, аналогично Теореме 3.3,

$$L_{3,n} = n(Q_0 + o(1)),$$

где константа Q_0 определена следующим образом:

$$Q_0 = e^{-2\sum_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}}K_3(1).$$

В дальнейшем можно считать что $k \geqslant 4$. Проинтегрируем по частям второе слагаемое в равенстве (24) несколько раз. Целью данного процесса является отделение важных для асимптотики слагаемых от неважных, а также вынесение в важных слагаемых множителей $e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}$ и $(1-x)$ из-под интеграла с целью их дальнейшего сокращения.

$$\begin{aligned}
\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2 h_k(x)dx = e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int_0^z h_k(x)dx \\
+ 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int_0^z x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx \\
- 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx \\
+ 4e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z x^{l-1}\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx \\
+ 4\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\sum_{i=0}^{l-2}x^i\int_0^x\int_0^t u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudtdx \\
- 8\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\sum_{i=0}^{l-2}x^i\int_0^x t^{l-1}\int_0^t u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudtdx.
\end{aligned} \tag{26}$$

Более подробно этот процесс описан в Приложении.

Подставив полученное выше выражение для $K_k(z)$ в равенство (25) получим

$$\begin{aligned}
\sum_{i=l}^{\infty}L_{k,i}z^i = \sum_{i=0}^{l}L_{k,i}(z^i-z^l) + \frac{z^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2}\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2 g_k(x)dx \\
+ z^{l-1}\int\limits_0^z h_k(x)dx + 2\frac{z^{l-1}\int_0^z x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx}{(1-z)} \\
- 2\frac{z^{l-1}\int_0^z\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx}{(1-z)^2} + 4\frac{z^{l-1}\int_0^z x^{l-1}\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx}{(1-z)^2} \\
+ 4\frac{z^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\sum\limits_{i=0}^{l-2}x^i\int_0^x\int_0^t u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudtdx}{(1-z)^2} \\
- 8\frac{z^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\sum\limits_{i=0}^{l-2}x^i\int_0^x t^{l-1}\int_0^t u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudtdx}{(1-z)^2}.
\end{aligned}$$

Будем рассматривать каждое слагаемое отдельно. Заметим, что первое слагаемое не влияет на асимптотику $L_{k,i}$. Второе слагаемое, аналогично случаю $k=3$, представляется в виде

$$\frac{z^{l-1}e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}}{(1-z)^2}\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2 g_k(x)dx = \sum_{n=l}^{\infty} n(Q_1+o(1))z^n,$$

где константа Q_1 представляется в виде

$$Q_1 = e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{1}{i}}\int_0^1 e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2 g_k(x)dx.$$

Рассмотрим третье и четвёртое слагаемое. Заметим, что исходя из определения функции $h(z)$,

$$\begin{aligned}\int_0^z h_k(x)dx &= \int_0^z \sum_{n=l}^{\infty} r_{n,k}x^{n-l}dx = \sum_{n=l}^{\infty}\frac{r_{n,k}}{n-l+1}z^{n-l+1}\\ &= \sum_{i=l}^{\infty}\frac{n-l}{n-l+1}(n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]}(c_k^*+f_k^*(n))z^{n-l+1}.\end{aligned}$$

Значит, третье слагаемое можно представить в виде следующего ряда

$$z^{l-1}\int_0^z h_k(x)dx = \sum_{n=l}^{\infty}(n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]}(c_k^*+f_{k,0}^{**}(n-l))z^n = z^l\sum_{n=0}^{\infty}n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(c_k^*+f_{k,0}^{**}(n))z^n,$$

а четвёртое представимо в виде

$$\begin{aligned}2\frac{z^{l-1}\int_0^z x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx}{(1-z)} &= 2\left(\sum_{n=l}^{\infty}\frac{n-l}{n+1}(n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]-1}(c_k^*+f_k^*(n))z^{n+l}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)\\ &= \left(\sum_{n=l}^{\infty}(n-l)^{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\left(2c_k^*-2\frac{l-1}{n+1}c_k^*+2\frac{n-l}{n+1}f_k^*(n)\right)z^{n+l}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)\\ &= z^{2l}\left(\sum_{n=0}^{\infty}n^{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\left(2c_k^*-2\frac{l-1}{n+l+1}c_k^*+2\frac{n}{n+l+1}f_k^*(n+l)\right)z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right).\end{aligned}$$

Заметим, что при $n\to\infty$ выполнено

$$2f_{k,1}^{**}(n) := -2\frac{l-1}{n+l+1}c_k^*+2\frac{n}{n+l+1}f_k^*(n+l)\to 0.$$

Значит, по Лемме 3.7 существует последовательность $f_{k,1}^{***}(n)$, такая что $f_{k,1}^{***}(n) \to 0$ при $n \to \infty$, и при этом

$$2\frac{z^{l-1}\int_0^z x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx}{(1-z)} = z^{2l}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left(\frac{2c_k^*}{\left[\frac{k}{2}\right]} + f_{k,1}^{***}(n)\right).$$

Также, мы получили соотношение

$$\int_0^z x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx = \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\left(c_k^* + f_{k,1}^{**}(n)\right) z^{n+l+1}.$$

Рассмотрим следующие два слагаемых в сумме. Пятое слагаемое можно записать в виде

$$\begin{aligned}
&2\frac{z^{l-1}\int_0^z\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx}{(1-z)^2}\\
&= 2z^{l-1}\left(\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\left(c_k^* + f_{k,1}^{**}(n)\right) x^{n+l+1}dx\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2\\
&= 2z^{l-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+l+2} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left(c_k^* + f_{k,1}^{**}(n)\right) z^{n+l+2}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2\\
&= 2z^{2l+1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left(c_k^* - \frac{l+2}{n+l+2}c_k^* + \frac{n}{n+l+2}f_{k,1}^{**}(n)\right) z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2.
\end{aligned}$$

Определим функцию

$$f_{k,2}^{**}(n) = -\frac{l+2}{n+l+2}c_k^* + \frac{n}{n+l+2}f_{k,1}^{**}(n).$$

Заметим, что $f_{k,2}^{**}(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, применив дважды Лемму (3.7), получим, что существует некоторая функция $f_{k,2}^{***}(n)$, такая что $f_{k,2}^{***}(n) \to 0$ при $n \to \infty$, а также

$$2\frac{z^{l-1}\int_0^z\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx}{(1-z)^2} = 2z^{2l+1}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left(\frac{c_k^*}{\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)\left[\frac{k}{2}\right]} + f_{k,2}^{***}(n)\right) z^n,$$

и

$$\int_0^z\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx = z^{l+2}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left(c_k^* + f_{k,2}^{**}(n)\right) z^n.$$

Шестое слагаемое можно записать в виде

$$
\begin{aligned}
&4\frac{z^{l-1}\int_0^z x^{l-1}\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx}{(1-z)^2} \\
&\quad = 4z^{l-1}\left(\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-1}\left(c_k^* + f_{k,1}^{**}(n)\right)x^{n+2l}dx\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 \\
&\quad = 4z^{l-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+2l+1} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left(c_k^* + f_{k,1}^{**}(n)\right)z^{n+2l+1}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 \\
&\quad = 4z^{3l}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left(c_k^* - \frac{2l+1}{n+2l+1}c_k^* + \frac{n}{n+2l+1}f_{k,1}^{**}(n)\right)z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2.
\end{aligned}
$$

Определим функцию

$$
f_{k,3}^{**}(n) = -\frac{2l+1}{n+2l+1}c_k^* + \frac{n}{n+2l+1}f_{k,1}^{**}(n).
$$

Заметим, что $f_{k,3}^{**}(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Значит, применив опять дважды Лемму 3.7, получим что существует некоторая функция $f_{k,3}^{***}(n)$, такая что $f_{k,3}^{***}(n) \to 0$ при $n \to \infty$, а также

$$
4\frac{z^{l-1}\int_0^z x^{l-1}\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx}{(1-z)^2} = 4z^{3l}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left(\frac{c_k^*}{\left(\left[\frac{k}{2}\right]-1\right)\left[\frac{k}{2}\right]} + f_{k,3}^{***}(n)\right)z^n,
$$

и

$$
\int_0^z x^{l-1}\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx = z^{2l+1}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}\left(c_k^* + f_{k,3}^{**}(n)\right)z^n.
$$

Осталось разобраться с последними двумя слагаемыми. В силу Леммы 3.8 существует такая последовательность $f_{k,4}^{**}(n)$, что $f_{k,4}^{**}(n) \to 0$ при $n \to \infty$, и

$$
e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\sum_{i=0}^{l-2} z^i \int_0^z \int_0^t u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudt = z^{l+2}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-\frac{3}{2}} f_{k,4}^{**}(n)z^n.
$$

Проинтегрировав обе части, получим

$$
\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\sum_{i=0}^{l-2} x^i \int_0^x \int_0^t u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudtdx = z^{l+3}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-\frac{5}{2}} \frac{n f_{k,4}^{**}(n)}{n+l+3}z^n.
$$

Ещё раз применив Лемму 3.8 получим, что для некоторой функции $f^{**}_{k,5}(n)$, такой что $f^{**}_{k,5}(n) \to 0$ при $n \to \infty$ выполнено соотношение

$$z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \sum_{i=0}^{l-2} x^i \int_0^x \int_0^t u^{l-1} \int_0^u h_k(y)dydudtdx$$

$$= z^{2l+2} \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2} f^{**}_{k,5}(n).$$

Теперь, применив дважды Лемму 3.7 получим

$$4\frac{z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \sum\limits_{i=0}^{l-2} x^i \int_0^x \int_0^t u^{l-1} \int_0^u h_k(y)dydudtdx}{(1-z)^2}$$

$$= 4z^{2l+2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]-2}(0 + f^{**}_{k,5}(n))\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)$$

$$= 4z^{2l+2}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(0 + o(1)).$$

Проделав аналогичные действия с последним слагаемым, получим

$$8\frac{z^{l-1} e^{-2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}} \int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}} \sum\limits_{i=0}^{l-2} x^i \int_0^x t^{l-1} \int_0^t u^{l-1} \int_0^u h_k(y)dydudtdx}{(1-z)^2}$$

$$= 8z^{3l+1}\sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(0 + o(1)).$$

Получаем, что

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=l}^{\infty} L_{k,n} z^n = \sum_{n=0}^{l} L_{k,n}(z^n - z^l) + \sum_{n=l}^{\infty} n(Q_1 + o(1)) z^n \\
+ z^l \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(c_k^* + o(1)) z^n + z^{2l} \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(\frac{2c_k^*}{\left[\frac{k}{2}\right]} + o(1) \right) \\
- 2z^{2l+1} \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(\frac{c_k^*}{\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)\left[\frac{k}{2}\right]} + o(1) \right) z^n \\
+ 4z^{3l} \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(\frac{c_k^*}{\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)\left[\frac{k}{2}\right]} + o(1) \right) z^n \\
+ 4z^{2l+2} \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(0 + o(1)) - 8z^{3l+1} \sum_{n=0}^{\infty} n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(0 + o(1)).
\end{aligned}
$$

Таким образом, мы получили следующее представление для последовательности $L_{k,n}$

$$
\begin{aligned}
L_{k,n} &= n(Q_1 + o(1)) + n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(c_k^* + 2\frac{c_k^*}{\left[\frac{k}{2}\right]} - 2\frac{c_k^*}{\left[\frac{k}{2}\right]\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)} + 4\frac{c_k^*}{\left[\frac{k}{2}\right]\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)} + o(1) \right) \\
&= n(Q_1 + o(1)) + n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(\frac{c_k^*\left[\frac{k}{2}\right]\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right) + 2c_k^*\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right) + 2c_k^*}{\left[\frac{k}{2}\right]\left(\left[\frac{k}{2}\right] - 1\right)} + o(1) \right) \\
&= n(Q_1 + o(1)) + n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(c_k^* \frac{\left[\frac{k}{2}\right] + 1}{\left[\frac{k}{2}\right] - 1} + o(1) \right).
\end{aligned}
$$

