УТВЕРЖДАЮ
И.о. декана механико-математического факультета МГУ
доктор физико-математических наук, профессор
Чубариков В.Н.

Отзыв ведущей организации

на диссертацию Елены Александровны Лебедевой
"Всплеск-преобразование: частотно-временная локализация, разложения по системам всплесков, обратимость"

на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
(специальность 01.01.01 – математический анализ).

Предметом диссертации Е.А.Лебедевой "Всплеск-преобразование: частотно-временная локализация, разложения по системам всплесков, обратимость" является теория всплесков (вейвлетов), раздел теории функций, изучающий специальные функциональные системы – всплески. Всплески характеризуются двумя определяющими свойствами – каждая система всплесков является системой представления в определенном функциональном пространстве (например, в L_2 на соответствующем многообразии), и все функции этой системы порождаются одной функцией (всплеск-функцией), либо специальным набором функций, с помощью операций сдвига и сжатия аргумента. Теория всплесков, зародившаяся ещё в начале XX века с работ Хаара, стала стремительно развиваться в середине 1980-х годов, когда были построены первые примеры гладких всплесков с компактным носителем, всплесков, быстро убывающих по времени и частоте и т.д. За это время по теории всплесков написаны несколько тысяч работ, всплески вошли во все пакеты математических компьютерных программ, нашли широкие применения в задачах сжатия и передачи информации, численных методах по решению уравнений с частными производными, и т.д.

В представленной диссертации изучается широкий круг задач теории всплесков. Главные результаты можно разделить на три основных направления.

Первое – проблема частотно-временной локализации. Актуальность темы объясняется уже тем, что всплески создавались как базисные системы функций с хорошей частотно-временной локализацией. Так, всплески Хаара прекрасно локализованы по времени (имеют компактный носитель), но плохо – по частоте (преобразование Фурье медленно убывает). Обратная ситуация – со всплесками Шеннона-Котельникова. Одной из наиболее удачных конструкций является система всплесков Мейера, построенная в 1986 г. и и удостоенная Абелевской премии тридцать лет спустя. Всплески Мейера быстро убывают и в частотной и во временной областях. В качестве измерителя частотно-временной локализации функции принято брать так называемую константу неопределенности – функционал специального вида, зависящий от скорости убывания на бесконечности как самой функции, так и её преобразования Фурье. Именно нахождению оптимальной системы Мейера, имеющей минимальную константу неопределенности, посвящена глава 2 диссертации. Построение систем всплесков с хорошими показателями частотно-временной локализации позволяет увеличить скорость сходимости алгоритмов всплеск-разложений функций при сжатии и передаче сигналов, улучшить свойства всплеск-преобразований и т.д. Этой тематикой занимались многие известные учёные, например, Добеши, Чуи, Баттл и другие. Соискателю удалось получить компактное аналитическое выражение для константы неопределённости всплесков Мейера и построить оптимальную систему, решив соответствующую вариационную задачу. Доказана единственность оптимальной всплеск-функции Мейера и исследованы её свойства. При этом единственное решение донной задачи получается из решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. В работе приведены результаты численного решения этого уравнения с большой точностью.

Построены принципиально новые системы всплесков, названные в работе системами квазисплайн-всплесков. Они имеют следующее характерное свойство: всплеск-функции убывают с экспоненциальной скоростью на бесконечности, преобразование Фурье убывает со степенной скоростью (причём степени могут быть сколь угодно большими), а константы неопределённости равномерно ограничены. Основная идея построения подобных систем состоит в применении лилейных методов усреднения тригонометрических сумм к маскам масштабирующих функций. Причем, разработанная техника позволяет применять разные методы усреднения: Валле-Пуссена, Фейера, и т.д.

Вторoе – построение новых методов исследования периодических всплесков. В главе 3 строятся системы периодических всплесков на основе фреймов Парсеваля, имеющие асимптотически оптимальные константы неопределенности. В главе 4 периодические всплески строятся как периодизации нестационарных систем всплесков, при этом удалось в полную силу использовать преимущество нестационарности, а именно, выбирать последовательность масок всплесков произвольно гладкими.

Третье – исследование свойств всплесков на абелевых группах Виленкина, в частности, на группах Кантора. Двоичная структура групп Виленкина удобна для кодирования дискретных сигналов, поэтому в последнее время гармонический анализ на таких группах все более широко применяется в теории информации. В данной диссертации впервые вводится понятие константы неопределенности для всплесков на группе Кантора и вычисляются константы неопределенности некоторых известных систем всплесков.

К достоинствам диссертации следует отнести несомненную научную новизну результатов, а также их полноту и практическую значимость.

Теперь – о недостатках. Несколько найденных опечаток и неточностей не носят систематического характера и легко устранимы. Более существенные замечания касаются содержания и компоновки работы. Все они носят методологический и стилевой характер и не затрагивают научных результатов, но о них стоит упомянуть.

