ОТЗЫВ ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА
о диссертации Платоновой Марии Владимировны "Аппроксимация решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором Римана-Лиувилля математическими ожиданиями функционалов от стохастических процессов", представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика

В диссертации Платоновой рассматриваются вопросы, связанные с вероятностным представлением и вероятностной аппроксимацией решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором дифференцирования порядка $\alpha > 2$. При этом порядок дифференцирования может быть как целым, так и дробным. Соответствующие представления хорошо известны и изучены для случая, когда порядок производной меньше или равен двум. В этом случае решение может быть представлено в виде среднего значения функционала от траектории устойчивого процесса Леви с показателем устойчивости равным порядку дифференцирования *a*. В случае, когда порядок дифференцирования больше двух, в точности такое представление реализовать невозможно, так как фундаментальное решение соответствующего эволюционного уравнения является знакопеременным. Устойчивых процессов с показателем устойчивости большим двух также не существует.

Различные попытки получения интегральных представлений решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором дифференцирования порядка больше двух предпринимались многими авторами. Первые результаты в этой области были получены Ю.Л. Далецким и В.Ю. Крыловым. Соответствующие интегральные представления были построены в виде интеграла по траекториям так называемого псевдо-процесса. Далецким также было показано, что в случае, когда порядок дифференцирования больше двух, псевдо-процесс порождает в пространстве траекторий только конечно-аддитивную меру на алгебре цилиндрических множеств, которая не продолжается на сигма-алгебру, порожденную цилиндрическими множествами. Соответственно, построенные на основе теории псевдо-процессов представления решений задачи Коши для эволюционных уравнений не являются в обычном смысле интегральными представлениями. В дальнейшем теория псевдо-процессов получила свое развитие в работах многих авторов: Лашаля, Орсингера, Мазукки, Жао и многих других.

Для дифференциального оператора четвертого порядка в работе Функи был предложен метод получения вероятностного представления решения задачи Коши в виде среднего значения от итерированного комплексного винеровского процесса. Впоследствии этот метод был использован для получения вероятностных представлений для дифференциальных операторов, порядок которых является степенью двойки. При этом начальная функция обязательно должна быть целой аналитической функцией.

В диссертации Платоновой использовался подход, предложенный в работах М.М.Фаддеева и Н.В.Смородиной, и основанный на регуляризации распределений стохастических интегралов по пуассоновской случайной мере. Этот метод применим для нецелых значений а, причем только таких, что целая часть a при делении на 4 дает остаток О или 1. В частности, в "классическом" случае (когда порядок дифференцирования меньше двух), регуляризация распределений стохастических интегралов сводится к сдвигу, а в соответствующем представлении решения уравнения возникает известное представление устойчивого процесса стохастическим интегралом по пуассоновской случайной мере.

В остальных случаях (целая часть порядка дифференцирования при делении на 4 дает остаток 2 или 3) применение этого метода приводит к появлению обобщенных функций с сверхэкспоненциально растущим преобразованием Фурье.

Для таких "плохих" значений порядка дифференцирования α в работе Платоновой предложен новый оригинальный подход, основанный на использовании методов комплексного анализа. Начальная функция задачи Коши представлялась в виде суммы двух функций, первая из которых аналитически продолжалась в верхнюю полуплоскость, а вторая, соответственно, в нижнюю. Вместо одного вещественного процесса в работе использовались два независимых комплексных процесса, один со значениями в верхней полуплоскости, а другой в нижней . Это позволило избежать появления быстро растущих преобразований Фурье. Ранее для построения вероятностных представлений такой метод никогда не использовался.

В первой главе диссертации строится вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дробного дифференцирования (оператором Римана-Лиувилля) порядка больше двух математическими ожиданиями функционалов от пуассоновских точечных случайных полей. Приводится оценка скорости сходимости (в метрике пространств Соболева) вероятностной аппроксимации к точному решению уравнения. Также в первой главе показано, что для вероятностной аппроксимации решения могут быть использованы и математические ожидания функционалов от процесса, построенного по суммам независимых случайных величин со степенной асимптотикой хвостового распределения. Данное утверждение можно рассматривать как невероятностный аналог предельной теоремы о сходимости к устойчивому распределению. Для аппроксимации такого вида также приводится оценка скорости к точному решению в метрике пространств Соболева. Отметим, что использование в диссертации схемы суммирования со случайным числом слагаемых оказалось крайне удачным, так как это обеспечило возможность для получения оценок скорости сходимости воспользоваться известными результатами из теории возмущений линейных операторов.

