ОТЗЫВ

официального оппонента, кандидата физико-математических наук В. Г. Лысова на диссертацию Астамура Олеговича Багапша на тему «Аппроксимация функций решениями однородных эллиптических систем второго порядка на компактах в комплексной плоскости и граничные свойства этих решений», представленную в диссертационный совет Д 002.202.01 при ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Диссертация посвящена вопросам, связанным с аппроксимациями функций на компактах в $\mathbb{C}$ решениями систем однородных эллиптических уравнений с постоянными коэффициентами. В диссертации решаются следующие задачи.

1. Доказан критерий слабой C^1-приближаемости функций на компактах в $\mathbb{C}$ полиномиальными решениями рассматриваемых общих эллиптических систем.

2. Для в определенном смысле сильно эллиптических систем предложен новый метод решения задачи Дирихле, основанный на представлении эллиптического оператора в виде возмущения оператора Лапласа по двум малым параметрам. Для задачи в круге найдены аналоги формулы Пуассона и функции Грина. Для систем, не являющихся сильно эллиптическими, доказано, что если граница односвязной ограниченной области содержит аналитическую дугу, то такая область не регулярна относительно задачи Дирихле.

3. Для гармонических функций, однолистно отображающих единичный круг на выпуклую область, установлен критерий звездообразности образа круга меньшего радиуса. Найдена новая нижняя оценка радиуса звездообразности для указанных отображений с нормировкой.

Теория равномерных аппроксимаций в классах аналитических и гармонических функций была разработана в классических трудах М. А. Лаврентьева, М. В. Келдыша, Г. С. Мергеляна и А. Г. Витушкина. Современная постановка задачи состоит в C^m-аппроксимациях в классах функций, являющихся решениями эллиптических уравнений и систем. За последние три десятка лет в этом направлении получен ряд важных результатов в работах Д. Вердеры, Д. Кармоны, А. О'Фаррел, П. В. Парамонова, К. Ю. Федоровского, А. Б. Зайцева, М. Я. Мазалова. При этом обширная библиография посвящена изучению аппроксимаций функций решениями уравнений с постоянными комплексными коэффициентами:

$$(a\partial^2_{xx} + 2b\partial^2_{xy} + c\partial^2_{yy})f = 0. \tag{1}$$

Случай общих эллиптических систем вида

$$\mathcal{L}f := (A\partial^2_{xx} + 2B\partial^2_{xy} + C\partial^2_{yy}) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad f = u + iv \tag{2}$$

с постоянными вещественными 2×2 матричными коэффициентами до настоящего времени оставался недостаточно исследованным.

Остановимся подробнее на содержании диссертационной работы объемом 74 страницы, с библиографией из 52 наименований.

Для того, чтобы дать точные формулировки основных результатов, понадобятся некоторые обозначения. Пусть $P^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$ и $R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$ — это пространства функций, которые могут быть приближены в смысле $C^{1,w}$-сходимости на X полиномиальными решениями (2) и функциями, удовлетворяющими (2) в окрестностях компакта X. Соответствующие две задачи теории приближений являются аналогами задач об аппроксимациях полиномами и рациональными функциями комплексного переменного. Пусть $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$ — это $C^{1,w}$-замыкание пространства функций, удовлетворяющих (2) на множестве X° внутренних точек компакта X. В диссертации найдено достаточное условие на метрические характеристики компакта X для того, чтобы выполнялось равенство $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) = R^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$. Также доказано, что для равенства $A^{1,w}_{\mathcal{L}}(X) = P^{1,w}_{\mathcal{L}}(X)$ необходимым и достаточным условием является связность $\mathbb{C}\setminus X$. Таким образом, этот результат является аналогом критерия С. Н. Мергеляна равномерной приближаемости функций многочленами комплексного переменного. Для оператора Лапласа Δ и уравнений (1) с постоянными комплексными коэффициентами этот критерий был доказан в 1990-х в работах П. В. Парамонова и К. Ю. Федоровского.

Схема доказательства основана на адаптации под рассматриваемые аппроксиманты метода Витушкина локализации приближаемой функции. Для этого необходимо исследовать свойства решений уравнения (2). В диссертации показано, что линейными преобразованиями уравнений, переменных и искомых функций эллиптическую систему вида (2) можно привести к следующему каноническому виду:

$$\mathcal{L}_{\tau,\sigma} f := (\partial\overline{\partial} + \tau\partial^2)f + \sigma(\tau\partial\overline{\partial} + \partial^2)\overline{f} \equiv \partial(\mathcal{I} + \sigma\mathcal{C})(\overline{\partial} + \tau\partial)f = 0, \tag{3}$$

где $\partial := \partial_z$, $\overline{\partial} := \partial_{\overline{z}}$, $\mathcal{I}$ — тождественный оператор, $\mathcal{C}$ — оператор комплексного сопряжения, $\tau \in [0,1)$, $\sigma \in [0,1) \cup (1,\infty]$. При этом каноническому виду уравнения (1) соответствуют значения параметра $\sigma = 0$ и $\sigma = \infty$. Найден общий вид решений уравнения (3). Установлены аналоги лорановских разложений для функций f, удовлетворяющих (3). Найдены фундаментальные решения оператора $\mathcal{L}_{\tau,\sigma}$, которые при $\sigma \neq \infty$ уже не являются локально ограниченными.

