

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по научной работе
Российского государственного
педагогического университета
им. А. И. Герцена
доктор психологических наук,
профессор, академик РАО

Л.А. Цветкова

20 21 г.



ОТЗЫВ

ведущей организации федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена» на диссертацию Бабушкина Максима Владимировича «Оценки приближения функции посредством модулей непрерывности различных порядков» по специальности 01.01.01 Вещественный, комплексный и функциональный анализ, представленную на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Диссертационная работа посвящена вопросам, относящимся к теории приближения функций вещественной переменной. Исследуемые автором проблемы касаются влияния дифференциально-разностных свойств функции на точность её аппроксимации линейными методами. Этот круг вопросов является одним из центральных в современной теории приближения.

Работа состоит из введения, трёх глав и заключения.

Актуальность.

Первая задача, рассмотренная в диссертации, относится к прямым теоремам теории аппроксимации (обобщённым неравенствам Джексона). Нахождение точных постоянных в неравенствах типа Джексона представляет трудную задачу, и количество известных здесь результатов невелико. Константы Джексона участвуют при оценке различных функционалов (полунорм, роль которых могут играть, например, уклонения методов приближения в том или ином пространстве). Поэтому актуальна разработка методов, позволяющих получить неравенства, содержащие как можно меньшие постоянные. Этой теме посвящено большое количество исследований, среди которых отметим относительно недавние работы С. Фукара (S. Foucart), Ю. В. Крякина, А. Ю. Шадрина (2009 г.), В. В. Жука, О. Л. Виноградова (2012 г.).

Вторая задача относится к исследованию аппроксимативных свойств положительных линейных операторов. Известно, что скорость сходимости таких операторов к приближаемой функции не может превышать определённого порога, даже если требовать от функции сколь угодно большой степени гладкости. Один из первых результатов такого типа – теорема Е. В. Вороновской для отклонений многочленов С. Н. Бернштейна от дважды дифференцируемой функции. В дальнейшем С. Н. Бернштейн обобщил этот результат, построив асимптотическое разложение данных многочленов для функций, имеющих чётную производную высокого порядка. Формула Вороновской-Бернштейна позволяет, в частности, конструировать методы приближения, обладающие более высокой скоростью сходимости, чем исходные многочлены Бернштейна. В связи с этим важным является вопрос о том, как ведут себя остаточные члены в данных асимптотических формулах. Исследованию этого вопроса посвящены работы таких авторов как В. С. Виденский, Х. Гонска (H. Gonska), П. Питул (P. Pitul), И. Раса (I. Rasa), С. А. Теляковский и многих других.

Третья задача связана с описанием аппроксимативных свойств методов приближения через структурные свойства функции в виде двусторонних оценок. Первые результаты в этом направлении для методов приближений, построенных на базе рядов Фурье, были получены независимо В. В. Жуком и Р. М. Тригубом. Они установили, что отклонения сумм Рисса чётного порядка полностью характеризуются модулем непрерывности функции того же порядка. Случай нечётного порядка (который включает и суммы Фейера) изучал В. В. Жук. Ему удалось установить двусторонние оценки, изменив структурную характеристику: кроме модуля непрерывности самой функции потребовалось привлечь модуль непрерывности тригонометрически сопряжённой к первообразной функции. Открытым остаётся вопрос о том, как охарактеризовать отклонения сумм Рисса нецелого порядка. Частичному разрешению этой проблемы посвящена третья глава диссертации.

Основные результаты диссертанта и их *новизна* состоят в следующем.

1. Установлены новые оценки постоянных в неравенствах типа Джексона для периодических дифференцируемых функций (когда наилучшее приближение тригонометрическими полиномами оценивается модулем непрерывности произвольного порядка производной функции также произвольного порядка). Автор развивает технику из работ В. В. Жука и О. Л. Виноградова, которая основана на применении в качестве промежуточного приближения итераций операторов, построенных на базе функций Стеклова второго порядка.

2. В полученных оценках участвуют нормы упомянутых операторов. Диссертанту удаётся вычислить эти нормы в явном виде и, кроме того, оценить их простым выражением.