Во второй главе диссертации с привлечением некоторых дополнительных идей теории обобщенных функций строятся вероятностные аппроксимации решения задачи Коши для эволюционных уравнений, содержащих оператор дифференцирования целого порядка $m > 2$ математическими ожиданиями функционалов от пуассоновских точечных случайных полей. Методы построения вероятностной аппроксимации в случае оператора дифференцирования целого порядка несколько отличаются от методов, которые использовались для оператора Римана-Лиувилля. Связано это в основном с тем, что оператор дифференцирования целого порядка является локальным оператором, а оператор Римана-Лиувилля, наоборот, нелокальным. Приводятся оценки скорости сходимости вероятностной аппроксимации к точному решению. Показано также, что вместо пуассоновских точечных полей для аппроксимации могут быть использованы функционалы от процессов, построенных по суммам независимых случайных величин с конечным моментом порядка га + 1. Утверждение о сходимости можно в данном случае трактовать как невероятностный аналог центральной предельной теоремы.

В третьей главе диссертации получены аналогичные результаты для ряда эволюционных уравнений математической физики, содержащих в правой части дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка больше двух.

В четвертой главе диссертации строится невероятностный аналог безгранично делимых распределений. Формально от обычных безгранично делимых распределений его отличает более высокий порядок особенности "меры Леви" в нуле. Такие распределения являются знакопеременными и, соответственно, невероятностными. В диссертации строится аппроксимация этих распределений специальным образом регуляризованными интегралами по пуассоновской точечной случайной мере. Кроме того, в диссертации также доказываются предельные теоремы о сходимости к таким распределениям. В качестве следствия этих предельных теорем получены утверждения об асимптотике больших уклонений сумм независимых случайных величин при некоторых предположениях об асимптотике хвостовых распределений отдельных слагаемых.

В диссертации имеются недостатки. Кроме опечаток (см. ниже), они скорее имеют форму пожеланий. К ним, например, относится отсутствие примеров уравнений, содержащих потенциал. Построение аналога формулы Фейнмана-Каца было бы в данном случае весьма естественным. Кроме того, очевидно (хотя автор нигде об этом не упоминает), что если бы результаты четвертой главы были получены не для одномерных распределений, а сразу для процессов (как это было сделано в первых трех главах), то интегральные представления решений могли бы быть получены не только для эволюционных уравнений, содержащих дифференциальный оператор, но и для более широкого класса эволюционных уравнений, содержащих в правой части псевдодифференциальные операторы более общего вида.

Отметим некоторые опечатки.

В последней формуле на стр. 53 пропущены $n^{\frac{1}{\alpha}}$.

Стр. 59 теорема 2.2 Первая формула в доказательстве - пропущен $j!$ в знаменателе.

В формуле для $\widehat{B}\varphi(p)$ - пропущен $j!$ в знаменателе.

Стр. 64 теорема 2.4 Первая формула в доказательстве - пропущен $j!$ в знаменателе.

В формуле для $\widehat{B}\varphi(p)$ - пропущен $j!$ в знаменателе.

Стр. 65 в последней формуле пропущен $j!$ в знаменателе.

Стр. 89 В определении оператора должен быть A_{ε}.

Указанные недостатки не снижают очень высокого впечатления о диссертации. В ней предложены и реализованы новые идеи, которые позволили решить сложные задачи, которые ранее решить не удавалось.

Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертация удовлетворяет всем требованиям пункта 9 Положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Мария Владимировна Платонова, заслуживает присуждения ей ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03   математическая физика.

Гликлих Юрий Евгеньевич

доктор физико-математических наук, 01.01.03 - математическая физика, профессор. Воронежский государственный университет, кафедра алгебры и топологических методов анализа, профессор.
Адрес: 394018, Воронеж, Университетская пл. 1, ВГУ.
Тел.: +79611833119,
e-mail: yeg@math.vsu.ru

12.04.2017

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Воронежский государственный университет» (ФГБОУ ВО «ВГУ»)

Подпись Гликлиха Ю.Е.
заверяю вед. специалист
должность
12.04.2017
подпись, расшифровка подписи