Отзыв научного руководителя
о диссертации Юлии Михайловны Мешковой
"Операторные оценки погрешности в задачах усреднения дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами",
представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.03 — математическая физика

Юлия Михайловна Мешкова окончила с отличием физический факультет СПбГУ по кафедре высшей математики и математической физики в 2014 году. В 2014-2018 гг. обучалась в аспирантуре СПбГУ на той же кафедре. В 2018 году успешно окончила аспирантуру. Я руководила работой Юлии Мешковой в бакалавриате, магистратуре и аспирантуре. В настоящее время ею закончена подготовка кандидатской диссертации, работа прошла необходимую апробацию и готова к защите.

Тематика исследований Юлии Мешковой относится к теории усреднения (гомогенизации) дифференциальных операторов (ДО). Теория усреднения изучает свойства решений дифференциальных уравнений с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами. Речь идет о поиске аппроксимаций для различных оператор-функций от оператора с быстро осциллирующими коэффициентами (резольвенты, экспоненты, косинуса, пр.) в терминах аналогичных оператор-функций от эффективного оператора и подходящих корректоров. При этом целью является получение оценок погрешностей в различных операторных нормах. Именно к этой области относится работа Юлии Мешковой.

Остановимся подробнее на постановке задачи и результатах работы. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$ и Ω — элементарная ячейка этой решетки. Для Γ-периодических функций $F(\mathbf{x})$ используем обозначение $F^\varepsilon(\mathbf{x}) := F(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. При малом ε функция F^ε быстро осциллирует; теория усреднения изучает дифференциальные операторы с такими коэффициентами. В работе изучается широкий класс матричных (размера $n \times n$) эллиптических операторов второго порядка вида

$$\mathcal{B}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^*) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Предполагается, что все коэффициенты g, a_j, Q, Q_0 периодичны относительно решетки Γ. Матрица g размера $m \times m$ ограничена и положительно определена; $b(\mathbf{D})$ — $(m \times n)$-матричный ДО первого порядка, причем $m \geqslant n$, а символ оператора $b(\mathbf{D})$ — матрица максимального ранга. Матричные коэффициенты a_j и Q принадлежат подходящим классам $L_p(\Omega)$; матрица Q_0 ограничена и положительно определена.

В работе изучаются ДО как в $\mathbb{R}^d$, так и в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ класса $C^{1,1}$. Через B_ε обозначим оператор в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, отвечающий дифференциальному выражению (1) (строгое определение оператора дается через квадратичную форму). Через $B_{D,\varepsilon}$ обозначим оператор в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, заданный выражением (1) при условии Дирихле на границе. Постоянная λ в (1) выбирается так, чтобы обеспечить положительную определенность операторов B_ε и $B_{D,\varepsilon}$.

Диссертация состоит из трех глав. **Первая глава** посвящена эллиптической задаче в $\mathbb{R}^d$. Показано, что при $\varepsilon \to 0$ обобщенная резольвента $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ сходится по операторной норме в L_2 к обобщенной резольвенте $(B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}$ эффективного оператора B^0 с постоянными коэффициентами. Приведены формулы для нахождения эффективных коэффициентов. Здесь $\overline{Q_0}$ — среднее значение периодической матрицы Q_0. Получены двухпараметрические оценки погрешности (в зависимости от малого параметра ε и спектрального параметра ζ). Получена также аппроксимация обобщенной резольвенты по норме операторов, действующих из L_2 в пространство Соболева H^1. В этой аппроксимации учитывается корректор первого порядка. Главные результаты главы 1 — оценки

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\phi)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \qquad (2)$$

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\phi)\varepsilon, \qquad (3)$$

справедливые при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, и $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Прослежена зависимость постоянных в оценках от угла $\phi = \arg \zeta$ (оценки равномерны по углу, если ϕ отделено от точек 0 и 2π). При фиксированном ζ порядок $O(\varepsilon)$ оценок (2) и (3) — точный.

Во **второй главе** изучается эллиптическая задача Дирихле в ограниченной области. Получены аппроксимации обобщенной резольвенты $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ с оценками погрешностей:

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C(\phi)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \qquad (4)$$

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ &\leqslant C(\phi)(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \varepsilon), \end{aligned} \qquad (5)$$

справедливыми при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, и достаточно малом ε. Прослежена зависимость постоянных в оценках от угла ϕ. При фиксированном ζ оценка (4) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$, в то время как оценка (5) имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$; ухудшение порядка объясняется влиянием границы области.

