

ОТЗЫВ

официального оппонента на докторскую диссертацию Д.Н. Запорожца «Нули случайных многочленов, распределение алгебраических чисел и выпуклые оболочки случайных процессов»

Диссертация Д.Н. Запорожца посвящена актуальной и бурно развивающейся области современной теории вероятностей, распределению действительных и комплексных нулей случайных полиномов и случайных аналитических функций. Первые исследования в этой области начались более 80 лет назад. По данной тематике только в списке литературы диссертации насчитывается 224 публикации. В этом направлении работали такие известные математики, как Блох, Пойа, Литтлвуд, Оффорд, а предшественниками, а временами и соавторами диссертанта являются Ибрагимов, Маслова, Логан, Шепп, Форрестер, Хоннер и др. Остановимся кратко на содержании диссертации и продемонстрируем вклад Д. Запорожца в решение проблем, возникающих в частности в физических квантовых системах и в выпуклых оболочках случайных процессов.

В первой главе основная задача связана с количеством вещественных нулей многочлена со случайными коэффициентами в среднем. Первые результаты Блоха, Пойа, Литтлвуда и Оффорда были связаны с многочленами со случайными коэффициентами, имеющими конкретные распределения. Ибрагимов и Маслова обобщили формулу Каца с нормальных и равномерно распределенных случайных величин на случайные величины с распределениями, принадлежащими области притяжения нормального закона. Шеппом была поставлена гипотеза о том, что «в среднем» математическое ожидание количества нулей находится в интервале, у которого левый и правый концы имеют порядок логарифма степени полинома. Совсем тогда еще молодой

диссертант показал, что нижняя граница интервала не верна и получил продвижение в доказательстве оценки сверху.

Во второй главе исследуется распределение нулей случайных многочленов на комплексной плоскости. Аналогично действительному случаю вводится мера μ_{Gn} на комплексной плоскости. Для полинома комплексной переменной с независимыми случайными одинаково распределенными коэффициентами исследуется поведение меры μ_{Gn} при n стремящемся к бесконечности. Задача о распределении комплексных нулей случайного полинома берет начало с работы Хаммерсли. Шпаро и Шур нашли достаточное условие слабой сходимости μ_{Gn} / n по вероятности к равномерному распределению на единичной окружности в поле комплексных чисел. Это достаточное условие требует конечности математического ожидания значения явно выписываемой функции f от модуля свободного коэффициента многочлена. Во второй главе диссертации этот результат усиливается. Доказана эквивалентность слабой сходимости μ_{Gn} / n почти наверное к равномерному вероятностному распределению на единичной окружности и конечности математического ожидания логарифма модуля свободного коэффициента случайного многочлена, увеличенного на единицу. При этом аргументы нулей с вероятностью единица распределены равномерно без предположения дополнительных условий на распределение коэффициентов кроме невырожденности.

В третьей главе решается несколько задач о распределении алгебраических чисел. Это задачи из теории чисел и многие из них возникают в их классификации Малера и Коксмы. Малер в основу своей классификации взял значения модуля целочисленного многочлена в данной точке в терминах степени и высоты многочлена, а Коксма величину расстояния от точки до ближайшего алгебраического числа. Эти классификации близки, хотя некоторые задачи, почти тривиальные в одной классификации, являются трудными и даже до сих пор нерешенными в другой классификации. При решении известной проблемы Малера были получены оценки сверху и снизу для дискриминантов и

результантов целочисленных многочленов, которые в настоящее время представляют самостоятельный интерес в диофантовых приближениях и диофантовых уравнениях. Интерес к таким задачам сильно вырос за последние 20 лет. Необходимо отметить, что при решении таких задач привлекались методы из различных разделов математики: аналитической и алгебраической теории чисел, геометрии чисел, теории динамических систем, эргодической теории. В третьей главе диссертации указанные задачи впервые были проанализированы с точки зрения теории вероятностей. Это позволило найти множества области значений дискриминантов, расстояний между алгебраическими числами, алгебраическими сопряженными числами с наиболее часто встречающимися вероятностями. Кроме этого были найдены связи задач из теории чисел с результатами первых двух глав.

В четвертой главе отметим несколько результатов. Обобщены результаты Судакова и Цирельсона на невыпуклые множества, обнаружена связь между коническими внутренними объемами и вероятностью поглощения спектром начала координат, на основе которой получены конические версии формул Судакова и Цирельсона. Этот результат можно рассматривать как бесконечномерный аналог конической формулы Крофтона и интерпретировать как бесконечномерный аналог конической формулы Штейнера.

В параграфе 4.4 получена эквивалентная формулировка известной гипотезы о том, что правильный симплекс имеет максимальную среднюю ширину среди всех симплексов, вписанных в единичную сферу. Также устанавливается, что средняя ширина правильного симплекса с $2n$ вершинами близка к средней ширине правильного кроссполитопа с таким же количеством вершин. Из вероятностной интерпретации сказанного вытекает доказательство нескольких гипотез Финча.

Оценивая диссертацию в целом отметим, что автору во всех четырех главах диссертации удалось получить фундаментальные результаты, связанные единой идеей вероятностной интерпретации задач математического анализа, теории

чисел, геометрии. Основные результаты автора превосходят результаты других авторов и являются наилучшими к настоящему времени. Все это потребовало широкого и глубокого образования в различных разделах математики и творческих способностей в решении конкретных, зачастую давно известных задач. По моему мнению в тематике второй и третьей глав Д.Н. Запорожец стал лидером в указанных научных исследованиях. Из недостатков отмечу, что после результатов Бейкера-Шмидта о регулярных системах алгебраических действительных чисел Бересневичу удалось опустить логарифмический множитель, что привело к обобщению классической теоремы Хинчина с линейных многочленов на многочлены произвольной степени. Это следовало бы указать. Диссертация, особенно учитывая ее объем, хорошо оформлена. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертант Д.Н. Запорожец заслуживает присуждения степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.05 - «Теория вероятностей и математическая статистика» за новые научно обоснованные результаты:

- Нахождение среднего числа вещественных нулей случайных полиномов без дополнительных условий на распределение коэффициентов, кроме существования совместной плотности распределения. Доказательство асимптотической формулы для комплексных нулей случайных полиномов с независимыми одинаково распределенными коэффициентами.
- Получение закона распределения нулей случайных аналитических функций.
- Указание предельной плотности распределения алгебраических чисел произвольной степени.
- Вычисление первых внутренних объемов бесконечномерных выпуклых компактов.

- Нахождение среднего числа граней выпуклой оболочки многомерного случайного блуждания, которое зависит только от размерности и числа шагов блуждания.
- Получение многомерного обобщения формулы Спарре-Андерсона.

Официальный оппонент

доктор физико-математических наук,
профессор

В.И. Берник

Подпись В. И. Берника

Заверяю

Ведущий специалист
по делопроизводству
Института математики
НАН Беларуси



220 072, Сурганова 11,

Институт математики, Тел. 284 17 01,

e-mail bernik.vasili@mail.ru