Федеральное агентство научных организаций
Институт математики с вычислительным центром
– обособленное структурное подразделение
Федерального государственного бюджетного
научного учреждения
Уфимского федерального исследовательского центра
Российской академии наук

450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112. сайт: matem.anrb.ru
Тел./факс (347) 272-59-36, 273-33-42; e-mail: im@matem.anrb.ru
ИНН 0274064870, КПП 027445002

05.07.2018 г № 17145-6215-104

На №

УТВЕРЖДАЮ
Врио директора
ФГБУН "Институт математики
с вычислительным центром
Уфимского федерального
исследовательского центра РАН"
д.ф.-м.н. Мусин И.Х.

Мусин "   " июня 2018 г.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертационную работу О.В. Сарафанова
"Асимптотические и численные методы исследования квантовых волноводов
и приложения к резонансному туннелированию ",
представленную на соискание учёной степени
доктора физико-математических наук по специальности
01.01.03 – математическая физика

Диссертационная работа О.В. Сарафанова посвящена исследованию резонансного туннелирования в квантовых волноводах переменного сечения. Волновод занимает область с двумя цилиндрическими выходами на бесконечность, которые отделяются от центральной части двумя сужениями малого диаметра. Центральная часть играет роль резонатора, а сужения являются эффективными потенциальными барьерами. В области рассматривается оператор Лапласа с условием Дирихле либо оператор Паули с условием Дирихле; на бесконечности задаются естественные условия излучения. Для указанных операторов исследуются вопросы рассеяния и поведение резонансов при стремлении диаметров сужений к нулю.

Первые две главы носят в определённой степени вводный характер. В первой главе рассматривается произвольная область в многомерном пространстве с несколькими цилиндрическими выходами на бесконечность. В такой области рассматривается краевая задача для уравнения Гельмгольца с условием Дирихле. Специфика первой главы состоит в том, что рассматривается задача с условиями излучения, когда спектральный параметр меняется в окрестности порогового значения. Поэтому на бесконечности ставятся расширенные условия излучения и вводится понятие расширенной матрицы рассеяния. Детально изучается зависимость решения задачи и расширенной матрицы рассеяния от спектрального параметра и доказывается аналитичность этой зависимости. Одним из главных результатов первой главы является изучение поведения обычной (то есть нерасширенной) матрицы рассеяния, когда спектральной параметр изменяется вблизи порогового значения. Основная сложность здесь состоит в скачкообразном изменении числа приходящих и уходящих волн и увеличении размера матрицы рассеянии при переходе спектрального параметра через пороговое значение. Устанавливается связь расширенной и обычной матриц рассеяния. Благодаря этой связи удается доказать существование конечных односторонних пределов обычной матрицы рассеяния на пороге и выразить эти пределы в терминах расширенной матрицы.

Во второй главе формулируется и обосновывается метод вычисления матрицы рассеяния, что является базой для дальнейшего приближенного вычисления данной матрицы. Цилиндрические выходы рассматриваемой области обрезаются на достаточно большом расстоянии от центра. На торцевых сечениях выставляется специальное краевое условие третьего типа с чисто мнимым постоянным коэффициентом. На основе решения такой задачи определённым образом строится приближенное выражение для матрицы рассеяния. Показано, что указанное приближение сходится к истинной матрице рассеяния с экспоненциальной скоростью при увеличении расстояния от центральной части до места обрезания цилиндрических выходов.

В третьей главе начинается рассмотрение резонасного туннелирования. Волновод представляет собой плоскую прямую бесконечную полосу, на которой устраиваются два сужения, зависящих от малого параметра. Сужения устроены так, что в пределе полоса расщепляется на две полуполосы и центральную часть с торцами, имеющими форму треугольников, см. рис. 4 на стр. 19 диссертации. Предполагается, что спектральный параметр меняется между первым и вторым пороговыми значениями. Основной результат данной главы – асимптотика резонанса, коэффициентов прохождения и отражения, добротности резонатора по малому параметру, описывающему размер сужений. Показано, что резонанс возникает вблизи собственных значений оператора Лапласа в центральной предельной части с условием Дирихле; при этом данные собственные значения предполагаются лежащими между первыми двумя порогами в непрерывном спектре исходной задачи. Рассмотрен случай как простого, так и кратного предельного собственного значения. В случае кратного собственного значения меняется вид асимптотики для коэффициента прохождения (теорема 0.0.14).