Так как $k \geqslant 4$, $\left[\frac{k}{2}\right] \geqslant 2$. Значит,

$$
L_{k,n} = n^{\left[\frac{k}{2}\right]} \left(c_k^* \frac{\left[\frac{k}{2}\right] + 1}{\left[\frac{k}{2}\right] - 1} + o(1) \right)
$$

Определив константу $c_k = c_k^* \frac{\left[\frac{k}{2}\right]+1}{\left[\frac{k}{2}\right]-1}$, получаем необходимое соотношение (22)

В случае чётного k мы знаем, что $c_k^* = \frac{k-2}{k+2} c_2^{\frac{k}{2}} (k-1)!!$. Значит,

$$
c_k = \frac{\left[\frac{k}{2}\right] + 1}{\left[\frac{k}{2}\right] - 1} \frac{k-2}{k+2} c_2^{\frac{k}{2}} (k-1)!! = c_2^{\frac{k}{2}} (k-1)!!,
$$

и соотношение (20) также показано. Осталось оценить разницу между $L_{k,n}$ и

$\mathbb{E}\left\{(\xi_n - \mathbb{E}\{\xi_n\})^k\right\}$. Заметим что

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{(\xi_n - \mathbb{E}\{\xi_n\})^k\right\} &= \mathbb{E}\left\{\left(\left(\xi_n - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)\right) - \left(\mathbb{E}\{\xi_n\} - (l\lambda_l n + l^2\lambda_l - l)\right)\right)^k\right\} \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^{n-k}C_n^k L_{i,n} L_{0,n}^{n-k}\end{aligned}$$

Согласно Теореме 3.1, $L_{0,n} = o(e^{-n})$. Также, мы теперь знаем поведение всех $L_{i,n}$. Таким образом,

$$\mathbb{E}\left\{(\xi_n - \mathbb{E}\{\xi_n\})^k\right\} = L_{k,n} + o\left(e^{-n}\right) = n^{\left[\frac{k}{2}\right]}(c_k + o(1)),$$

что и необходимо было доказать. □

Доказательство Теоремы 3.5: Данная теорема является прямым следствием Теоремы 3.4 и Теоремы 6.1, приведённой в Приложении, доказательство которой можно найти в работе [23], на странице 390:

Для $k = 0$ и 1 очевидно что

$$\mathbb{E}\left\{\frac{\xi_{n,l} - \mathbb{E}\{\xi_{n,l}\}}{\sqrt{\mathbb{D}\{\xi_{n,l}\}}}\right\} = 0,$$
$$\mathbb{E}\left\{\left(\frac{\xi_{n,l} - \mathbb{E}\{\xi_{n,l}\}}{\sqrt{\mathbb{D}\{\xi_{n,l}\}}}\right)^2\right\} = 1.$$

Для более старших моментов, согласно Теореме 3.4, если k – чётно, то при $n \to \infty$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\{\left(\frac{\xi_{n,l} - \mathbb{E}\{\xi_{n,l}\}}{\sqrt{\mathbb{D}\{\xi_{n,l}\}}}\right)^k\right\} &= \frac{\mathbb{E}\left\{(\xi_{n,l} - \mathbb{E}\{\xi_{n,l}\})^k\right\}}{(\mathbb{D}\{\xi_{n,l}\})^{k/2}} \\ &= \frac{n^{k/2}(c_2^{k/2}(k-1)!! + o(1))}{n^{k/2}(c_2^{k/2} + o(1))} \to (k-1)!!.\end{aligned}$$

А если k — нечётное, то при $n \to \infty$

$$\mathbb{E}\left\{\left(\frac{\xi_{n,l} - \mathbb{E}\{\xi_{n,l}\}}{\sqrt{\mathbb{D}\{\xi_{n,l}\}}}\right)^k\right\} = \frac{\mathbb{E}\left\{(\xi_{n,l} - \mathbb{E}\{\xi_{n,l}\})^k\right\}}{(\mathbb{D}\{\xi_{n,l}\})^{k/2}} = \frac{n^{(k-1)/2}(c_k + o(1))}{n^{k/2}(c_2^{k/2} + o(1))} \to 0.$$

Таким образом, так как стандартное нормальное распределение однозначно определяется своими моментами, теорема о слабой сходимости влечёт за собой Теорему 3.5.

□

4 Задачи о дискретной парковке в эгоистичной постановке

Рассмотрим следующий процесс. Зафиксируем натуральное $l > 0$. Пусть у нас есть отрезок $[0, n]$. Если его длина меньше чем l, процесс прекращается. Иначе расположим на нём случайным образом интервал $(t, t+1)$ с целыми концами. Он разбивает изначальный отрезок на два, каждый из которых далее рассматривается отдельно, аналогично изначальному. Фраза «случайным образом» здесь также означает, что t является случайной величиной, равномерно распределённой на множестве целых чисел $\{0, \ldots, n-1\}$. Когда длина всех оставшихся отрезков становится меньше l, процесс прекращается, и подсчитывается суммарное количество расположенных отрезков. Обозначим эту случайную величину за ξ_n.

Формально данную последовательность можно определить следующим образом:

$$\xi_0 = \xi_1 = \ldots = \xi_{l-1} = 0,$$

$$\xi_n := 1 + \xi_{\eta_n - 1} + \xi_{n-\eta_n}, \quad \text{при} \quad n \geqslant l, \tag{27}$$

где η_n — независимые случайные величины, не зависящие от ξ_m, равновероятно принимающие значения $1, \ldots, n$. В последнем равенстве $\xi_{\eta_n - 1}$ и $\xi_{n-\eta_n}$ также независимы.

Теорема 4.1. *Для любой натуральной константы $l > 0$ описанные выше случайные величины ξ_n имеют следующие математические ожидания:*

$$\mathbb{E}\{\xi_0\} = \ldots = \mathbb{E}\{\xi_{l-1}\} = 0,$$

$$\mathbb{E}\{\xi_n\} = \frac{2n+1-l}{l+1}, \quad \textit{при} \quad n \geqslant l.$$

Теорема 4.2. *Для любой натуральной константы $l > 0$ описанные выше случайные величины ξ_n имеют следующие дисперсии:*

$$\mathbb{D}\{\xi_0\} = \ldots = \mathbb{D}\{\xi_l\} = 0,$$

$$\mathbb{D}\{\xi_{l+1}\} = \frac{2(l-1)(l^2+2l+3)}{(l+1)^3(l+2)},$$

$$\mathbb{D}\{\xi_n\} = (n+1)\frac{4(l-1)(l^2+2l+3)}{(l+1)^3(l+2)^2(l+3)}, \quad \textit{при} \quad n \geqslant l+2,$$

а их третьи центральные моменты равны

$$\mathbb{E}\{\xi_0 - \mathbb{E}\xi_0\}^3 = \ldots = \mathbb{E}\{\xi_l - \mathbb{E}\xi_l\}^3 = 0,$$

$$\mathbb{E}\{\xi_{l+1} - \mathbb{E}\xi_{l+1}\}^3 = \frac{2(l-1)(l^3 - l^2 - 5l - 7)}{(l+1)^4(l+2)^2},$$

$$\mathbb{E}\{\xi_n - \mathbb{E}\xi_n\}^3 = (n-1)\frac{4(l-1)(l^3 - l^2 - 5l - 7)}{(l+1)^4(l+2)^2(l+3)}, \quad \textit{при} \quad n \geqslant l+2.$$

Доказательство Теоремы 4.1:
Зафиксируем $l > 0$ и обозначим

$$E_n := \mathbb{E}\{\xi_n\}.$$

Исходя из равенства (27), при $n \geqslant l$ верно следующее соотношение:

$$E_n = 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(E_{i-1} + E_{n-i}) = 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E_i. \tag{28}$$

Определив следующую последовательность

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} E_i,$$

соотношение (28) можно переписать следующим образом

$$S_n - S_{n-1} = 1 + \frac{2}{n}S_{n-1}, \qquad n \geqslant l. \tag{29}$$

Преобразуем это соотношение

$$S_{n+1} = 1 + \frac{n+3}{n+1}S_n, \qquad n \geqslant l-1.$$

Определив для удобства константы

$$c_n = \frac{n+3}{n+1},$$

получим следующее рекуррентное соотношение для последовательности S_n

$$S_{n+1} = 1 + c_n S_n, \qquad n+1 \geqslant l$$

Подставив само себя в это соотношение вплоть до S_l получим

$$S_{n+1} = 1 + c_n S_n = 1 + c_n(1 + c_{n-1}S_{n-1}) = \ldots = 1 + c_n(1 + c_{n-1}(\ldots(1 + c_l S_l)\ldots)).$$

Раскрыв скобки в правой части, принимая во внимание что $S_l = 1$, получим

$$S_{n+1} = 1 + c_n + c_n c_{n-1} + \ldots + c_n c_{n-1}\ldots c_l. \tag{30}$$

Введём ещё одно обозначение

$$p_n = \prod_{i=l}^{n} c_i.$$

Тогда выражение (30) можно записать в следующем виде

$$S_{n+1} = \sum_{i=l-1}^{n} \frac{p_n}{p_i}.$$

Воспользовавшись определением последовательности S_n, получим следующее соотношение для E_n:

$$E_n = S_n - S_{n-1} = \sum_{i=l-1}^{n-1} \frac{p_{n-1}}{p_i} - \sum_{i=l-1}^{n-2} \frac{p_{n-2}}{p_i} = 1 + \sum_{i=l-1}^{n-2} \frac{p_{n-1} - p_{n-2}}{p_i}. \qquad (31)$$

Теперь вычислим значения p_k. Пусть $l \leqslant k \leqslant n-1$. Тогда

$$p_n = \frac{n+3}{n+1}\frac{n+2}{n} \dots \frac{l+3}{l+1} = \frac{(n+3)(n+2)}{(l+2)(l+1)}.$$

Подставив эти значения в равенство (31), получим

$$\begin{aligned} E_n &= 1 + \left(\frac{(n+2)(n+1)}{(l+2)(l+1)} - \frac{(n+1)n}{(l+2)(l+1)} \right) \sum_{i=l-1}^{n-2} \frac{(l+2)(l+1)}{(i+3)(i+2)} \\ &= 1 + 2\,(n+1) \sum_{i=l-1}^{n-2} \frac{1}{(i+3)(i+2)} = 1 + 2\,(n+1) \sum_{i=l-1}^{n-2} \left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{i+3} \right) \\ &= 1 + 2\,(n+1) \left(\frac{1}{l+1} - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n+2}{l+1} - 1 = \frac{2n-(l-1)}{l+1}. \end{aligned}$$

□

Доказательство Теоремы 4.2: Сохраним обозначение $E_n = \mathbb{E}\{\xi_n\}$, а также обозначим $S_{n,k} = E\{(\xi_n - E_n)^k\}$. Пользуясь соотношением (27), для

