

Министерство науки и высшего образования  
Российской Федерации

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
(МФТИ, Физтех)

Юридический адрес: 117303, г. Москва,  
ул. Керченская, дом 1А, корпус 1  
Почтовый адрес: 141700, Московская обл.,  
г. Долгопрудный, Институтский переулок, дом 9  
Тел.: +7 (495) 408-42-54, факс: +7 (495) 408-68-69  
info@mipt.ru

03.09.2024 № 26-05/7382  
на № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе



Баган Виталий  
Анатольевич

2024 г.

### ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию **Лобова Александра Андреевича**  
«Вершинные и рёберные расширения гиперкубов»,  
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-  
математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра,  
теория чисел и дискретная математика

Диссертация соискателя Лобова А.А. посвящена исследованию минимальных вершинных и рёберных расширений гиперкубов. С точки зрения приложений расширение графа является моделью для исследования отказоустойчивости вычислительных систем. Изначально данная модель была предложена в 1976 г. Дж. Хейзом для анализа отказов элементов, а после, в 1993 г. совместно с Ф. Харари расширена и для отказов связей. Тематике расширений графов посвящено большое количество работ. Объектом исследования обычно являются определённые классы графов, которые представляют интерес с прикладной точки зрения, например, циклы, деревья, решётки и т.п. Также встречаются и работы, посвящённые вычислительным алгоритмам построения расширений. «Гиперкуб» является одной из классических топологий вычислительной системы, что, учитывая вышесказанное, определяет актуальность поставленной задачи.

Большинство работ, направленных на исследование расширений графов, посвящены различным классам графов: цепи, циклы, решётки, торы, деревья и т.д. Лишь для некоторых классов графов удалось полностью описать минимальные вершинные или рёберные расширения. Во многих случаях найдены только частные решения, в связи с чем полученные результаты нельзя считать завершёнными. Малоизученным является и расширения класса гиперкубов. Так в своей первой работе 1993 г. Ф. Харари и Дж. Хейз описали минимальное рёберное 1-расширение гиперкуба, при этом остался открытым вопрос о существовании других минимальных рёберных 1-расширений, неизоморфных предложенному. По поводу минимальных вершинных



расширений, которые с прикладной точки зрения представляют большой интерес, никаких результатов получить не удавалось. Данная работа вносит большой вклад в исследование минимальных вершинных и рёберных расширений гиперкубов, а также и некоторых других классов графов.

Диссертационная работа Лобова А. А. состоит из введения, трёх глав, заключения, списка используемой литературы, содержащей 84 наименования, и двух приложений.

Во **введении** обосновывается актуальность темы, представлен обзор литературы по теме исследования, даётся формулировка целей и основных поставленных задач, определены положения, выносимые на защиту.

**Первая глава** посвящена вершинным расширениям гиперкубов. В ней определён класс 4-слойных графов – двудольных графов за исключением полных двудольных графов. Для представителей данного класса графов предложена схема построения вершинных 1- и 2-расширений. Показано, что данные схемы построения расширений применимы к гиперкубам, и определено точное количество неизоморфных расширений гиперкубов, которые могут быть построены по данным схемам. Доказана неприводимость найденных вершинных 1-расширений гиперкубов.

Во **второй главе** описываются результаты, касающиеся рёберных расширений гиперкубов. Основным результатом данной главы является доказательство единственности найденного Ф. Харари и Дж. Хейзом в 1993 г. минимального рёберного 1-расширения гиперкуба. Также выдвинуто предположение о виде некоторых минимальных рёберных  $k$ -расширений гиперкубов.

**Третья глава** посвящена алгоритмам поиска расширений и связанными с ними задачами. В этой главе предлагается оригинальный способ кодирования графа, позволяющий строить суперграфы и подграфы без проверки на изоморфизм. В частности, это можно применять для перебора графов при поиске расширений и проверки на расширение. Описывается способ построения расширений на основе объединения графов. Также представлены численные результаты, полученные с помощью описанных алгоритмов.

В **заключении** подводятся итоги выполненного исследования, обобщены полученные теоретические и практические результаты, описаны дальнейшие направления исследования.

Полученные в диссертационной работе результаты, безусловно, являются **новыми** и могут быть применены как в теории графов, так и в её различных приложениях. Можно отметить два основных направления, в которые работа вносит существенный вклад. Первое – результаты, непосредственно касающиеся вершинных и рёберных расширений, представленные в первых двух главах: найдены схемы построения неприводимых вершинных 1-расширений и вершинных 2-расширений гиперкубов и определено их количество, также доказана единственность минимального рёберного 1-расширения гиперкуба. Второе – в третьей главе описаны алгоритмы построения неизоморфных

суперграфов и подграфов заданного графа без проверки на изоморфизм, определена взаимосвязь между максикодом графа и миникодом его дополнения, описан новый алгоритм построения расширений, основанный на объединении графов.

