ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию

Иевлева Павла Николаевича

Операторный подход к построению комплексных и отражающихся случайных процессов

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

Исследование связей между теорией случайных процессов и теорией уравнений в частных производных, а также интегро-дифференциальных уравнений, возникающих в математической физике и других областях естественных наук было начато еще в пионерских работах А.Н.Колмогорова и продолжается до настоящего времени. Нахождение новых связей позволяет получать более глубокие результаты как в исследовании случайных процессов, так и в решении задач математической физики. Диссертация Иевлева П.Н. посвящена установлению новых связей между этими двумя теориями, и полученные в ней результаты позволяют расширить класс задач, для которых эти связи удается установить, включив в рассмотрение, например, задачу Коши и краевые задачи для многомерного уравнения Шредингера. Таким образом диссертант продемонстрировал эффективность в многомерном случае методов и подходов, предложенных в работах И.А. Ибрагимова, Н.В. Смородиной и М.М. Фадеева. Для получения требуемых результатов при этом были использованы методы и результаты функционального анализа и теории операторов, а также теории случайных процессов.

Хорошо известно, что марковский случайный процесс $\xi(t) \in R^d$, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ и имеющий переходную вероятность $P(s,x,t,G) = P\{\xi(t) \in G|\xi(s) = x\}, G \subset R^d$ порождает эволюционный оператор $T(t-s)f(x) = \int_{R^d} f(y)P(s,x,t,dy)$ действующий в соответствующем функциональном пространстве, генератор $\mathcal{L}$ которого $\mathcal{L}\phi = \lim_{t\to s} \frac{\int_{R^d} f(y)P(s,x,t,dy)-f(x)}{t-s}$ – это некоторый неограниченный оператор с заданной областью определения. Если $\xi(t)$ - диффузионный процесс, то $\mathcal{L}$ - это эллиптический оператор, и $u(t-s,x) = T(t-s)f(x)$ - дважды дифференцируемая функция, то u является классическим решением задачи Коши $\frac{\partial u}{\partial s} = \mathcal{L}u, \quad u(0,x) = f(x)$.

Диссертанту удалось установить наличие аналогичных связей для нового круга задач, переходя к рассмотрению обобщенных случайных процессов и выбирая в качестве тестовых функций функции, являющиеся обратными преобразованиями Фурье зарядов конечной полной вариации с финитными носителями. При этом с помощью многомерных аналогов конструкций, предложенных в одномерном случае в работах Ибрагимова, Смородины и Фаддеева, он построил случайные процессы, распределения которых аппроксимируют решение задачи Коши во всем пространстве и краевых задач с условиями Дирихле и Неймана в ограниченной области для многомерного уравнения Шредингера.

Отметим, что диссертанта интересует как потраекторное описание отражающегося броуновского движения, так и описание эволюции его распределения и он строит аналог разложения Скорохода для отражающегося многомерного броуновского процесса в шаре в терминах разности полугруппы порожденной броуновским процессом во всем пространстве и полугруппы, порожденной процессом с отражением, действующей на функции с носителем на границе шара, называя последнюю накопленным импульсом. Далее полученные результаты распространяются на процессы Леви, в частности построен симметричный чисто скачкообразный процесс Леви с отражением в произвольной гладкой ограниченной области.

Опишем несколько подробнее основные конструкции разработанные в диссертации.

В первой главе дисссертант рассматривает пространство $\mathcal{RV}(R^d)$ d- мерных случайных векторов , заданных на некотором вероятностном пространстве, выбирает в качестве тестовых функций пространство $\mathcal{Z}_0$ функций, являющихся обратными преобразованиями Фурье зарядов конечной вариации с финитными носителями и вводит множество $\mathcal{GRV}(R^d)$ случайных функционалов, т.е. линейных отображений $\mathcal{RV}(R^d)$ в $\mathcal{GRV}(R^d)$. С каждой обобщенной случайной функцией ξ можно связать оператор $Q_\xi\phi(x) = E\xi[Tx\phi]$ где $T_x\phi(y) = \phi(x+y)$ и $\phi \in L_2(R^d) \cap L_1(R^d)$. Используя семейство полугрупп $P_n(t) = Q_{\bar{\zeta}^n(t)}$, порожденных семейством сложных пуассоновских процессов $\zeta^n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{N(nt)}\xi_j$, где $N(t)$ - стандартный пуассоновский процесс , диссертант конструирует семейства случайных процессов, порождающие полугрупп, аппрокисмирующие решение задачи Коши для уравнения Шредингера и оценивает скорость сходимости.

Во второй главе П.Иевлев разрабатывает конструкцию комплексного броуновского движения в шаре с поглощением или отражением на границе. Для построения решения $u \in W_2^2(D)$ задачи Дирихле

$$u_t = \frac{\sigma^2}{2}\Delta u, x \in D \quad u(0,x) = f(x), u|_{\partial D} = \gamma_0 f$$

диссертант строит специальные разложения начальной функции $f(x)$ в сумму гармонической функции $f_h(x)$ и функции $f_0(x) = f(x) - f_h(x)$, а также их аппроксимаций $f_h^M(x)$, $f_0^M(x) = f^M(x) - f_h^M(x)$. При этом доказывается сходимость в L_2 полугруппы $P^M(t)f^M(x) = E[f^M(x+\sigma w(t))]$ к $P(t)f(x) = E[f(x+\sigma w(t))]$ при $M \to \infty$. Показано, что полугруппа $P(t)$ допускает представление вида $P(t)f(x) = \int_D f(y)R_t(x,y)dy + \int_{\partial D}(\gamma_0 f)(y)dy$ и приведены явные выражения для ядер $R_t(x,y)$ и $Q_t(x,y)$.