Четвёртая глава посвящена изучению модели волновода с парой сужений, но уже в трёхмерном пространстве. Число цилиндрических выходов вновь два, но теперь уже оси этих выходов не обязательно совпадают. Сужения здесь описываются двумя независимыми малыми параметрами. В качестве оператора выбирается оператор Лапласа либо оператор Паули. В последнем случае магнитное поле локализовано в центральной части; соответствующий магнитный потенциал также предполагается финитным. Предельная область также распадается на два полуцилиндра и центральную часть, торцы которых представляют собой конические поверхности. Основные результаты здесь схожи с результатами третьей главы. А именно, построены первые члены асимптотик резонансов, возникающих из собственных значений центральной части. Данные первые члены зависят от обоих малых параметров задачи. Также выписаны асимптотики для коэффициента прохождения и для ширины резонансного пика. Проанализирована зависимость этих асимптотик от параметров задачи. В частности, показано, что наиболее ярко резонансные явления проявляются, когда сужения имеют одинаковую форму, малые параметры, описывающие их, совпадают и волновод в целом симметричен. Как оказалось, магнитное поле ослабляет резонансные эффекты.

В пятой главе проводится численное исследование рассмотренных моделей. Показано, что имеется диапазон значений параметра, описывающего сужения, для которого асимптотические результаты и численный счёт хорошо совпадают. Это верно в случае, когда рассматриваются резонансы между первым и вторым порогами. Между вторым и третьим порогами такое совпадение ухудшается и надежной остается лишь асимптотика резонанса, в то время как асимптотика ширины резонансного пика перестаёт совпадать с численными результатами. Хорошее совпадение численных результатов с асимптотическими позволяет утверждать, что данные результаты дают достаточно полную картину для рассматриваемой задачи. А именно, при малых значениях параметра уместно пользоваться асимптотическими результатами, а для не слишком малых — численными. При этом области применимости результатов обоих типов гарантированно перекрываются.

К диссертации имеется ряд замечаний.

1. На стр. 9-10 диссертации при описании поведения волновой функции на бесконечности выписывается задача на собственные значения для функции φ со спектральным параметром τ. Здесь следовало бы уточнить, в каком пространстве ищутся данные собственные функции и почему собственные значения образуют возрастающую последовательность. По контексту можно догадаться, что речь идёт об операторах в пространстве L_2. На стр. 29 условие ограниченности на область Ω, для которой ведется изложение, не оговаривается.

2. На стр. 17 диссертации, во втором абзаце утверждается, что предлагаемый метод нечувствителен к наличию точечного спектра. В следующей фразе в тексте говорится, что в волноводах сложной геометрии точечный спектр, как правило, присутствует. Вопрос о наличии вложенных собственных значений весьма сложный и нетривиальный и на сегодняшний день, насколько мне известно, нет полноценной развитой теории, позволяющей эффективно определять наличие вложенных собственных значений. Поэтому утверждать, что они как правило присутствуют, то есть, что это типичный (или нетипичный) случай не совсем корректно. Правильнее говорить о возможности наличия вложенных собственных значений.

3. На стр. 28, по результатам сравнения асимптотических результатов и численного счёта, сказано, что при исследовании резонанса между вторым и третьим порогами численные значения ширины резонанса и асимптотика отличаются в два раза при $\varepsilon = 0.3$ и на основании этого утверждается, что асимптотика ширины резонанса требует уточнения. Что именно здесь имеется в виду? Что асимптотика неверно вычислена или что она хорошо аппроксимирует нужную величину при существенно меньших ε? И возможно ли улучшить здесь аппроксимацию за счёт использования следующих членов асимптотических разложения?