Диссертация носит в первую очередь теоретический характер. Были найдены новые схемы построения вершинных 1- и 2-расширений гиперкубов, описано их точное количество и доказана неприводимость построенных по данным схемам вершинных 1-расширений. Схемы построения вершинных 1- и 2-расширений применимы также ко всем двудольным графам за исключением полных двудольных графов. Также была полностью решена задача о минимальном рёберном 1-расширении гиперкубов. В работе доказана взаимосвязь максикода графа и миникода его дополнения. Также описаны алгоритмы построения суперграфов и подграфов без проверки на изоморфизм, которые могут быть использованы для построения расширений. С учётом вышеперечисленного **теоретическая значимость** работы не вызывает сомнений.

Что касается **практической значимости работы**, то она, на наш взгляд, заключается в следующем. В работе имеется ряд обоснованных алгоритмов, на основе которых возможна реализация программных комплексов, решающих как задачу построения расширений, так и другие. Существуют программные комплексы, решающие задачу построения графов с заданными ограничениями. С помощью алгоритмов, описанных в работе, возможно решение задачи построения суперграфов и подграфов заданного графа без проверки на изоморфизм.

**Достоверность** основных результатов, полученных в диссертационной работе, обеспечивается корректным применением методов дискретной математики и математической кибернетики, аппарата теории графов и комбинаторики. Также следует отметить, что в работе имеются как теоретические, так и численные результаты, и они друг другу не противоречат.

Несмотря на высокую оценку диссертации Лобова А.А., к ней имеется ряд вопросов и замечаний:

1. В работе в обзоре литературы указывается незначительное количество работ, которые посвящены непосредственно исследованию расширений гиперкубов.
2. Учитывая актуальность темы исследования, к замечаниям следует отнести сравнительно небольшой обзор зарубежных работ за последние 5-10 лет в списке литературы. Отмечается преобладание ссылок на труды научного руководителя.
3. В работе в доказательствах присутствует ряд опечаток. В теореме 1 в случае 3 указано, что разбирается ситуация удаления вершины доли  $V$ , но из доказательства следует, что разбирается случай удаления вершины доли  $U$ .



4. В доказательстве леммы 12 в пункте 12 написано, что подсчитывается количество вершин в объединении множеств  $H2$  и  $H3$ , но в данном месте должны быть указаны множества  $H1$  и  $H4$ .


Указанные замечания не носят принципиального характера, а диссертационная работа в целом заслуживает положительной оценки. Диссертация Лобова А. А. представляет собой законченное научное исследование, содержащее новые, математически строго обоснованные результаты, имеющие теоретическую и практическую значимость. Результаты диссертационного исследования прошли достаточно широкую апробацию на многих международных и отечественных научных конференциях, и семинарах.

Основные положения диссертации отражены в 17 научных публикациях автора, 7 из которых опубликованы в ведущих рецензируемых журналах, рекомендованных ВАК Минобрнауки России, 5 – в изданиях, индексируемых WoS и Scopus. Зарегистрировано 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ. Личный вклад соискателя в полученные результаты в работе четко обозначен.

**Автореферат диссертации** и материалы опубликованных соискателем научных работ достаточно полно и точно отражают содержание диссертации.

Считаем, что диссертационная работа Лобова Александра Андреевича «Вершинные и рёберные расширения гиперкубов» является законченным научным исследованием. Совокупность результатов диссертации представляет собой решение важной научной задачи, которое вносит существенный вклад в разработку и исследование построения технических систем с топологией «Гиперкуб», устойчивых к отказам элементов и связей между ними, на основе теории графов. Диссертация отвечает требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24 сентября 2013 г. № 842, а Лобов Александр Андреевич заслуживает присуждения учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика.

Отзыв на диссертацию обсуждён и одобрен на расширенном научном семинаре лаборатории комбинаторных и геометрических структур МФТИ, Физтех «21» августа 2024 г., протокол № 21/08.

Доктор физ.-мат. наук  Купавский Андрей Борисович

**Почтовый адрес:** 141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

**Телефон:** 8 (495) 408-57-00,

**Адрес электронной почты:** kupavskii.ab@mipt.ru

**Организация – место работы:** федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», лаборатория комбинаторных и геометрических структур

**Должность:** Старший научный сотрудник-заведующий лабораторией

**Web-сайт организации:** <https://mipt.ru>