$n \geqslant l+2$ $S_{n,k}$ можно выразить следующим образом

$$
\begin{aligned}
S_{n,k} = \mathbb{E}\left\{(\xi_n - E_n)^k\right\} = \mathbb{E}\left\{E((\xi_n - E_n)^k |\ i)\right\} \\
= \mathbb{E}\left\{\mathbb{E}\left\{((\xi_{i-1} - E_{i-1}) + (\xi_{n-i} - E_{n-i}))^k |\ i\right\}\right\} = \\
= \mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{k} C_k^j \mathbb{E}\left\{(\xi_{i-1} - E_{i-1})^j |\ i\right\} \mathbb{E}\left\{(\xi_{n-i} - E_{n-i})^{k-j} |\ i\right\}\right\} = \\
= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} C_k^j \mathbb{E}\left\{(\xi_{i-1} - E_{i-1})^j\right\} \mathbb{E}\left\{(\xi_{n-i} - E_{n-i})^{k-j}\right\} = \\
= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k} C_k^j S_{i-1,j} S_{n-i,k-j}. \quad (32)
\end{aligned}
$$

Для малых k из соотношения (32) следует, что

$$
\begin{aligned}
&S_{n,0} = 1, \\
&S_{n,1} = 0, \\
&S_{n,2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(S_{i-1,0}S_{n-i,2} + 2S_{i-1,1}S_{n-i,1} + S_{i-1,2}S_{n-i,0}\right) = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{i-1,2}, \quad (33) \\
&S_{n,3} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(S_{i-1,0}S_{n-i,3} + 3S_{i-1,1}S_{n-i,2} + 3S_{i-1,2}S_{n-i,1} + S_{i-1,3}S_{n-i,0}\right) \\
&\quad = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{i-1,3}. \quad (34)
\end{aligned}
$$

Заметим, что равенства (33) и (34) задают одно и то же рекуррентное соотношение, а именно

$$
Z_n = \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} Z_i. \quad (35)
$$

Начальными условиями в обоих случаях будут следующие соотношения

$$
Z_0 = \ldots = Z_l = 0,
$$

$$
Z_{l+1} - fix.
$$

Найдём последовательность, которую задаёт соотношение (35). Для этого введём дополнительное обозначение

$$
S_n = \sum_{i=0}^{n} Z_n.
$$

С его помощью соотношение (35) можно записать следующим образом

$$S_n - S_{n-1} = \frac{2}{n} S_{n-1}.$$

Преобразуем это равенство. Получим

$$S_n = \frac{n+2}{n} S_{n-1}.$$

Исходя из начальных условий мы знаем значение $S_{l+1} = Z_{l+1}$, из чего можно вывести выражение для S_n

$$S_n = \frac{(n+2)!}{n!} \frac{(l+1)!}{(l+3)!} Z_{l+1} = \frac{(n+2)(n+1)}{(l+3)(l+2)} Z_{l+1}.$$

Использовав определение S_n, получим

$$Z_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(n+2)(n+1) - (n+1)n}{(l+3)(l+2)} Z_{l+1} = \frac{2n+2}{(l+3)(l+2)} Z_{l+1}.$$

Подставим в это выражение $S_{n,2}$ и $S_{n,3}$ вместо Z_n

$$S_{n,2} = \frac{2n+2}{(l+3)(l+2)} S_{l+1,2},$$

$$S_{n,3} = \frac{2n+2}{(l+3)(l+2)} S_{l+1,3}.$$

Вычислим $S_{l+1,2}$ и $S_{l+1,3}$. Заметим, что случайная величина X_{l+1} принимает значение 1 с вероятностью $\frac{l-1}{l+1}$, и 2 с вероятностью $\frac{2}{l+1}$. (так как она принимает значение 2 только в том случае, если первый интервал занимает одно из крайних мест). Значит

$$S_{l+1,2} = \frac{l-1}{l+1}\left(1 - \frac{l+3}{l+1}\right)^2 + \frac{2}{l+2}\left(2 - \frac{l+3}{l+1}\right)^2 = \frac{2(l-1)(l^2+2l+3)}{(l+1)^3(l+2)},$$

$$S_{l+1,3} = \frac{l-1}{l+1}\left(1 - \frac{l+3}{l+1}\right)^3 + \frac{2}{l+2}\left(2 - \frac{l+3}{l+1}\right)^3 = \frac{2(l-1)(l^3-l^2-5l-7)}{(l+1)^4(l+2)}.$$

Таким образом, при $n \geqslant l+2$:

$$S_{n,2} = (n+1)\frac{4(l-1)(l^2+2l+3)}{(l+1)^3(l+2)^2(l+3)},$$

$$S_{n,3} = (n+1)\frac{4(l-1)(l^3-l^2-5l-7)}{(l+1)^4(l+2)^2(l+3)}.$$

□

Рассмотрим подробнее случай $l = 2$. Для него можно получить результат, аналогичный приведённому в Теореме 1.3

Теорема 4.3. *В случае $l = 2$ последовательность распределений случайных величин*

$$\frac{\xi_n - \mathbb{E}\{\xi_n\}}{\sqrt{D\{\xi_n\}}} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{36}$$

слабо сходится к стандартной нормальной мере.

Так как проблема моментов однозначно разрешима для стандартного нормального распределения, Теорема 4.3 является прямым следствием из Теоремы, приведённой ниже.

Теорема 4.4. *В случае $l = 2$ для любого целого $k \geq 2$*

$$\mathbb{E}\{\xi_n - \mathbb{E}\{\xi_n\}\}^k = n^{[\frac{k}{2}]}(c_k + f_k(n)), \tag{37}$$

где c_k – константа, зависящая только от k, $f_k(n) = o(1) \quad (n \to \infty)$ и $[a]$ означает целую часть a.

Доказательство Теоремы 4.4:

Из Теоремы 4.2 следует соотношение (37) для $k = 2, 3$. В дальнейшем мы будем рассматривать только случай $k \geqslant 4$. Сохраним обозначение $S_{n,k} = \mathbb{E}\left\{(\xi_n - \mathbb{E}\{\xi_n\})^k\right\}$ и будем доказывать соотношение (37) по индукции по k.

База индукции.

Из Теоремы 4.2 мы знаем, что

$$\begin{aligned}
&S_{n,0} = 1,\\
&S_{n,1} = 0,\\
&S_{n,2} = n\left(\frac{1}{45} + f_2(n)\right), \quad \text{где} \quad f_2(n) = \frac{1}{45n} \to 0\\
&S_{n,3} = n\left(-\frac{1}{135} + f_3(n)\right), \quad \text{где} \quad f_3(n) = -\frac{11}{135n} \to 0.
\end{aligned}$$

Индукционный переход.

Пусть для $k = 1, 2, \ldots, m-1$ соотношение (37) доказано. Будем доказывать для $k = m$.

Учитывая, что $S_{n,0} = 1$, используя соотношение (32), $S_{n,m}$ для $m \geq 4$ может быть представлена следующим образом

$$S_{n,m} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1} C_k^j S_{l-1,j} S_{n-l,m-j} + \frac{2}{n}\sum_{l=1}^{n} S_{l-1,m}.$$

Обозначим

$$r_{n,m} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{m-1} C_k^j S_{l-1,j} S_{n-l,m-j} = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=2}^{m-2} C_k^j S_{l-1,j} S_{n-l,m-j}.$$

Последнее равенство справедливо, так как $S_{n,1} = 0$.
Тогда

$$S_{n,m} = \frac{2}{n} \sum_{l=1}^{n} S_{l-1,m} + r_{n,m} \quad \text{для} \quad m > 3.$$

Определив дополнительно $Q_{n,m} = \sum_{i=0}^{n} S_{i,m}$, для $Q_{n,m}$ можно получить соотношение

$$Q_{n,m} - Q_{n-1,m} = \frac{2}{n} Q_{n-1,m} + r_{n,m}$$

которое можно переписать в более удобном виде как

$$Q_{n,m} = \frac{n+2}{n} Q_{n-1,m} + r_{n,m}.$$

Покажем, что при $n \geq 3$ выполняется равенство

$$Q_{n,m} = \frac{(n+2)(n+1)}{20} Q_{3,m} + \sum_{i=4}^{n} \frac{(n+2)(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m}. \tag{38}$$

Для $n = 3$ равенство (38) верно. Пусть оно справедливо для некоторого $n \geq 3$. Покажем, что тогда оно выполняется и для $n + 1$.

$$\begin{aligned} Q_{n+1,m} = Q_{n,m} + S_{n+1,m} = \frac{(n+2)(n+1)}{20} Q_{3,m} + \sum_{i=4}^{n} \frac{(n+2)(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m} \\ + \frac{2}{n+1} Q_{n,m} + r_{n+1,m} \\ = \frac{n+3}{n+1} Q_{n,m} + r_{n+1,m} = \frac{(n+3)(n+2)}{20} Q_{3,m} + \sum_{i=4}^{n} \frac{(n+3)(n+2)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m} \\ + r_{n+1,m} \\ = \frac{(n+3)(n+2)}{20} Q_{3,m} + \sum_{i=4}^{n+1} \frac{(n+3)(n+2)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m}. \end{aligned}$$

Значит, равенство (38) выполняется и для $n + 1$. Значит, оно выполняется при всех натуральных n. Тогда

$$S_{n,m} = Q_{n,m} - Q_{n-1,m} = \frac{n+1}{10} Q_{3,m} + \sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m} + r_{n,m}. \tag{39}$$

Теперь займемся поиском асимптотики последовательности $r_{n,m}$. Исходя из индукционного предположения можно получить следующее соотношение

$$S_{l-1,j} S_{n-l,m-j} = (l-1)^{[\frac{j}{2}]} (n-l)^{[\frac{m-j}{2}]} \left(c_j + f_j(l-1)\right) \left(c_{m-j} + f_{m-j}(n-l)\right).$$

Введем обозначения:

$$a = \left[\frac{j}{2}\right], \qquad b = \left[\frac{m-j}{2}\right], \quad \text{где} \quad [x] \quad \text{обозначает целую часть} \quad x,$$

и разложим первые два множителя по биному Ньютона

$$(l-1)^a = \sum_{k=0}^{a} C_a^k (-1)^{a-k} l^k,$$

$$(n-l)^b = \sum_{t=0}^{b} C_b^t n^{b-t} (-l)^t.$$

Перемножим эти два разложения:

$$\begin{aligned}
(l-1)^a (n-l)^b &= \sum_{k=0}^{a} \sum_{t=0}^{b} (-1)^{a-k+t} C_a^k C_b^t n^{b-t} l^{k+t} \\
&= \sum_{t=0}^{b} C_b^t n^{b-t} \sum_{k=0}^{a} (-1)^{a-k+t} C_a^k l^{k+t} \\
&= \sum_{t=0}^{b} n^{b-t} \sum_{x=t}^{a+t} (-1)^{a-x+2t} C_a^{x-t} l^x \\
&= \sum_{k=0}^{b} C_b^{b-k} n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k} (-1)^{a-x+2b-2k} C_a^{x-b+k} l^x \\
&= \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k} (-1)^{a+2b-x-2k} C_a^{x+k-b} l^x,
\end{aligned}$$

и сложим по l от единицы до n

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n} (l-1)^a (n-l)^b &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k} (-1)^{a+2b-x-2k} C_a^{x+k-b} l^x \\
&= \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k} (-1)^{a+2b-x-2k} C_a^{x+k-b} \sum_{l=1}^{n} l^x.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{x+1}} \sum_{l=1}^{n} l^x = \lim_{n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} \frac{l^x}{n^{x+1}} = \frac{1}{x+1}.$$

Следовательно,

$$\sum_{l=1}^{n} l^x = n^{x+1} \left(\frac{1}{x+1} + f_{m,1,x}(n) \right), \tag{40}$$

где $\lim_{n\to\infty} f_{m,1,x}(n) = 0$. Значит, имеет место соотношение

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^a(n-l)^b = \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k}(-1)^{a+2b-x-2k} C_a^{x+k-b} n^{x+1}\left(\frac{1}{x+1} + f_{m,1,x}(n)\right).$$

