

Отзыв научного руководителя о диссертации

А. В. Иванова

«Коэффициенты Сили—деВитта: диаграммная техника, нерекурсивная формула, интеграл по путям и теорема Атьи—Зингера—Патоли для многообразия с доменными стенками»

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.03 – математическая физика

Работа Иванова Александра Валентиновича посвящена построению коэффициентов асимптотического разложения теплового ядра (коэффициентов Сили—деВитта), а также их анализу в рамках теоремы об индексе. Впервые эти коэффициенты были введены В.А. Фоком при изучении оператора Дирака. Впоследствии его подход нашел свое приложение в теоретической и математической физике и широко применяется в современной науке. Примером может послужить исследование петлевых разложений в квантовой теории поля, что приводит к подсчету интегралов, в которых подынтегральная функция строится с использованием коэффициентов Сили—деВитта. Поэтому их явный вид играет ключевую роль.

Другим достаточно важным приложением коэффициентов является теорема Атьи—Зингера—Патоли об индексе. Эта теорема связывает индекс оператора Дирака на многообразии со спектральной функцией оператора Дирака на границе и интегралом по объему от плотности Понтрягина, которая и выражается через исследуемые коэффициенты. Такая связь находит широкое применение в теории аномалий, поскольку связывает аномалия киральности и четности.

Диссертация Иванова А.В. состоит из введения, трех глав и заключения. В первой части работы представлена историческая линия вопроса, из которой следует актуальность и важность исследуемой темы. Далее формулируются основные цели, задачи и структура работы. Каждый пункт аккуратно сформулирован и полностью отражает проделанную работу.

Первая глава диссертации посвящена асимптотическому разложению теплового ядра для оператора Лапласа с гладким калибровочным полем и без потенциала. В ней последовательно строится диаграммная техника для нахождения коэффициентов Сили—деВитта вне диагонали при близких значениях аргументов. Затем рассматривается предельный случай, переход на диагональ, который доставляет нерекуррентную формулу для произвольного порядка.

Во второй главе дается вывод новой нерекурсивной формулы для диагональных частей коэффициентов Сили—деВитта для оператора Лапласа с произвольными гладкими калибровочным полем и потенциалом. Вывод основан на использовании ковариантного разложения, или же, переводя на язык теоретической физики, на применении перехода в калибровку Фока—Швингера. Затем дается обобщение полученной нерекурсивной формулы на случай римановой метрики. Также приводится новый вывод континуального представления путем анализа коэффициентов при степенях собственного времени. Показано, что эти коэффициенты совпадают с функциями Сили—деВитта.

Третья глава посвящена доказательству теоремы Атьи—Зингера—Патоли для многообразия с доменными стенками. В ней предложен оригинальный метод использования свойств коэффициентов Сили—деВитта, через которые выражается плотность Понтрягина. При этом, доказательство происходит в несколько этапов. Вначале рассматривается многообразие с дополнительными ограничениями в виде структуры прямого произведения. Затем рассматривается случай общего положения, вводится гладкая регуляризация, которая позволяет переходить от первого случая ко второму, а также явно вычисляется разность последних. Кроме того, глава содержит аккуратное и лаконичное доказательство инвариантности индекса оператора Дирака относительно используемых регуляризаций.

Оценивая диссертацию в целом, можно сказать, что автором получены оригинальные и интересные результаты о коэффициентах Сили—деВитта, которые затрагивают как явное построение, так и их анализ в рамках теоремы Атьи—Зингера—Патоли. Полученные результаты уже нашли свое применение в области перенормировки квантовой теории Янга—Миллса в четырехмерном пространстве-времени и в теории аномалий. А.В. Иванов неоднократно принимал участие на семинарах и конференциях в ведущих научных центрах, что доказывает его высокую научную зрелость и самостоятельность.

Диссертация грамотно написана и тщательно выверена, содержание работы продуманно распределено по главам. В каждой главе есть вводная часть, в которой четко формулируется изучаемая проблема. Работа содержит достаточно подробные разъяснения и обсуждения проведенных вычислений.

По мнению научного руководителя, тема диссертации актуальна, научные положения и выводы работы достоверны, новы и обоснованы. Результаты должным образом опубликованы в шести работах в ведущих журналах по тематике исследования, пять из которых входят в список изданий, рекомендованных ВАК. Они докладывались на российских и международных конференциях и семинарах. Содержание работы правильно и полно отражено в автореферате диссертации. Представленная работа является серьезным научным исследованием, удовлетворяющим всем требованиям ВАК. В ней развиваются оригинальные методы исследования и с их помощью получены нетривиальные результаты.

Представленная на рассмотрение диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, а А.В. Иванов безусловно заслуживает присвоения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель,
доктор физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник ПОМИ РАН,
С. Э. Деркачёв

18 февраля 2021 г.