4. На стр. 48, во втором абзаце раздела 1.3.2 утверждается, что можно исключить срезку из дальнейших рассуждений путем отождествления "эквивалентных" волн. Такое утверждение приводится в качестве обоснования того факта, что матрицы рассеяния не зависят от срезающей функции. Хотя сам факт не вызывает сомнений, ссылка на отождествление представляется нестрогой и факт независимости от срезки все же следовало бы строго доказать.

5. На стр. 58 при постановке задачи (2.1) используется вспомогательный параметр ζ, однако никак не поясняется, как его следует выбирать. Некоторую ясность вносят последние две строки страницы 59, однако явное пояснение по поводу данного параметра следовало бы дать сразу после задачи (2.1).

6. В последней строке на стр. 89 сказано, что константы α и β подлежат вычислению. Что именно здесь имеется в виду? Что это просто некоторые константы, которые определённым образом зависят от геометрии области Ω? Или что далее эти константы будут как-то вычислены – если да, то где они далее вычисляются?

7. В разделе 4.2, начиная со страницы 128, рассматривается несколько иная задача, а именно, волновод с одним сужением. Хотя автор и объясняет это демонстрацией метода и облегчением изложения, такое объяснение кажется несколько неудовлетворительным. Дело в том, что в случае одного сужения в пределе не возникает средней ограниченной части и тем самым в существенном спектре пропадают вложенные в него собственные значения средней части. Тем самым эффекты в задаче с одним сужением качественно отличаются от задачи с двумя сужениями. Поэтому результаты раздела 4.2 можно было бы привести как независимые и отдельные, либо вовсе опустить данный раздел.

8. Как сказано в диссертации на стр. 28, в приложении приводится частный случай теории, развитой в [40], для задач, изучаемых в диссертации. С этой точки зрения несколько странным выглядит тот факт, что ряд утверждений в приложении доказывается. Более логичным было лишь сформулировать соответствующие утверждения, сделав ссылки на их более общие аналоги в [40].

Отмеченные недостатки не носят принципиального характера и не влияют на общую положительную оценку работы. Представленная диссертация является самостоятельным законченным фундаментальным исследованием и соответствует специальности 01.01.03 – математическая физика. Поставленные задачи полностью решены, доказательства теорем проведены на строгом математическом уровне. Все основные результаты диссертации являются новыми. Результаты диссертации опубликованы в одной монографии и десяти печатных работах в реферируемых журналах, входящих в "Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в РФ, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание учёной степени доктора наук", утвержденный ВАК РФ. Эти же статьи индексируются в базах данных Web of Science и Scopus. Результаты диссертации докладывались на крупных международных конференциях и ряде научных семинаров. Автореферат соответствует содержанию диссертации.

Содержащиеся в диссертации результаты могут быть использованы специалистами по теории операторов и дифференциальных уравнений, теории усреднения, математической физике, работающими в Санкт-Петербугском государственном университете, Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, , Математическом институте им. В.А. Стеклова, Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Институте математики с ВЦ УФИЦ РАН.

Диссертация обсуждена на Общегородском семинаре им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики 22 мая 2018 г. и на заседании отдела дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН 22 мая 2018 г. Принято решение — одобрить положительный отзыв. Присутствовало на заседании 6 чел. Результаты голосования: "за" – 6 чел., "против" – 0 чел., "воздержалось" – 0 чел.

На основании вышеизложенного считаю, что диссертация О.В. Сарафанова соответствует требованиям "Положения о порядке присуждения ученых степеней", предъявляемым к докторским диссертациям, а её автор заслуживает присуждения ему учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

И.о. заведующего отделом
дифференциальных уравнений,
ведущий научный сотрудник,
д.ф.-м.н., профессор РАН — Д.И. Борисов

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки "Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук".

Почтовый адрес: 450008, г. Уфа, ул. Чернышевского, 112
Телефоны: 8 (347) 272-59-36, 8 (347) 273-33-42
Email: im@matem.anrb.ru

Подпись Борисова Д.И. заверяю
Специалист отдела кадров Л.Ф. Сабирова