Определим дополнительно последовательность

$$f_{m,2,a,b,k}(n) = n^{-a-b+k-1}\sum_{x=b-k}^{a+b-k-1}(-1)^{a+2b-x-2k} C_a^{x+k-b} n^{x+1}\left(\frac{1}{x+1} + f_{m,1,x}(n)\right).$$

Так как в последней сумме число слагаемых конечно, то $f_{m,2,a,b,k}(n) = o(1)$ при $n \to \infty$.
Таким образом

$$\begin{aligned}
&\sum_{l=1}^{n}(l-1)^a(n-l)^b \\
&= \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \left((-1)^{b-k} n^{a+b-k+1}\left(\frac{1}{a+b-k+1} + f_{m,1,a+b-k}(n)\right)\right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + n^{a+b-k+1} f_{m,2,a,b,k}(n)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k N^{a+b-k+1}\left(\frac{(-1)^{b-k}}{a+b-k+1} + f_{m,1,a+b-k}(n) + f_{m,2,a,b,k}(n)\right) \\
&= n^{a+b+1}\left(\sum_{k=0}^{b} C_b^k \frac{(-1)^{b-k}}{a+b-k+1} + f_{m,3,a,b}(n)\right),
\end{aligned} \tag{41}$$

где

$$f_{m,3,a,b}(n) = \sum_{k=0}^{b} C_b^k\left(f_{m,1,a+b-k}(n) + f_{m,2,a,b,k}(n)\right) = o(1) \qquad (n\to\infty).$$

Заметим, что при нечётном m и любом j верно равенство

$$\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{m-j}{2}\right] = \left[\frac{m}{2}\right],$$

при чётном m и чётном j:

$$\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{m-j}{2}\right] = \left[\frac{m}{2}\right],$$

а при чётном m и нечётном j :

$$\left[\frac{j}{2}\right] + \left[\frac{m-j}{2}\right] = \left[\frac{m}{2}\right] - 1.$$

Далее, подставляя выражения для a и b в (41), получаем

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}$$
$$= n^{\left(\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]+1\right)} \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} \frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} + f_{m,3,\left[\frac{j}{2}\right],\left[\frac{m-j}{2}\right]}(n) \right).$$

В случае m – чётного и j – чётного это выражение имеет вид:

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}$$
$$= n^{\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)} \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} \frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1} + f_{m,3,\left[\frac{j}{2}\right],\left[\frac{m-j}{2}\right]}(n) \right), \tag{42}$$

при чётном m и нечётном j:

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}$$
$$= n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} \frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k} + f_{m,3,\left[\frac{j}{2}\right],\left[\frac{m-j}{2}\right]}(n) \right) \tag{43}$$

и, когда m – нечётное, вне зависимости от чётности j:

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}$$
$$= n^{\left(\left[\frac{m}{2}\right]+1\right)} \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} \frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1} + f_{m,3,\left[\frac{j}{2}\right],\left[\frac{m-j}{2}\right]}(n) \right). \tag{44}$$

Докажем следующее утверждение, которое сформулируем в виде леммы.

Лемма 4.5. *Для любого набора последовательностей $f_i(n)$, где для любого $i \in \mathbb{N}$ последовательность $f_i(n) \to 0$ при $n \to \infty$ справедливо равенство*

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}(c_j + f_j(l-1))(c_{m-j} + f_{m-j}(n-l)) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_j c_{m-j} + o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}\right). \qquad (45)$$

Доказательство Леммы 4.5: Рассмотрим левую часть равенства:

$$\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}(c_j + f_j(l-1))(c_{m-j} + f_{m-j}(n-l))$$
$$= \sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_j c_{m-j} + \sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_j f_{m-j}(n-l)$$
$$+ \sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_{m-j} f_j(l-1)$$
$$+ \sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}f_j(l-1) f_{m-j}(n-l)$$
$$=: I_1(n,m,j) + I_2(n,m,j) + I_3(n,m,j) + I_4(n,m,j).$$

Докажем, что для $i = 2, 3, 4$ при $n \to \infty$

$$I_i(n,m,j) = o(n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1})$$

Заметим, что существует такая константа $C_1(m)$, что при всех $k \leqslant m-1$ верно неравенство $f_k(n) < C_1(m)$, так как f_k стремится к нулю при больших n. Кроме того, существует $C_2(m)$ такая, что для всех $k \leq m-1$ выполнено неравенство $c_k < C_2(m)$.Значит

$$
\begin{aligned}
|I_2(n,m,j)| &= \left|\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}f_{m-j}(n-l)c_j\right| \\
&\leqslant C_2(m)\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\left|f_{m-j}(n-l)\right|, \\
|I_3(n,m,j)| &= \left|\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}f_{j}(l-1)c_{m-j}\right| \\
&\leqslant C_2(m)\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\left|f_{j}(l-1)\right|, \\
|I_4(n,m,j)| &= \left|\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}f_{j}(l-1)f_{m-j}(n-l)\right| \\
&\leqslant C_1(m)\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\left|f_{j}(l-1)\right|.
\end{aligned}
$$

Покажем, что при $n \to \infty$

$$
\begin{aligned}
n^{-\left[\frac{m}{2}\right]-1}\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)| = o(1) \\
n^{-\left[\frac{m}{2}\right]-1}\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_{m-j}(n-l)| = o(1).
\end{aligned}
$$

В таком случае будет выполнено равенство

$$
\left|\sum_{l=1}^{n}S_{l-1,j}S_{n-l,m-j} - \sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_jc_{m-j}\right| = o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]+1}\right) \quad (n \to \infty)
$$

Эти соотношения доказываются одинаково, поэтому рассмотрим только первое. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как $f_j(n)$ стремится к нулю при n стремящимся к бесконечности, найдется такое натуральное N_0, что для всех $n > N_0$ выполняется оценка $f_j(n) < \varepsilon$. Представим сумму выше следующим образом

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)| &= \sum_{l=1}^{[g(n)]}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)| \\
&+ \sum_{l=[g(n)]+1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)|,
\end{aligned}
$$

где $g(n)$– возрастающая положительная функция, которую мы уточним позже. Пусть $g(n) \to \infty$ и $g(n) < n$. Для достаточно больших n будет верно неравенство $g(n) > N_0$. Тогда

$$\sum_{l=[g(n)]+1}^{n} (l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)| \leq \varepsilon \sum_{l=[g(n)]+1}^{n} (l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}$$

$$\leq \varepsilon \sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)| = \varepsilon n^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]+1}\left(A_{m,j}+o(1)\right),$$

где $A_{m,j}$ — некоторая константа, зависящая от m и j. Отсюда мы получаем, что

$$n^{-\left[\frac{m}{2}\right]-1} \sum_{l=[g(n)]+1}^{n} (l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)| \leq \varepsilon \left(A_{m,j}+o(1)\right).$$

За счет выбора ε правая часть может быть сделана как угодно малой. Теперь изучим вторую сумму. Заметим, что:

$$\sum_{l=1}^{[g(n)]}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}|f_j(l-1)| \leq C_1(m) \sum_{l=1}^{[g(n)]}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}.$$

Воспользуемся ещё раз обозначениями $a = \left[\frac{j}{2}\right]$ и $b = \left[\frac{m-j}{2}\right]$. Тогда правая часть предыдущего неравенства будет иметь вид:

$$C_1(m) \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k} (-1)^{a+2b-x-2k} C_a^{x+k-b} \sum_{l=1}^{[g(n)]} l^x$$

$$= C_1(m) \sum_{k=0}^{b} C_b^k n^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k} (-1)^{a+2b-x-2k} C_a^{x+k-b} \left[g(n)\right]^{x+1} \left(\frac{1}{x+1}+o(1)\right)$$

$$\leq C_1(m) n^b [g(n)]^{a+b+1} \sum_{k=0}^{b} C_b^k \sum_{x=b-k}^{a+b-k} (-1)^{a+2b-x-2k} C_a^{x+k-b}(1+o(1)).$$

Возьмём $g(n) = \ln n$. Так как в последнем выражении конечное число слагаемых, оно есть $o\left(n^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}(\ln n)^{\left[\frac{j}{2}\right]+\left[\frac{m-j}{2}\right]+2}\right)$ и поскольку $j \geq 2$, то

$$\sum_{l=1}^{[\ln n]}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} = o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right).$$

Отсюда следует, что

$$n^{-\left[\frac{m}{2}\right]-1}\sum_{l=1}^{[\ln n]}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} \to 0 \qquad (n\to\infty),$$

Этим заканчивается доказательство леммы. □

Вернёмся к доказательству Теоремы 4.4. Согласно доказанной выше лемме,

$$\sum_{j=2}^{m-2}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}S_{l-1,j}S_{n-l,m-j} = \sum_{j=2}^{m-2}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_jc_{m-j} + o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right).$$

Из этого в частности следует, что

$$\begin{aligned} r_{n,m} &= \sum_{j=2}^{m-2}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}C_m^jS_{l-1,j}S_{n-l,m-j} \\ &= \sum_{j=2}^{m-2}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}C_m^j(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}c_jc_{m-j} + o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right) \\ &= \sum_{j=2}^{m-2}C_m^jc_jc_{m-j}\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(l-1)^{\left[\frac{j}{2}\right]}(n-l)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} + o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай чётного m. Будем интересоваться только слагаемыми с четными j, так как при нечетных j скорость роста меньше. Пользуясь соотношением (42) мы получаем

$$\begin{aligned} r_{n,m} &= n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\sum_{j=2, j-\text{четное}}^{m-2}C_m^jc_jc_{m-j}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}\right) + o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right) \\ &= n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\sum_{j=2, j-\text{четное}}^{m-2}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C_m^jc_jc_{m-j}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}\right) + o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right). \end{aligned}$$

Если m – нечётное, то все слагаемые имеют одинаковую скорость роста и в этом случае, пользуясь соотношением (44),

$$r_{n,m} = n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\sum_{j=2}^{m-2}\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]}\frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k}C_m^jc_jc_{m-j}C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1}\right) + o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right).$$

Если ввести обозначение

$$d_m = \begin{cases} \sum\limits_{j=2}^{m-2} \left(\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} \frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} C_m^j c_j c_{m-j} C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1} \right), & m \text{ — нечётное} \\ \sum\limits_{j=2, j-\text{четное}}^{m-2} \left(\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{m-j}{2}\right]} \frac{(-1)^{\left[\frac{m-j}{2}\right]-k} C_m^j c_j c_{m-j} C^k_{\left[\frac{m-j}{2}\right]}}{\left[\frac{m}{2}\right]-k+1} \right), & m \text{ — чётное} \end{cases}$$

то имеет место следующее соотношение для $r_{n,m}$:

$$r_{n,m} = n^{\left[\frac{m}{2}\right]}(d_m + h_m(n)), \tag{46}$$

где $h_m(n) = o(1)$.