Первое – слабая связь разных частей диссертации между собой. Вполне понятно желание исследователя включить в диссертацию все полученные в последние годы результаты. Однако, при таком подходе работа зачастую теряет форму и замысел. Она становится похожей на отчет по гранту, а не на единое цельное произведение. Это заметно уже в чрезмерно длинном названии, где автор пытается совместить несколько различных тем. А также в необычно большом количестве глав (девять), многие из которых существуют автономно. Скажем, короткая девятая глава об обращении вейвлет-преобразований практически никак не связана с предыдущими главами. То же можно сказать о главе 6, где речь идет о дифференциальных уравнениях на группе Кантора, которые не упоминаются в работе ни до ни после этой главы.

На наш взгляд, в докторской диссертации соискатель должен не только представить интересные и глубокие результаты, но и продемонстрировать умение создать цельное произведение, хорошо структурировать, выделять главное. В данной работе можно выделить три основных направления (упомянутые в первой части отзыва), так автору и следовало разбивать диссертацию на главы. Главы 6 и 9 могли бы быть исключены вовсе, как не относящиеся к основным темам.

Второе – недостаточно продуманная структура работы и небрежность в компоновке текста. Автор соединил несколько своих статей в единый текст, и швы остались заметны. Например, подробное введение о группах Кантора, производных Гиббса и диадических всплесках дано в начале главы 6, на страницах 152 - 153, хотя к этому моменту мы уже давно пользуемся всеми этими понятиями. Такое введение уместнее смотрелось бы раньше – в начале главы 5. Группы Виленкина определяются и используются, начиная с раздела 5.1 (стр. 136). Однако, почти 40 страниц спустя, глава 7 начинается вводными словами о группах Виленкина, подразумевающими, что читатель впервые с ними знакомится. Неоднократно автор начинает главы словами “в данной работе мы решаем ... ” вместо “в данной главе ... ”. По всей видимости, тексты статей автора механически перенесены вместе со введениями в соответствующие главы диссертации. Подобная небрежность затрудняет чтение работы и влечет много других недостатков. В частности, иногда объекты определяется уже после того, как начали использоваться. Например, функция λ играет ключевую роль в определении метрики на группе Виленкина на стр 137, и я долгое время пытался найти ее в предшествующем тексте. Но оказалось, что она определяется только в следующем абзаце. Формула для константы неопределенности функции Мейера (на стр. 17 введения) завершается загадочным равенством $x = 2\theta$, при этом неясно, что такое θ. Заглянув в текст соответствующей главы, находим там (первый абзац стр. 71): “напомним, что мы рассматриваем вспомогательную функцию θ, параметр ω_0 которой равен $\pi/3$”. Ссылка на формулу (1.1) ситуацию не проясняет, так как функции θ в этой формуле нет. В результате долгого поиска, мы все же находим θ на стр. 41., где строится функция Мейера. Подобных примеров в тексте много.

В заключение – несколько разрозненных замечаний:

1). На стр. 155 читаем: “Мы рассматриваем распределения на группе Кантора, которые являются аналогами распределений в действительном анализе”. Что такое “распределения в действительном анализе”? Это меры? Или – распределения вероятностей? Оказывается, это обобщенные функции. Во всем тексте диссертации автор почему-то использует кальку с английского “распределения” вместо привычного и устоявшегося в русскоязычной литературе “обобщенные функции”. Иногда это приводит к непониманию и ставит читателя в тупик.

2). Утверждение о единственности обобщенной первообразной с точностью до константы называется в диссертации леммой Дю Буа Реймона, что кажется странным. Общеизвестная лемма Дю Буа Реймона из вариационного исчисления несколько более сложна и содержательна.

3). На стр 138, формула 5.1, ошибка в определении обратного преобразование Уолша.

4). В определении 5.2.1 стр 140 вторая формула не нужна, так как она является повторением первой для функции Ff.

Подчеркнем еще раз, что научная ценность работы не вызывает сомнений. Именно поэтому, с нашей точки зрения, уровень подачи материала, качество текста должны быть соответствующим, а подобная небрежность недопустима. По нашему мнению, автору следовало бы посвятить больше времени и усилий созданию качественного текста диссертационной работы.

Указанные недостатки, не умаляют научного уровня диссертации. Полученные результаты являются новыми и интересными. Основные результаты диссертации опубликованы соискателем в 15 работах, вышедших в ведущих российских и зарубежных журналах, в том числе и в самых высокорейтинговых (журнал Applied and Computational Harmonic Anlysis, в котором опубликовано три статьи соискателя, входит тройку лидеров мировых математических журналов). Результаты могут применяться в теории функций, теории приближений, в задачах сжатия и передачи информации, они будут интересны специалистам из МГУ, МИРАН им. Стеклова, Санкт-Петербургского и Воронежского государственных университетов. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Математические результаты и разработанные методы достаточны для защиты докторской диссертации. Диссертационная работа Е.А.Лебедевой отвечает всем критериям раздела II Положения о присуждении ученых степеней, установленным для докторских диссертаций, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ.

Отзыв обсуждён на заседании кафедры общих проблем управления механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова 31 августа 2017 года
(протокол No 2017/2018-1)

член-корреспондент РАН,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общих проблем управления
механико-математического факультета МГУ
Протасов В.Ю.

заведующий кафедрой общих проблем управления
доктор физико-математических наук, профессор
Фурсиков А.В.