В **третьей главе** изучается усреднение решений первой начально-краевой задачи для параболического уравнения:

$$\begin{aligned} &Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = -\mathcal{B}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \ t > 0; \\ &\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}, \ t > 0; \quad Q_0^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}. \end{aligned} \qquad (6)$$

Показано, что при $\varepsilon \to 0$ и фиксированном $t > 0$ решение $\mathbf{u}_\varepsilon$ сходится в $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ к решению $\mathbf{u}_0$ усредненной задачи с постоянными эффективными коэффициентами. Получена оценка погрешности

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, t) - \mathbf{u}_0(\cdot, t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon(t + \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-ct} \|\phi\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t \geqslant 0, \qquad (7)$$

при достаточно малом ε. Найдено также первое приближение $\mathbf{v}_\varepsilon$ к решению по норме в $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ с оценкой погрешности

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, t) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C(\varepsilon^{1/2} t^{-3/4} + \varepsilon t^{-1}) e^{-ct} \|\phi\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad t > 0. \qquad (8)$$

При фиксированном t оценка (7) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$, в то время как оценка (8) имеет порядок $O(\varepsilon^{1/2})$; ухудшение порядка объясняется влиянием границы области. Неравенства (7) и (8) допускают запись в операторных терминах.

Обсудим новизну результатов диссертации. Ранее аналоги результатов глав 1 и 2 были известны для (обычной) резольвенты оператора $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, не включающего младшие члены. Наличие младших членов и рассмотрение обобщенной резольвенты (вместо обычной) усложнило задачу и заставило существенно модифицировать применяемые технические приемы. При этом необходимость следить не только за зависимостью оценок от малого параметра, но и за их зависимостью от спектрального параметра ζ потребовала большой кропотливой работы. Подчеркнем, что метод, применяемый в главе 2, существенно отличается от метода главы 1. При изучении задачи в ограниченной области автор опирается на результаты для ассоциированной задачи в $\mathbb{R}^d$ и вводит поправку типа пограничного слоя. Если учесть эту поправку, то получается точная по порядку аппроксимация решения в классе H^1. Основная техническая работа связана с тщательным анализом этой поправки и получением для нее оценок в нормах L_2 и H^1. Доказательство этих оценок потребовало большей технической изобретательности.

Результаты главы 3 являются совершенно новыми. Ранее операторных оценок погрешности при усреднении параболических задач в ограниченной области известно не было. Метод, предложенный автором, основан на применении тождества, выражающего операторную экспоненту через контурный интеграл от резольвенты. Используя это тождество и полученные в главе 2 двухпараметрические оценки для резольвенты, можно вывести требуемые результаты для операторной экспоненты.

В работе рассмотрены приложения полученных общих результатов к конкретным уравнениям математической физики.

По теме диссертации Юлией Мешковой опубликовано пять статей (совместных с научным руководителем) в престижных журналах "Алгебра и анализ", "Функциональный анализ и его приложения", "Applicable Analysis" и один препринт. Часть материала этих статей не вошла в диссертацию (из-за большого объема). В совместных работах определяющий вклад в получение результатов принадлежит Юлии Мешковой. Работе предшествовала собственная статья Юлии Мешковой в журнале "Алгебра и анализ" об усреднении параболических уравнений в $\mathbb{R}^d$. Недавно ею самостоятельно получены замечательные результаты об усреднении гиперболических уравнений, не вошедшие в текст диссертации (по этой теме опубликованы два препринта). Юлия многократно выступала с устными докладами на международных конференциях и научных семинарах в России и зарубежом. Она является исполнителем по проектам, поддержанным РФФИ и РНФ. Успехи Юлии Мешковой были отмечены престижными премиями для молодых ученых (грант фонда "Династия", стипендия имени Рохлина, стипендии Правительства РФ и Президента РФ по приоритетным направлениям). Юлия Мешкова занимает исследовательскую позицию в лаборатории им. Чебышева СПбГУ.

В работе Юлии Мешковой осуществлен масштабный проект, внесший существенный вклад в развитие операторных оценок погрешности в задачах усреднения. Диссертация выполнена на высоком научном уровне и безусловно удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям по специальности 01.01.03 — математическая физика. В процессе работы Юлия Мешкова проявила незаурядные самостоятельность, упорство, инициативу и техническую изобретательность. Считаю, что Юлия Михайловна Мешкова сформировалась как способный и высоко мотивированный исследователь с большим потенциалом.

7 октября 2018 г.

Доктор физ.-мат. наук,
профессор Т. А. Суслина

ЛИЧНУЮ ПОДПИСЬ ЗАВЕРЯЮ
НАЧАЛЬНИК ОТДЕЛА КАДРОВ №3
Н. И. МАШЕЛА
10. 2018

Документ подготовлен
в порядке исполнения
трудовых обязанностей