Для окончания доказательства теоремы, согласно соотношению (39), необходимо вычислить асимптотику суммы $\sum\limits_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m}$. Воспользовавшись соотношением (46), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m} &= \sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} i^{\left[\frac{m}{2}\right]}(d_m + h_m(i)) \\ &= \sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} i^{\left[\frac{m}{2}\right]} d_m + \sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} i^{\left[\frac{m}{2}\right]} h_m(i). \end{aligned}$$

Покажем, что

$$\sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} i^{\left[\frac{m}{2}\right]} h_m(i) = o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right). \tag{47}$$

Разобьём эту сумму на две:

$$\begin{aligned} \sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} i^{\left[\frac{m}{2}\right]} h_m(i) &= \sum_{i=4}^{[\ln n]} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} i^{\left[\frac{m}{2}\right]} h_m(i) \\ &\quad + \sum_{i=[\ln n]+1}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} i^{\left[\frac{m}{2}\right]} h_m(i) \\ &=: T_1 + T_2. \end{aligned}$$

Так как $h_m(n) = o(1)$, существует $C > 0$ такое, что $h_m(n) < C$ для всех n. Значит

$$T_1 \le C \sum_{i=4}^{[\ln n]} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} i^{\left[\frac{m}{2}\right]} \le 2C(n+1) \left[\ln n\right]^{\left[\frac{m}{2}\right]+1} \frac{1}{5} = o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]}\right) \quad \text{при} \quad m > 3.$$

Отметим также , что для любого $\varepsilon > 0$ существует N_0 такое, что для всех $k > N_0$ выполнено неравенство $h_m(k) < \varepsilon$.

Пусть $\ln n > N_0 + 1$. Тогда

$$
\begin{aligned}
T_2 &\leqslant \varepsilon \sum_{i=[\ln n]+1}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} i^{\left[\frac{m}{2}\right]} \leq \varepsilon 2(n+1) \sum_{i=4}^{n-1} i^{\left[\frac{m}{2}\right]-2} \\
&= 2\varepsilon(n+1) n^{\left[\frac{m}{2}\right]-1} \left(\frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} + o(1) \right) = 2\varepsilon n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} + o(1) \right)
\end{aligned}
$$

Следовательно, $n^{-\left[\frac{m}{2}\right]} T_2 \leq 2\varepsilon \left(\frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} + o(1) \right)$, из чего следует оценка (47).

Итак, мы показали что

$$
\sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m} = 2(n+1) d_m \sum_{i=4}^{n-1} \frac{i^{\left[\frac{m}{2}\right]}}{(i+1)(i+2)} + o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \right).
$$

Осталось вычислить асимптотику $\sum\limits_{i=4}^{n-1} \frac{i^k}{(i+1)(i+2)}$, где $k = \left[\frac{m}{2}\right]$. Заметим, что

$$
\begin{aligned}
n^{-(k-1)} \sum_{i=4}^{n-1} \frac{i^k}{(i+1)(i+2)} &= n^{-(k-1)} \left(\sum_{i=4}^{n-1} \frac{i^k}{i+1} - \sum_{i=4}^{n-1} \frac{i^k}{i+2} \right) \\
&= n^{-(k-1)} \left(\sum_{i=5}^{n} \frac{(i)^k}{i} - \sum_{i=6}^{n+1} \frac{(i-2)^k}{i} \right) \\
&= n^{-(k-1)} \Bigg(\sum_{i=5}^{n} i^{k-1} - k \sum_{i=5}^{n} i^{k-2} + \sum_{i=5}^{n} \sum_{l=2}^{k} C_k^l i^l (-1)^{k-l} - \sum_{i=6}^{n+1} i^{k-1} \\
&\qquad + 2k \sum_{i=6}^{n+1} i^{k-2} - \sum_{i=6}^{n+1} \sum_{l=2}^{k} C_k^l i^l (-2)^{k-l} \Bigg) \\
&= n^{-(k-1)} \left(5^{k-1} - (n+1)^{k-1} - k 5^{k-2} + \sum_{i=6}^{n} i^{k-2} + 2k(n+1)^{k-2} \right) + o(1) \\
&= -1 + \frac{k}{k-1} + o(1).
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\sum_{i=4}^{n-1} \frac{i^{\left[\frac{m}{2}\right]}}{(i+2)(i+1)} = \frac{1}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} n^{\left[\frac{m}{2}\right]-1} + o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]-1} \right),
$$

из чего следует

$$\sum_{i=4}^{n-1} \frac{2(n+1)}{(i+2)(i+1)} r_{i,m} = \frac{2d_m}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} n^{\left[\frac{m}{2}\right]} + o\left(n^{\left[\frac{m}{2}\right]-1}\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} S_{n,m} &= n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(d_m + \frac{2d_m}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} + o(1)\right) = n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(\frac{\left[\frac{m}{2}\right]+1}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} d_m + o(1)\right) \\ &= n^{\left[\frac{m}{2}\right]} \left(c_m + o(1)\right), \end{aligned}$$

где

$$c_m = \frac{\left[\frac{m}{2}\right]+1}{\left[\frac{m}{2}\right]-1} d_m.$$

Таким образом индукционный переход доказан, и доказательство Теоремы 4.4 завершено. □

Доказательство Теоремы 4.3: Для того, чтобы показать, что из Теоремы 4.4 следует Теорема 4.3 воспользуемся Теоремой 6.1, представленной в Приложении, доказательство которой можно найти в [23], стр.390

Из теоремы 4.4 мы знаем, что если m — нечётно, то

$$E\left(\frac{X_n - EX_n}{\sqrt{DX_n}}\right)^m = \frac{n^{\left[\frac{m}{2}\right]}(c_m + f_m(n))}{\left(n\left(\frac{1}{45} + \frac{1}{45n}\right)\right)^{\frac{m}{2}}} = \frac{(c_m + f_m(n))}{n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{45n}\right)^{\frac{m}{2}}} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

А если m — чётно ($m = 2l$) то

$$E\left(\frac{X_n - EX_n}{\sqrt{DX_n}}\right)^m = \frac{c_{2l} + f_{2l}(n)}{\left(\frac{1}{45} + \frac{1}{45n}\right)^l}.$$

Поскольку $f_{2l}(n) = o(n)$, нам достаточно показать, что

$$c_{2l} = (c_2)^l (2l-1)!!,$$

где $c_2 = \frac{1}{45}$. Докажем это соотношение по индукции. Для $l = 1$ оно очевидно. Пусть далее оно верно для всех $l < v$. Докажем его для $l = v$. Исходя из формул для c_m и d_m, приведённых в доказательстве Теоремы 4.4, мы знаем что

$$\begin{aligned} c_{2v} &= \frac{v+1}{v-1} \sum_{j=1}^{v-1} \sum_{k=0}^{v-j} \frac{(-1)^{v-j-k} C_{v-j}^k C_{2v}^{2j} c_{2j} c_{2v-2j}}{v-k+1} \\ &= \frac{v+1}{v-1} \sum_{j=1}^{v-1} C_{2v}^{2j} c_{2j} c_{2v-2j} \sum_{k=0}^{v-j} \frac{(-1)^{v-j-k}}{v-k+1} C_{v-j}^k. \end{aligned}$$

Вычислим последнюю сумму. Для этого рассмотрим производную следующей функции

$$\left(\sum_{k=0}^{v-j}\frac{(-1)^{v-j-k}}{v-k+1}C_{v-j}^k x^{v-k+1}\right)' = \sum_{k=0}^{v-j}(-1)^{v-j-k}C_{v-j}^k x^{v-k}$$
$$= (-1)^{v-j}x^v\sum_{k=0}^{v-j}C_{v-j}^k(-x)^{-k}$$
$$= (-1)^{v-j}x^v\left(1-\frac{1}{x}\right)^{v-j}$$
$$= (-1)^{v-j}(x-1)^{v-j}x^j = (1-x)^{v-j}x^j.$$

Тогда

$$\sum_{k=0}^{v-j}\frac{(-1)^{v-j-k}}{v-k+1}C_{v-j}^k x^{v-k+1} = \int\limits_0^x (1-t)^{v-j}t^j dt.$$

Следовательно, подставив $x=1$, получим

$$\sum_{k=0}^{v-j}\frac{(-1)^{v-j-k}}{v-k+1}C_{v-j}^k = \int\limits_0^1 (1-t)^{v-j}t^j dt.$$

Вернемся к выражению для c_{2v} и применим индукционное предположение:

$$c_{2v} = \frac{v+1}{v-1}\sum_{j=1}^{v-1}C_{2v}^{2j}c_{2j}c_{2v-2j}\int\limits_0^1(1-t)^{v-j}t^j dt$$
$$= (c_2)^v\frac{v+1}{v-1}\sum_{j=1}^{v-1}C_{2v}^{2j}(2j-1)!!(2v-2j-1)!!\int\limits_0^1(1-t)^{v-j}t^j dt.$$

Осталось заметить, что

$$C_{2v}^{2j} = \frac{(2v)!}{(2j)!(2v-2j)!} = \frac{v!(2v-1)!!}{j!(v-j)!(2j-1)!!(2v-2j-1)!!}.$$

Таким образом, получаем

$$c_{2v} = (c_2)^v\frac{v+1}{v-1}(2v-1)!!\sum_{j=1}^{v-1}C_v^j\int\limits_0^1(1-t)^{v-j}t^j dt$$
$$= (2v-1)!!\frac{v+1}{v-1}\int\limits_0^1\sum_{j=1}^{v-1}C_v^j t^j(1-t)^{v-j}dt = (c_2)^v(2v-1)!!,$$

так как

$$\int\limits_0^1 \sum_{j=1}^{v-1} C_v^j t^j (1-t)^{v-j} dt = \int\limits_0^1 \left((1-t+t)^v - (1-t)^v - t^v\right) dt = \frac{v-1}{v+1},$$

что заканчивает доказательство Теоремы 4.3. $\square$

До этого во всех дискретных задачах распределение положения располагаемого отрезка было равномерным. Давайте теперь рассмотрим задачу с неравномерным распределением положения располагаемого интервала. Для этого рассмотрим случай $l = 1$, и на каждом шагу запретим интервалу быть расположенным на самом левом месте. Таким образом, мы располагаем интервал $(t, t+1)$, где t — случайная величина, равномерно распределённая на множестве $\{1, \ldots, n-1\}$ вместо $\{0, \ldots, n-1\}$. Аналогично обычной постановке, если $n = 1$, процесс заканчивается.

Формально данную последовательность можно определить следующим образом:

$$\begin{gathered} \xi_0 = \xi_1 = 0, \\ \xi_n := 1 + \xi_{\nu_n - 1} + \xi_{n-\nu_n}, \quad \text{при} \quad n \geqslant 2, \end{gathered} \tag{48}$$

где ν_n — независимые случайные величины, не зависящие от ξ_m, равновероятно принимающие значения $2, \ldots, n$. Также, в последнем равенстве X_{ν_n-1} и $X_{n-\nu_n}$ независимы.

Данный процесс можно интерпретировать следующим образом. Пусть у нас есть n подряд идущих парковочных мест, куда по очереди паркуются машины с левым расположением руля. Будем считать, что для того чтобы водитель смог выйти из своей машины, место слева от его машины должно быть свободным. В остальном будем считать, что у водителей нет никаких предпочтений. В таком случае он не может занять самое левое место в какомлибо отрезке подряд идущих свободных мест, а остальные места он будет занимать равновероятно. Будем считать, что процесс парковки заканчивается в тот момент, когда следующий водитель не сможет найти себе место. В таком случае определённая выше случайная величина ξ_n будет обозначать количество припаркованных машин.