Аналогичные результаты получены и для решения задачи Неймана в шаре D с нормалью $n(x)$,

$$u_t = \frac{\sigma^2}{2}\Delta u, x \in D \quad u(0,x) = f(x), \frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial D} = \gamma_0\frac{\partial f}{\partial n},$$

а именно определена полугруппа $P(t)f(x) = (L_2)\lim_{M\to\infty} E[f^M(x+\sigma w(t))], \quad f \in W_2^2(D)$, где $f^M = f_b + f_0^M + f_h^M$ и f_b– бигармоническая функция, получено представление вида

$$P(t)f(x) = \int_D f(y)\tilde{R}_t(x,y)dy + \int_{\partial D}(\gamma_0\frac{\partial f}{\partial n}(y)\tilde{Q}_t(x,y)dy$$

и приведены явные выражения для ядер $\tilde{R}_t(x,y)$ и $\tilde{Q}_t(x,y)$

Третья глава диссертации посвящена развитию операторного подхода к построению разложения Скорохода вещественного броуновского движения в шаре с поглощением или отражением на границе.

Четвертая глава посвящена конструкции симметричных скачкообразных процессов Леви в гладкой ограниченной области D с отражением на границе ∂D. Как и в предыдущих главах, для того, чтобы построить и изучить операторные семейства, порожденные скачкообразным процессом Леви с отражением на границе, диссертант рассматривает два специальных представления начальной функции $f \in W_2^2(D)$: представление вида $f(x) = f_0 + f_b + f_h$ и его аппроксимацию $\tilde{f}_M(x,y) = f_{0M}(x,y) + f_b(x+y) + f_{hM}(x,y)$, а также представление вида $f(x) = \bar{f}_0 + \bar{f}_b + \bar{f}_h$ и его аппроксимацию вида $\bar{f}_M(x,y) = \bar{f}_{0M}(x,y) + \bar{f}_b(x+y) + \bar{f}_{hM}(x,y)$ как частичную сумму ряда, представляющего разложение функции f в ряд по нормированным в $L_2(D)$ собственным функциям оператора Лапласа -Неймана. Показано, что полугруппа $P(t)$ допускает представление $P(t)f(x) - R(t)f(x) = \int_{\partial D} Q(t)(x,z)(\gamma_1 f)(z)dS(z)$. Генераторы полугрупп $P(t)$ и $R(t)$ выражаются через генератор L процесса Леви со значениями во всем пространстве, а выражение в правой части соответствует накопленному импульсу.

Все полученные в диссертации результаты являются новыми. Все они строго доказаны, что потребовало использования методов и результатов из разных областей математики таких как теория случайных процессов, функциональный анализ и теория операторов.

В целом диссертация П. Н. Иевлева является законченным исследованием, которое представляет решение важных и актуальных задач с помощью общего подхода, основанного на привлечении тонких методов теории операторов и функционального анализа к построению случайных процессов аппроксимирующих решения различных краевых задач.

К содержанию работы могут быть сделаны следующие замечания:

В работе встречаются не совсем точные формулировки.

1) на стр 6 сказано, что строится версия броуновского движения, соответствующая решению задачи Коши для уравнения Шредингера, хотя на самом деле строится последовательность случайных процессов, таких, что порождаемые ими полугруппы сходятся к полугруппе, соответствующей решению задачи Коши для уравнения Шредингера;

2) на стр. 12 в уравнении (1.1) опечатка - потерян коэффициент σ в правой части уравнения;

3) стремление к краткости изложения в ряде случаев затрудняет понимание текста, например, на стр. 21 фраза "Обобщенная характеристическая функция $\eta^n(t)$ имеет вид"должна означать, что "Обобщенная характеристическая функция $f_{\eta^n(t)}$ процесса $\eta^n(t)$ имеет вид".

Диссертант разумным образом выделил обозначения и известные факты из функционального анализа в приложение, однако ссылки на приложение в диссертации не всегда указаны, что затрудняет чтение текста:

1) на стр 23 появляется разложение по базису Y_λ^μ, а объяснение того, что Y_λ^μ - это сферические гармоники можно увидеть на стр 63;

2) начале главы 4 (стр. 48) появляется ссылка на лемму 4.13, которой в главе 4 нет. Оказывается, что лемма 4.13 содержится в приложении.

Приведенные выше замечания не влияют на окончательную высокую положительную оценку данной диссертационной работы.

В диссертационной работе получен ряд новых интересных результатов, которые опубликованы в 4 статьях в журналах из списка ВАК, и докладывались на ряде международных конференций. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Результаты диссертации носят теоретический характер и могут быть использованы специалистами, работающими в области математической и статистической физики, теории случайных процессов. Они могут быть также использованы для чтения соответствующих специальных курсов в Московском и Санкт-Петербургском государственных университетах.

Диссертационное исследование Иевлева П.Н. "Операторный подход к построению комплексных и отражающихся случайных процессов"соответствует критериям, изложенным в п. 9 "Положения о порядке присуждения ученых степеней утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации N 842 от 24 сентября 2013 года, а его автор Иевлев Павел Николаевич заслуживает присвоения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 - Теория вероятностей и математическая статистика.

Доктор физико-математических наук,

профессор Белопольская Я.И.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Санкт-Петербургский государственный архитектурно - строительный университет"(СПбГАСУ)

190005, Россия, Санкт-Петербург, 2-я Красноармейская ул.,4

Телефон (812)316-49-30

Адрес электронной почты matem@spbgasu.ru