Далее в диссертации рассматривается вопрос разрешимости классической задачи Дирихле для оператора $\mathcal{L}$. Этот вопрос тесно связан с задачей о равномерных приближениях полиномиальными решениями (2). Выделяются два случая: при $\sigma < 1$ системы являются возмущениями оператора Лапласа $\partial\overline{\partial}$ и названы в диссертации «сильно эллиптическими»; при $\sigma > 1$ системы являются возмущениями оператора Бицадзе $\overline{\partial}^{\,2}$. Для сильно эллиптических систем получены интегральные представления типа Пуассона для круга и эллипса специального вида и выписана соответствующая функция Грина. Полученные представления допускают компактную запись, если один из параметров τ, σ обнуляется. Для систем, не являющихся сильно эллиптическими, показано, что если граница односвязной ограниченной области Ω содержит аналитическую дугу γ, то задача Дирихле с граничной функцией $\frac{1}{z-a}$, где точка $a \in \Omega$ достаточно близка к γ, неразрешима.

Заключительная часть диссертации посвящена гармоническим (т.е. $\mathcal{L}_{0,0}$) отображениям и $\mathcal{L}_{\tau,0}$, $\mathcal{L}_{0,\sigma}$ отображениям единичного круга. Для комплекснозначных гармонических функций, однолистно отображающих круг $\{|z| < 1\}$ на выпуклую область, установлен критерий звездообразности образа круга $\{|z| < r\}$ при $r \in (0,1)$. Для $\mathcal{L}_{\tau,0}$ $\mathcal{L}_{0,\sigma}$ отображений получены обобщения теоремы о взвешенном среднем для интеграла Пуассона для гармонической функции.

К диссертации имеются следующие замечания.

1) Было бы уместным отметить связь между понятием сильно эллиптических систем, введенным М. И. Вишиком в 1951 году, и понятием, рассматриваемым в диссертации. Кроме того, определение сильной эллиптичности на стр. 4 автореферата нельзя назвать удачным. Например, для единичной матрицы A и нулевых B, C в класс сильно эллиптических попадает параболический оператор ∂^2_{xx}.

2) В связи с предложением 1.1 в диссертации было бы полезно обсудить вопрос единственности полученного представления. Предложения 1.2–1.4 не снабжены доказательствами. Было бы полезно сослаться на опубликованную статью [4А], где приведена схема доказательства этих предложений.

3) В диссертации имеется несколько малозначительных опечаток и недочетов. Встречаются они и в автореферате. Например, на стр. 9 ошибочно указан год доказательства теоремы С. Н. Мергеляна.

Характеризуя диссертацию в целом, отметим, что, несмотря на указанные замечания, исследования соискателя находятся на очень хорошем уровне. Не вызывает сомнений высокая квалификация автора. Все результаты, представленные в диссертации, являются новыми и принадлежат автору, они опубликованы в центральных математических журналах. Доказательства четкие и правильные, в них использованы как классические в комплексном анализе методы Рунге и Витушкина, так и новый метод исследования задачи Дирихле основанный на возмущении оператора Лапласа малыми параметрами. Автореферат адекватно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа «Аппроксимация функций решениями однородных эллиптических систем второго порядка на компактах в комплексной плоскости и граничные свойства этих решений» является законченным, оригинальным научным исследованием. Она удовлетворяет всем требованиям п. 9 Положения ВАК к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ», а ее автор, Астамур Олегович Багапш, заслуживает присуждения ему искомой степени.

Автор отзыва: Владимир Генрихович Лысов, кандидат физико-математических наук (01.01.01 — «вещественный, комплексный и функциональный анализ»). Место работы: Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук". Должность: старший научный сотрудник. Рабочий адрес и телефон: 125047 Москва, Миусская пл., д. 4, тел. +7-499-220-78-56, vlysov@mail.ru.

3 апреля 2018 г.

Старший научный сотрудник
Института прикладной математики им. М. В. Келдыша,
к.ф.-м.н. В. Г. Лысов

Подпись к.ф.-м.н. В. Г. Лысова заверяю
Ученый секретарь
Института прикладной математики им. М. В. Келдыша
к.ф.-м.н. А. И. Маслов