Теорема 4.6. *Математическое ожидание случайной величины ξ_n при $n \geqslant 2$ имеет следующий вид*

$$\mathbb{E}\{\xi_n\} = n\left(1 - \frac{\Gamma(n+1,-1)}{e\Gamma(n+1)}\right) - \frac{\Gamma(n,-1)}{\Gamma(n)},$$

где $\Gamma(n)$ — гамма-функция, а $\Gamma(n,-1)$ — неполная гамма-функция, которая определяется равенством

$$\Gamma(n,-1) = \int_{-1}^{+\infty} t^{n-1} e^{-t} dt.$$

Доказательство Теоремы 4.6: Обозначим последовательность математических ожиданий

$$E_n := \mathbb{E}\{\xi_n\}.$$

Исходя из равенства (48), при $n \geqslant 2$ верно следующее соотношение:

$$E_n = 1 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}(E_{i-1} + E_{n-i}) = 1 + \frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n-2}E_i + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}E_i. \qquad (49)$$

Определив вспомогательную последовательность

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} E_i$$

и приняв во внимание, что $E_0 = 0$, соотношение (49) можно переписать следующим образом

$$S_n - S_{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}S_{n-1} + \frac{1}{n-1}S_{n-2}, \qquad n \geqslant 2.$$

Чтобы найти последовательность S_n, воспользуемся методом производящей функции. Введём вещественную переменную z, умножим обе части этого уравнения на $(n-1)z^n$ и просуммируем их по $n \geqslant 2$. Получим

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)S_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)z^n + \sum_{n=2}^{\infty}nS_{n-1}z^n + \sum_{n=2}^{\infty}S_{n-2}z^n.$$

Заметим, что $S_0 = S_1 = 0$. Значит, все суммы в этом равенстве можно заменить на суммы от нуля до бесконечности

$$\sum_{n=0}^{\infty}nS_{n+1}z^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}nz^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)S_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}S_n z^{n+2}.$$

Запишем полученное соотношение в более удобной форме

$$\sum_{n=0}^{\infty}nS_n z^n - \sum_{n=0}^{\infty}S_n z^n = z^2\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty}nS_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}S_n z^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}S_n z^{n+2}. \qquad (50)$$

Определим производящую функцию последовательности S_n, и её производную

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty}S_n z^n,$$

$$G'(z) = \sum_{n=1}^{\infty}nS_n z^{n-1}.$$

Используя функции $G(z)$ и $G'(z)$, соотношение (50) можно записать следующим образом

$$zG'(z) - G(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2} + z^2G'(z) + zG(z) + z^2G(z),$$

что эквивалентно следующему дифференциальному уравнению

$$(z - z^2)G'(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2} + (z^2 + z + 1)G(z).$$

Будем искать решения этого уравнения в виде

$$G(z) = H(z)K(z),$$

где функции $H(z)$ и $K(z)$ удовлетворяют соотношениям

$$(z - z^2)H'(z) = (z^2 + z + 1)H(z), \tag{51}$$

$$(z - z^2)H(z)K'(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2}. \tag{52}$$

Рассмотрим сначала (51). Заметим, что

$$(\ln H(z))' = \frac{1 + z + z^2}{z - z^2}$$

Значит, функция $\ln H(z)$ имеет вид

$$\ln H(z) = -z - 3\ln(1-z) + \ln(z) + c.$$

Таким образом,

$$H(z) = C\frac{ze^{-z}}{(1-z)^3}.$$

Заметим, что поскольку $G(z) = H(z)K(z)$, можно считать, что константа C является частью функции $K(z)$. Значит, соотношение (52) имеет вид

$$(z - z^2)\frac{ze^{-z}}{(1-z)^3}K'(z) = \frac{z^2}{(1-z)^2}.$$

Отсюда следует, что

$$K(z) = e^z + c.$$

Получаем, что для некоторой константы $c \in \mathbb{R}$

$$G(z) = \frac{z}{(1-z)^3} + c\frac{ze^{-z}}{(1-z)^3}.$$

Вычислим константу c. Заметим, что $G'(0) = S_1 = 0$. С другой стороны,

$$G'(z) = \frac{(1-z)^3 + 3z(1-z)^2}{(1-z)^6} + c\frac{(e^{-z} - ze^{-z})(1-z)^3 + 3ze^{-z}(1-z)^2}{(1-z)^6},$$

то есть

$$G'(0) = 1 + c = 0.$$

Получаем, что $c = -1$, и

$$G(z) = \frac{z(1-e^{-z})}{(1-z)^3}.$$

Определим теперь производящую функцию последовательности E_n

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n z^n.$$

Заметим, что в силу соотношения $E_n = S_n - S_{n-1}$,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (S_n - S_{n-1}) z^n = G(z) - zG(z) = \frac{z(1-e^{-z})}{(1-z)^2}.$$

Теперь необходимо разложить функцию $F(z)$ в ряд. Для этого заметим, что

$$\frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n z^n,$$

$$1 - e^{-z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} z^n.$$

Таким образом, используя следующее соотношение для неполной гамма-функции

$$\frac{\Gamma(n+1,-1)}{e\Gamma(n+1)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

получаем требуемую формулу для E_n

$$\begin{aligned} E_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}(n-k)}{k!} = n\left(1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}\right) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= n\left(1 - \frac{\Gamma(n+1,-1)}{e\Gamma(n+1)}\right) - \frac{\Gamma(n,-1)}{\Gamma(n)}. \end{aligned}$$

$\square$

Замечание. В Теореме 4.1 было показано, что без запрета занятия самого левого места математические ожидания имеют следующий вид

$$\mathbb{E}\{X'_n\} = \frac{2n-1}{3} = \frac{2}{3}n + o(n).$$

А соотношение из Теоремы 4.6 можно записать в следующем виде

$$\mathbb{E}\{X_n\} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)n + o(n).$$

Заметим, что

$$\frac{2}{3} > 1 - \frac{1}{e}.$$

Значит, в случае запрета занятия самого левого места асимптотически интервалов будет расположено меньше, чем при его отсутствии.

5 Размещение интервалов случайной длины

Теперь рассмотрим процесс, в котором на отрезок размещаются интервалы случайной длины. Предположим, что теперь на каждом шагу сначала случайным образом определяется длина интервала, который мы хотим разместить, а уже потом, также случайным образом, определяется место его расположения. Будем считать, что распределение длины отрезка не зависит от длины текущего интервала, а его место равномерно распределено среди всех возможных позиций.

Заметим, что ранее мы изучали не общее занятое место, а суммарное количество расположенных отрезков, так как все располагаемые отрезки имели одинаковую длину. Однако в данном случае две обозначенные выше величины не выражаются однозначно друг через друга. Поэтому в этом параграфе мы будем обозначать за ξ_n общее занятое место.

Формально, последовательность ξ_n можно определить следующим образом

$$\xi_n = \begin{cases} 0, l^* > n \\ l^* + \xi_{\eta_{n,l^*}} + \xi_{n-l^*-\eta_{n,l^*}} \end{cases}$$

Теорема 5.1. *Пусть случайная величина l имеет следующее распределение*

$$\mathbb{P}\{l=1\} = p_1,$$
$$\mathbb{P}\{l=2\} = p_2 = 1 - p_1.$$

В таком случае математическое ожидание случайной величины ξ_n для $n \geqslant 2$ имеет следующий вид

$$\mathbb{E}\{\xi_n\} = \frac{1-p_2^2}{2p_2^2} + n\left(1 + \frac{1-p_2}{2p_2^2}\right) - n\frac{1+p_2}{2p_2^2}\frac{\Gamma(n+1,-2p_2)}{e^{2p_2}\Gamma(n+1)} - \frac{1+p_2}{p_2}\frac{\Gamma(n,-2p_2)}{e^{2p_2}\Gamma(n)}.$$

Доказательство Теоремы 5.1: Заметим, что

$$\mathbb{E}\{\xi_n\} = \mathbb{E}\{\mathbb{E}\{\xi_n|l^*\}\} = p_1\mathbb{E}\{\xi_n|l=1\} + p_2\mathbb{E}\{\xi_n|l=2\}.$$

Значит, для $n=1$ мы получаем

$$\mathbb{E}\{\xi_1\} = p_1,$$

а для $n > 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{\xi_n\} &= p_1(1 + \mathbb{E}\left\{\xi_{\eta_{n,1}}\right\} + \mathbb{E}\left\{\xi_{n-1-\eta_{n,1}}\right\}) + p_2(2 + \mathbb{E}\left\{\xi_{\eta_{n,2}}\right\} + \mathbb{E}\left\{\xi_{n-2-\eta_{n,2}}\right\}) \\ &= p_1\left(1 + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\mathbb{E}\{\xi_i\}\right) + p_2\left(2 + \frac{2}{n-1}\sum_{i=0}^{n-2}\mathbb{E}\{\xi_i\}\right).\end{aligned}$$

Сохраним обозначение $S_n = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}\{\xi_i\}$. Получается, что для этой последовательности верны соотношения

$$\begin{aligned} S_0 &= 0 \\ S_1 &= p_1 \\ S_n - S_{n-1} &= p_1\left(1 + \frac{2}{n}S_{n-1}\right) + p_2\left(2 + \frac{2}{n-1}S_{n-2}\right), \qquad n \geqslant 2. \end{aligned} \tag{53}$$

Определив производящую функцию

$$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n} S_{n-1} z^n,$$

уравнение (53) можно записать как дифференциальное уравнение, определяющее эту функцию. Для этого домножим (53) на z^n и сложим по всем $n \geqslant 2$

$$\sum_{n=2}^{\infty} S_n z^n - \sum_{n=2}^{\infty} S_{n-1} z^n = (p_1 + 2p_2)\sum_{n=2}^{\infty} z^n + 2p_1 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} S_{n-1} z^n + 2p_2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} S_{n-2} z^n.$$

Это равенство эквивалентно следующему

$$\sum_{n=2}^{\infty} S_n z^n - z\sum_{n=1}^{\infty} S_n z^n = (p_1 + 2p_2)z^2\sum_{n=0}^{\infty} z^n + 2p_1 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} S_{n-1} z^n + 2p_2 x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} S_{n-1} z^n.$$

Заметим, что

$$F'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n.$$

Значит, так как $S_0 = 2$ и $S_1 = p_1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} S_n z^n &= F'(z) - p_1 z, \\ \sum_{n=1}^{\infty} S_n z^n &= F'(z), \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} S_{n-1} z^n &= F(z). \end{aligned}$$

Таким образом, соотношение (53) эквивалентно следующему

$$F'(x) - p_1 z - zF'(z) = (p_1 + 2p_2)\frac{z^2}{1-z} + 2p_1 F(z) + 2p_2 x F(z).$$

Значит, $F(z)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$(1-x)F'(z) - 2(p_1 + p_2 x)F(z) = (p_1 + 2p_2)\frac{z^2}{1-z} + p_1 z = \frac{p_1 z + 2p_2 z^2}{1-z}.$$

Все решения данного уравнения представимы в виде

$$F(z) = P(z)Q(z),$$

где функции $P(z)$ и $Q(z)$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$(1-z)P'(z) - 2(p_1 + p_2 z)P(z) = 0,$$
$$(1-z)P(z)Q'(z) = \frac{p_1 z + 2p_2 z^2}{1-z}.$$

Решениями первого уравнения является набор функций

$$P(z) = C\frac{e^{2(p_1-1)z}}{(1-z)^2}$$

для всех вещественных констант C. Так как мы ищем функцию $F(z)$, не умаляя общности можно считать что $C = 1$. Значит, функция $Q(z)$ удовлетворяет уравнению

$$e^{2(p_1-1)z}Q'(z) = p_1 z + 2p_2 z^2$$

Таким образом, так как $p_1 + p_2 = 1$

$$\begin{aligned} Q(z) &= \int_0^z (p_1 y + 2p_2 y^2)e^{2p_2 y}dy + C \\ &= e^{2p_2 z}\left(\frac{p_2+1}{4p_2^2} - \frac{(p_2+1)z}{2p_2} + z^2\right) - \frac{p_2-1}{4p_2^2} + C. \end{aligned}$$

Получаем, что функция $F(z)$ имеет вид

$$F(z) = \frac{\left(\frac{p_2+1}{4p_2^2} - \frac{(p_2+1)z}{2p_2} + z^2\right) - \left(\frac{p_2+1}{4p_2^2} + C\right)e^{-2p_2 z}}{(1-z)^2}$$