3. Исследовано асимптотическое поведение новых оценок для констант Джексона. На основе асимптотики проводится сравнение с известными ранее результатами, которое показывает, что полученные диссертантом оценки

являются наилучшими из известных при всех достаточно больших порядках модуля непрерывности, если его шаг не меньше π/n . Новые оценки оказываются рекордными и для некоторых малых порядков модулей непрерывности и производных, что демонстрируют приведённые вычисления.

4. Для широкого круга положительных линейных методов приближения (сумматорного и интегрального типа) установлены оценки остаточного члена в асимптотических формулах типа Вороновской-Бернштейна. Новизна получаемых здесь результатов состоит в следующем. Во-первых, оценки, известные ранее, усиливаются: они оказываются справедливыми не только для самого остаточного члена, но и для его мажоранты, построенной по типу сильной аппроксимации. Во-вторых, оценки ведутся посредством локального модуля непрерывности, который не превосходит обычного равномерного модуля непрерывности производной функции. Приводятся примеры приложений к конкретным методам приближения: многочленам Бернштейна, суммам Саса-Миракьяна, суммам Канторовича, суммам Бернштейна-Дюррмейер, функциям Стеклова 1-го и 2-го порядка и интегралу Валле-Пуссена.

5. Получены двусторонние оценки отклонений сумм Рисса дробного порядка через структурные свойства приближаемой функции. Эти неравенства установлены для подкласса непрерывных функций: чётных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье. Оценки ведутся посредством модуля непрерывности дробного порядка самой функции и дробного преобразования Гильберта от её производной в смысле Вейля. Особенностью оценок является явный вид входящих в них постоянных. Установленные неравенства являются следствиями общей теоремы, которая может быть применена и к другим методам приближения в указанном классе функций.

Все основные результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты, полученные в диссертации, могут быть использованы в теории аппроксимации и вычислительной математике. Явный вид постоянных в установленных неравенствах даёт возможность легко проводить численный анализ изучаемых величин. Разработанные методы позволят получить аналогичные результаты для других пространств функций и аппаратов приближения.

Обоснованность и достоверность результатов подтверждается строгими доказательствами всех сформулированных в диссертации утверждений. Результаты работы докладывались автором на нескольких международных научных конференциях и городском семинаре по конструктивной теории функций.

Оценка содержания диссертации, ее завершенность в целом, замечания по оформлению. Диссертационная работа Бабушкина М.В. является законченным научным исследованием, вносящим существенный вклад в современную теорию приближений.

Работа не свободна от некоторых опечаток и неточностей:

1. На стр.8, строка 1 сверху: вместо $R_{2i-1}(x)$ должно быть $R_{2i}(x)$.
2. На стр. 29, строки 10-16 сверху: буква g используется для обозначения конкретной функции, определённой на стр. 16, поэтому было бы уместнее использовать другой символ.
3. На стр. 38, строка 12 сверху: вместо «суммам Валле-Пуссена» должно быть «интегралу Валле-Пуссена».

Однако отмеченные недостатки носят исключительно редакционный характер и ни в коей мере не снижают научной ценности работы. Хочется также отметить, что диссертация написана хорошим грамотным русским языком.

Автореферат адекватно отражает содержание диссертационной работы.

Результаты диссертационной работы своевременно опубликованы в научной печати в 4 работах, переводные версии которых индексируются в базе данных scopus.

Заключение. Таким образом, диссертация Бабушкина Максима Владимировича является научно-квалификационной работой, в которой содержатся новые важные результаты в области теории приближения функций вещественной переменной, что соответствует требованиям п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней», утвержденного постановлением Правительства Российской Федерации от 24.09.2013 г. № 842, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор заслуживает присуждения искомой ученой степени.

Отзыв составлен доктором физико-математических наук, заведующим кафедрой математического анализа РГПУ им. А.И. Герцена профессором В.Д. Будаевым.

Отзыв рассмотрен и утвержден на заседании кафедры математического анализа РГПУ им. А.И. Герцена, протокол № 5 от «14» января 2021 г.

Заведующий кафедрой математического анализа
РГПУ им. А.И. Герцена,
доктор физико-математических наук, профессор

В.Д. Будаев

«Подпись руки В.Д. Будаева заверяю»



Начальник управления организации диссертационных исследований и аттестации кадров высшей

А.А. Лактионов