По определению мы знаем, что $F(0) = 0$. Значит, $C = 0$. Таким образом

$$F(z) = \frac{\left(\frac{p_2+1}{4p_2^2} - \frac{(p_2+1)z}{2p_2} + z^2\right) - \frac{p_2+1}{4p_2^2}e^{-2p_2 z}}{(1-z)^2}.$$

Значит

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n z^n = F'(z) = \frac{\frac{p_2+1}{2p_2^2}}{(1-z)^3} - \frac{\frac{(p_2+1)(z+1)}{2p_2}}{(1-z)^3} + \frac{2z}{(1-z)^3} - \frac{\frac{p_2+1}{2p_2^2}e^{-2p_2z}(p_2(z-1)+1)}{(1-z)^3}$$

$$= \frac{p_2+1}{2p_2^2(1-z)^3} - \frac{p_2(p_2+1)(z+1)}{2p_2^2(1-z)^3} + \frac{4zp_2^2}{2p_2^2(1-z)^3} - \frac{(p_2+1)e^{-2p_2z}(p(z-1)+1)}{2p_2^2(1-z)^3}$$

$$= \frac{1-p_2^2-p_2(p_2+1)z+4zp_2^2}{2p_2^2(1-z)^3} - \frac{e^{-2p_2z}(p_2(p_2+1)z+1-p_2^2)}{2p_2^2(1-z)^3}$$

Таким образом, мы получаем что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left\{\xi_n\right\} z^n = \frac{1-p_2^2-p_2(p_2+1)z+4zp_2^2}{2p_2^2(1-z)^2} - \frac{e^{-2p_2z}(p_2(p_2+1)z+1-p_2^2)}{2p_2^2(1-z)^2}.$$

Мы знаем, что

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{i=0}^{\infty}(i+1)z^i.$$

Значит

$$\frac{1-p_2^2-p_2(p_2+1)z+4zp_2^2}{2p_2^2(1-z)^2} = \frac{1-p_2^2}{2p_2^2}\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)z^i + \frac{4p_2^2-p_2(p_2+1)}{2p_2^2}z\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)z^i$$

$$= \frac{1-p_2^2}{2p_2^2}\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)z^i + \frac{4p_2^2-p_2(p_2+1)}{2p_2^2}\sum_{i=1}^{\infty} iz^i$$

$$= \frac{1-p_2^2}{2p_2^2} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1-p_2^2}{2p_2^2}(i+1) + \frac{4p_2^2-p_2(p_2+1)}{2p_2^2}i\right)z^i$$

$$= \frac{1-p_2^2}{2p_2^2} + \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1-p_2^2}{2p_2^2} + \left(1+\frac{1-p_2}{2p_2^2}\right)i\right)z^i$$

$$= \frac{1-p_2^2}{2p_2^2}\sum_{i=0}^{\infty} z^i + \left(1+\frac{1-p_2}{2p_2^2}\right)\sum_{i=1}^{\infty} iz^i.$$

Аналогично

$$\frac{p_2(p_2+1)z+1-p_2^2}{2p_2^2(1-z)^2} = \frac{1-p_2^2}{2p_2^2}\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)z^i + \frac{p_2^2+p_2}{2p_2^2}\sum_{i=1}^{\infty} iz^i$$

$$= \frac{1-p_2^2}{2p_2^2}\sum_{i=0}^{\infty} z^i + \frac{1+p_2}{2p_2^2}\sum_{i=1}^{\infty} iz^i.$$

Заметим, что

$$e^{-2p_2z} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-2p_2z)^i}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-2p_2)^i}{i!} z^i.$$

Осталось перемножить описанные выше ряды

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-p_2^2}{2p_2^2}\sum_{i=0}^{\infty} z^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-2p_2)^i}{i!}z^i\right) &= \frac{1-p_2^2}{2p_2^2}\sum_{i=0}^{\infty} z^i \sum_{k=0}^{i}\frac{(-2p_2)^k}{k!} \\ &= \frac{1-p_2^2}{2p_2^2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{-2p_2}\Gamma(i+1,-2p_2)}{\Gamma(i+1)}z^i,\end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned}\left(\frac{1+p_2}{2p_2^2}\sum_{i=1}^{\infty} iz^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-2p_2)^i}{i!}z^i\right) &= \frac{1+p_2}{2p_2^2}\sum_{i=0}^{\infty} z^i \sum_{k=0}^{i}\frac{(-2p_2)^k}{k!}(i-k) \\ &= \frac{1+p_2}{2p_2^2}\sum_{i=0}^{\infty} z^i \left(i\sum_{k=0}^{i}\frac{(-2p_2)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{i}\frac{(-2p_2)^k}{(k-1)!}\right) \\ &= \frac{1+p_2}{2p_2^2}\sum_{i=0}^{\infty} z^i \left(i\sum_{k=0}^{i}\frac{(-2p_2)^k}{k!} + 2p_2\sum_{k=0}^{i-1}\frac{(-2p_2)^k}{k!}\right) \\ &= \frac{1+p_2}{2p_2^2}\sum_{i=0}^{\infty} iz^i \left(\sum_{k=0}^{i}\frac{(-2p_2)^k}{k!}\right) \\ &\quad + \frac{1+p_2}{p_2}\sum_{i=1}^{\infty} z^i \left(\sum_{k=0}^{i-1}\frac{(-2p_2)^k}{k!}\right) \\ &= \frac{1+p_2}{2p_2^2}\sum_{i=0}^{\infty} i\frac{e^{-2p_2}\Gamma(i+1,-2p_2)}{\Gamma(i+1)}z^i \\ &\quad + \frac{1+p_2}{p_2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{e^{-2p_2}\Gamma(i,-2p_2)}{\Gamma(i)}z^i\end{aligned}$$

Объединив все написанные выше суммы, получим что для $n \geqslant 2$

$$\mathbb{E}\left\{\xi_n\right\} = \frac{1-p_2^2}{2p_2^2} + n\left(1+\frac{1-p_2}{2p_2^2}\right) - n\frac{1+p_2}{2p_2^2}\frac{\Gamma(n+1,-2p_2)}{e^{2p_2}\Gamma(n+1)} - \frac{1+p_2}{p_2}\frac{\Gamma(n,-2p_2)}{e^{2p_2}\Gamma(n)},$$

из чего следует утверждение теоремы. $\square$

6 Приложение

Теорема 6.1. *Пусть распределение случайной величины Y однозначно определяется ее моментами, а случайные величины Y_n при $(n = 1, 2, \ldots)$ имеют моменты любого порядка. Пусть также*

$$\lim_{n\to\infty} EY_n^k = EY^k \quad \textit{для всех} \quad k = 1, 2, \cdots .$$

Тогда Y_n слабо сходятся к Y.

Доказательство этой теоремы содержится в книге [23]

Доказательство Леммы 3.6:. Для начала покажем, что существует последовательность $f^*(n)$, такая что

$$c_1 c_2 \sum_{i=0}^{n-l} i^a (n-l-i)^b = (n-l)^{a+b+1}(c + f^*(n)).$$

Заметим что

$$\sum_{i=0}^{n-l} i^a (n-l-i)^b = \sum_{i=0}^{n-l} i^a \sum_{j=0}^{b} C_b^j (n-l)^{b-j}(-i)^j = \sum_{j=0}^{b} (-1)^j C_b^j (n-l)^{b-j} \sum_{i=0}^{n-l} i^{a+j}$$
$$= \sum_{j=0}^{b} (-1)^j C_b^j (n-l)^{b-j}(n-l)^{a+j+1} \sum_{i=0}^{n-l} \frac{i^{a+j}}{n^{a+j+1}}$$
$$= (n-l)^{a+b-1} \sum_{j=0}^{b} (-1)^j C_b^j \sum_{i=0}^{n-l} \frac{i^{a+j}}{(n-l)^{a+j+1}}.$$

Определим набор последовательностей

$$f_j(n) = \sum_{i=0}^{n-l} \frac{i^{a+j}}{(n-l)^{a+j+1}} - \frac{1}{a+j+1}.$$

Заметим что при $n \to \infty$ верно $f_j(n) \to 0$. Используя последовательности $f_j(n)$, написанную выше сумму можно переписать следующим образом

$$\sum_{i=0}^{n-l} i^a (n-l-i)^b = (n-l)^{a+b-1} \sum_{j=0}^{b} C_b^j \left(\frac{(-1)^j}{a+j+1} + (-1)^j f_j(n) \right)$$

Наконец, положим

$$f^*(n) = c_1 c_2 \sum_{j=0}^{b} C_b^j (-1)^j f_j(n)$$

и заметим, что

$$\sum_{j=0}^{b}\frac{(-1)^jC_b^j}{a+j+1}=b!\sum_{j=0}^{b}\frac{(-1)^j}{j!(b-j)!(a+j+1)}=\frac{a!b!}{(a+b+1)!}.$$

Теперь покажем, что выполняется равенство

$$\sum_{i=0}^{n-l}i^a(c_1+f_1(i))(n-l-i)^b(c_2+f_2(n-l-i))=c_1c_2\sum_{i=0}^{n-l}i^a(n-l-i)^b+o((n-l)^{a+b+1}).$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n-l}i^a(c_1+f_1(i))(n-l-i)^b(c_2+f_2(n-l-i))\\&\quad=c_1c_2\sum_{i=0}^{n-l}i^a(n-l-i)^b+c_1\sum_{i=0}^{n-l}i^a(n-l-i)^bf_2(n-l-i)\\&\quad\quad+c_2\sum_{i=0}^{n-l}i^a(n-l-i)^bf_1(i)+\sum_{i=0}^{n-l}i^a(n-l-i)^bf_1(i)f_2(n-l-i).\end{aligned}$$

Мы знаем, что $f_1(n),f_2(n)\to 0$ при $n\to\infty$. Значит,

$$C^*=\max(\sup_{n\in\mathbb{N}}|f_1(n)|,\sup_{n\in\mathbb{N}}|f_2(n)|)<\infty.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\left|c_1\sum_{i=0}^{n-l}i^a(n-l-i)^bf_2(n-l-i)\right|&\leqslant|c_1|\sum_{i=0}^{n-l}i^a(n-l-i)^b\left|f_2(n-l-i)\right|,\\\left|c_2\sum_{i=0}^{n-l}i^a(n-l-i)^bf_1(i)\right|&\leqslant|c_2|\sum_{i=0}^{n-l}i^a(n-l-i)^b\left|f_1(i)\right|,\\\left|\sum_{i=0}^{n-l}i^a(n-l-i)^bf_1(i)f_2(n-l-i)\right|&\leqslant C^*\sum_{i=0}^{n-l}i^a(n-l-i)^b\left|f_1(i)\right|.\end{aligned}$$

То есть, достаточно показать, что

$$\frac{1}{n^{a+b+1}}\sum_{i=0}^{n-l}i^a(n-l-i)^b\left|f_1(i)\right|\xrightarrow{n\to\infty}0,$$

$$\frac{1}{n^{a+b+1}}\sum_{i=0}^{n-l}i^a(n-l-i)^b\left|f_2(n-l-i)\right|\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

Докажем первое соотношение. Второе будет аналогично. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $f_1(n) \to 0$, то существует N_0, такое что для всех $n > N_0$ верно неравенство $|f_1(n)| < \varepsilon$. Для $n > e^l + 1$ распишем данную сумму следующим образом:

$$\sum_{i=0}^{n-l} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right| = \sum_{i=\ln(n)+1}^{n-l} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right| + \sum_{i=0}^{\ln(n)} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right|$$

Рассмотрим отдельно каждую сумму. При достаточно больших n имеет место неравенство $\ln(n) > N_0$. Значит,

$$\sum_{i=\ln(n)+1}^{n-l} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right| \leqslant \varepsilon \sum_{i=\ln(n)+1}^{n-l} i^a (n-l-i)^b \leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{n-l} i^a (n-l-i)^b.$$

Мы знаем, что

$$\sum_{i=0}^{n-l} i^a (n-l-i)^b = (n-l)^{a+b+1} \left(c + f^*(n)\right)$$

Значит,

$$\frac{1}{(n-l)^{a+b+1}} \sum_{i=\ln(n)+1}^{n-l} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right| \leqslant \varepsilon \left(c + f^*(n)\right).$$

Это верно для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n. Значит,

$$\frac{1}{(n-l)^{a+b+1}} \sum_{i=\ln(n)+1}^{n-l} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Теперь рассмотрим вторую сумму. Заметим, что

$$\sum_{i=0}^{\ln(n)} i^a (n-l-i)^b \left|f_1(i)\right| \leqslant C^* \sum_{i=0}^{\ln(n)} i^a (n-l-i)^b.$$

Мы уже вычисляли, что

$$\sum_{i=0}^{\ln(n)} i^a (n-l-i)^b = (n-l)^{a+b-1} \sum_{j=0}^{b} (-1)^j C_b^j \sum_{i=0}^{\ln(n)} \frac{i^{a+j}}{(n-l)^{a+j+1}}.$$

Также, мы знаем, что

$$\sum_{i=0}^{\ln(n)} \frac{i^{a+j}}{(n-l)^{a+j+1}} = \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^{a+j+1} \left(\frac{1}{a+j+1} + f_j(\ln(n)+l)\right)$$
$$\leqslant \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^{a+1} \left(\frac{1}{a+j+1} + f_j(\ln(n)+l)\right).$$

Значит, при $n \to \infty$

$$\frac{1}{(n-l)^{a+b+1}} \sum_{i=0}^{\ln(n)} i^a (n-l-i)^b \leqslant \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^{a+1} (c + f^*(\ln(n)+l)),$$

где правая часть стремится к нулю, что завершает доказательство леммы. $\square$

Доказательство Леммы 3.7: Заметим, что

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha}(c+f(n))z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha}(c+f(k))z^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(c\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha} + \sum_{k=0}^{n} k^{\alpha} f(k)\right) z^n$$

Определим две последовательности

$$f_1^*(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^{\alpha}}{n^{\alpha+1}} - \frac{1}{\alpha+1}.$$
$$f_2^*(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^{\alpha}}{n^{\alpha+1}} f(k).$$

Тогда

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha}(c+f(n))z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+1}\left(\frac{c}{\alpha+1} + cf_1^*(n) + f_2^*(n)\right) z^n.$$

Определим необходимую нам последовательность как

$$f^*(n) = cf_1^*(n) + f_2^*(n).$$

Осталось показать что $f^*(n) \to 0$ при $n \to 0$. Так как

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^{\alpha}}{n^{\alpha+1}} \to \frac{1}{\alpha+1}, \qquad n \to \infty,$$

получаем что $cf_1^*(n) \to 0$. Чтобы показать, что $f_2^*(n) \to 0$, достаточно заметить что

$$|f_2^*(n)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{k^\alpha}{n^{\alpha+1}}\right| |f(k)| \leqslant \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} |f(k)|}{n} \to 0 \qquad n \to \infty.$$

$\square$

Доказательство Леммы 3.8: Заметим, что

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} n^\alpha (c+f(n)) z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} v_i z^n\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} k^\alpha (c+f(k)) v_{n-k} z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n^{\alpha+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{n} \frac{k^\alpha}{n^\alpha}\frac{c+f(k)}{n^{\frac{1}{2}}} v_{n-k} z^n\end{aligned}$$

Определим последовательность $f^*(n)$ как

$$f^*(n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^\alpha}{n^\alpha}\frac{c+f(k)}{n^{\frac{1}{2}}} v_{n-k}.$$

Необходимо доказать что $f^*(n) \to 0$ при $n \to \infty$. Для этого заметим что

$$\begin{aligned}|f^*(n)| &\leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{k^\alpha}{n^\alpha}\frac{|c+f(k)|}{n^{\frac{1}{2}}} |v_{n-k}| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=0}^{n} |c+f(k)||v_{n-k}| \\ &\leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}|c|\sum_{k=0}^{n} |v_{n-k}| + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\sum_{k=0}^{n} |f(k)||v_{n-k}|\end{aligned}$$

Так как $f(n) \to 0$, то существует некоторая константа K, такая что $|f(n)| < K$ для любого n. Тогда

$$|f^*(n)| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}|c|\sum_{k=0}^{n} |v_{n-k}| + \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}K\sum_{k=0}^{n} |v_{n-k}| \leqslant \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}(|c|+|K|)\sum_{k=0}^{\infty} |v_k| \to 0.$$

$\square$

Дифференцирование по частям интеграла (26). Рассмотрим интеграл (26). Целью данного процесса является отделение важных для асимптотики слагаемых от неважных, а так же вынесение в важных слагаемых множителей $e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}$ и $(1-x)$ из-под интеграла с целью их дальнейшего сокращения.

$$\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2 h_k(x)dx = e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int_0^z h_k(x)dx - \int_0^z\int_0^x h_k(y)dyd\left(e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2\right)$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int_0^z h_k(x)dx - \int_0^z\int_0^x h_k(y)dy\left(2\sum_{i=0}^{l-2}x^i e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)^2 - 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)\right)dx$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int_0^z h_k(x)dx - \int_0^z\int_0^x h_k(y)dy\left(2(1-x^{l-1})e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x) - 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)\right)dx$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int_0^z h_k(x)dx + 2\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx.$$

Далее, проинтегрировав по частям второе слагаемое, получим

$$e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int_0^z h_k(x)dx + 2\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int_0^z h_k(x)dx + 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int_0^z x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx - 2\int_0^z\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydud\left(e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x)\right)$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int_0^z h_k(x)dx + 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int_0^z x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx - 2\int_0^z\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydu\left(2\sum_{i=1}^{l-1}x^i e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}(1-x) - e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\right)dx$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int_0^z h_k(x)dx + 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int_0^z x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx - 2\int_0^z\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydu\left((1-2x^{l-1})e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\right)dx$$

$$= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int_0^z h_k(x)dx + 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int_0^z x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx - 2\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx + 4\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}x^{l-1}\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx.$$

Наконец, проинтегрировав по частям последние два слагаемых, получим

$$
\begin{aligned}
&= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int_0^z h_k(x)dx + 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int_0^z x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx \\
&\qquad -2\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx \\
&\qquad +4\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}x^{l-1}\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx \\
&= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int_0^z h_k(x)dx + 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int_0^z x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx \\
&\qquad -2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx \\
&\qquad\qquad +4\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\sum_{i=0}^{l-2}x^i\int_0^x\int_0^t u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudtdx \\
&\qquad +4e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z x^{l-1}\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx \\
&\qquad\qquad -8\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\sum_{i=0}^{l-2}x^i\int_0^x t^{l-1}\int_0^t u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudtdx \\
&= e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)^2\int_0^z h_k(x)dx + 2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}(1-z)\int_0^z x^{l-1}\int_0^x h_k(y)dydx \\
&\qquad -2e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx \\
&\qquad\qquad +4e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{z^i}{i}}\int_0^z x^{l-1}\int_0^x u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudx \\
&\qquad +4\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\sum_{i=0}^{l-2}x^i\int_0^x\int_0^t u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudtdx \\
&\qquad\qquad -8\int_0^z e^{2\sum\limits_{i=1}^{l-1}\frac{x^i}{i}}\sum_{i=0}^{l-2}x^i\int_0^x t^{l-1}\int_0^t u^{l-1}\int_0^u h_k(y)dydudtdx.
\end{aligned}
$$

Литература

[1] *Rényi A.*, "On a one-dimensional problem concerning space-filling" // Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences. Vol. 3. P. 109–127. 1958.

[2] *Dvoretzky A., Robbins H.*, "On the "parking" problem" // Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences. Vol. 9. P. 209–226. 1964.

[3] *Pinsky R. G.*, "Problems from the Discrete to the Continuous" // Springer International Publishing Switzerland. Chapter 3. P. 21–34. 2014.

[4] *Clay M. P., Simanyi N. J.*, "Rényi's parking problem revisited" // Stochastic and Dynamics. Vol. 2 (16). 1660006. 2016.

[5] *Gerin L.*, "The Page-Rényi parking process" // Electronic Journal of Combinatorics. Vol. 4 (22). P4.4. 2015.

[6] *Ільєнко А. Б., Фатенко В. В.*, "Узагальнення задачі Реньї про паркування" // Наукові вісті НТУУ «КПІ» : міжнародний науково-технічний журнал. № 4(114). С. 54–60. 2017.

[7] *Ананьевский С. М.*, "Задача парковки для отрезков различной длины"// Записки научных семинаров ПОМИ. Т.228. Вероятность и статистика. С. 16–23. 1996.

[8] *Ананьевский С. М.*, "Некоторые обобщения задачи о «парковке»" // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. Т 3 (61). Вып. 4. С. 525–532. 2016.

[9] *Ney P. E.*, "A random interval filling problem" // Annals of Mathematical Statistics Vol. 2 (33). P. 702–718. 1962.

[10] *Mullooly J. P.*, "A one dimensional random space-filling problem" // Journal of Applied Probability, Vol. 5. No. 2. P. 427–435. 1968.

[11] *Baryshnikov Y., Gnedin A.*, "Counting intervals in the packing process" // The Annals of Applied Probability. Vol. 11. No. 3. P. 863–877. 2001.

[12] *Coffman E. G., Leopold Flatto L., and Jelenković P.* "Interval packing: the vacant interval distribution" // The Annals of Applied Probability. Vol. 10. No. 1. P. 240–257. 2000.

[13] *Rhee W. T., Talagrand M.* "Packing random intervals" // The Annals of Applied Probability. Vol. 6. No. 2. P. 572–576. 1996.

[14] *Поярков А. П.*, “Случайные упаковки куба” // Фундаментальная и прикладная математика. Т. 11. No 5. С. 187–196. 2005.

[15] *Mackey M., Sullivan W. G.*, “Exhaustion of an interval by iterated Rényi parking”// arXiv:1610.06423 [math.PR]. 2016.

[16] *Xu C., Skiena S.*,“Marking Streets to Improve Parking Density”// arXiv:1503.09057 [physics.soc-ph]. 2015.

[17] *Крюков Н. А.*, “Дискретизация задачи о парковке” // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. Т. 7 (65). Вып. 4, С. 662–677. 2019.

[18] *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.*, “Асимптотическая нормальность в дискретном аналоге задачи о парковке”// Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 495. Вероятность и статистика. С. 9–36. 2020.

[19] *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.*, “Задача об эгоистичной парковке” // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. Т. 5 (63). Вып. 4. С. 549–555. 2018.

[20] *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.*, “Асимптотическая нормальность в задаче об эгоистичной парковке” // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. Т. 6 (64). Вып. 4. С. 592–607. 2019.

[21] *Ананьевский С. М., Крюков Н. А.*, “Об асимптотической нормальности в одном обобщении задачи Реньи” // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. Т. 6 (64). Вып. 3. С. 353–362. 2019.

[22] *Крюков Н. А.*, “Односторонняя эгоистичная парковка”// Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 501. Вероятность и статистика. С. 194–202. 2021.

[23] *Billingsley P.*, “Probability and Measure” // Third Edition, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley Sons, New York, 1985.