

УТВЕРЖДАЮ:

Ректор федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский национальный исследовательский государственный университет»

член-корреспондент РАН, д.ф.м.н.,
профессор

М. П. Федорук

07 июня 2017 г.

630090, г. Новосибирск, ул. Пирогова 1;

+7(383)-363-40-00, rector@ngs.ru



ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертационной работе Запорожца Дмитрия Николаевича

“Нули случайных полиномов,

распределение алгебраических чисел

и выпуклые оболочки случайных процессов”,

представленной на соискание учёной степени

доктора физико-математических наук

по специальности 01.01.05 — теория вероятностей

и математическая статистика

Актуальность темы. Изучение вещественных и комплексных нулей случайных полиномов имеет длинную историю. Начиная с ранних работ Блоха и Пойа, она включает знаменитые работы Каца, Масловой и Ибрагимова, Логана и Шеппа и др. В последние же годы к данной тематике появился повышенный интерес в теории вероятностей и теории чисел также в связи с обнаруженной взаимосвязью с квантовым хаосом. В данной диссертации, помимо получения новых асимптотических результатов о поведении нулей случайных полиномов и аналитических

функций, исследуется также распределение алгебраических чисел с помощью методов, разработанных в теории случайных полиномов.

Как было показано Эдельманом и Костланом, поведение вещественных нулей случайных полиномов с гауссовскими коэффициентами тесно связано с геометрическими свойствами так называемой кривой моментов, изучать которые можно методами интегральной и выпуклой геометрии. В частности, оказывается, что обычные и конические внутренние объемы выпуклой оболочки кривой моментов связаны с распределением максимума случайного полинома, а также с вероятностью того, что у него нет вещественных нулей на заданном промежутке. Данная взаимосвязь, исследованию которой для произвольных гауссовских процессов посвящена вторая половина диссертации, была впервые замечена в работах Судакова, Шева и Цирельсона. Дальнейшие исследования в этом направлении несомненно являются актуальной задачей.

Научная значимость и новизна результатов, выносимых на защиту. Перейдем к более детальному анализу содержания диссертации.

Диссертация общим объёмом 393 страницы состоит из короткого введения, основного текста из 4 глав объёмом 374 страницы и списка литературы из 224 наименований. Основной объём диссертации приходится на принадлежащие автору доказательства его результатов.

Большая часть главы 1 посвящена изучению математического ожидания числа вещественных нулей случайного полинома, коэффициенты которого являются независимыми случайными величинами. Основными результатами первой главы является получение нижней и верхней оценок для этого математического ожидания в случае, когда коэффициенты одинаково распределены, причем на распределение не накладывается никаких условий, кроме невырожденности. При этом нижняя оценка, которая получена в теореме 1, является точной.

Во второй главе изучаются комплексные нули. Найден простой (в терминах конечности логарифмического момента распределения коэффициентов) критерий асимптотической (с ростом степени полинома) концентрации нулей около единичной окружности. Также изучается ситуация, в которой условие логарифмической конечности не выполняется. Центральным результатом данной главы можно считать теорему о предельном распределении нулей случайной аналитической функции. В ней рассматривается случайный ряд Тейлора (конечный или бесконечный),

коэффициентами которого являются независимые одинаково распределенные случайные величины с весами, на распределение которых наложено условие конечности логарифмического момента. На веса накладывается достаточно естественное условие регулярности, которому удовлетворяет большинство известных ансамблей. Доказана предельная теорема для распределения нулей данного ряда Тейлора. В частности, из этой общей теоремы следует круговой закон для полиномов Вейля (аналог известного кругового закона для матриц), гипотезу о котором высказали Форрестер и Хоннер.

В третьей главе методы из теории случайных полиномов используются для получения явного вида предельной плотности распределения комплексных алгебраических чисел произвольной фиксированной степени, когда их максимальная высота стремится к бесконечности. Нужно отметить, что во всех трех теоремах главы получены оценки скорости сходимости к предельному распределению, которые явно зависят от максимальной высоты.

Четвертая глава (объемом 174 страницы) посвящена изучению выпуклых оболочек случайных процессов. Одним из основных результатов здесь является многомерное обобщение известного результата Спарре Андерсена о том, что симметричное непрерывное случайное блуждание остается положительным за n шагов с вероятностью, которая зависит только от n и не зависит от шага блуждания. Многомерная задача была сведена к геометрической о подсчете числа камер Вейля, пересекаемых типичным линейным подпространством. Последняя задача была решена методами комбинаторной геометрии из теории о разбиении пространства гиперплоскостями.

Другим результатом, свободным от распределения, является вывод формулы для среднего числа граней выпуклой оболочки многомерного случайного блуждания, которая зависит только от размерности d и числа шагов n . Используя найденную Судаковым, Шеве и Цирельсоном важную взаимосвязь между средним объемом выпуклой оболочки гауссовского процесса и геометрическими свойствами соответствующего выпуклого тела в гильбертовом пространстве, в главе 4 автор нашел точную формулу для среднего объема выпуклой оболочки многомерного броуновского моста, а также вычислил внутренние объемы различных бесконечномерных выпуклых компактов, включая единичные шары в полунормах соболевского типа и эллипсоиды в гильбертовом пространстве.

Все перечисленные результаты являются новыми.

Замечания по диссертационной работе. Текст диссертации легко читается. Видно, что автор тщательно продумал порядок изложения материала.

В такой ситуации было бы неправильно педантично перечислять ту дюжину мест в огромной работе, которые не удалось правильно понять с первой попытки. Так в начале последнего абзаца на странице 5 речь идет о связи не с коэффициентами, а с характеристиками (нужно сдвинуть на два слова скобки с поясняющим предложением). А на странице 87 перед теоремой 12 речь идет не о пересечении, а об объединении корней двух уравнений. Автор также забыл определить константу γ в конце формулы (2.22) на стр. 102.

Единственное нелучшее решение, принятое автором, это включение 7 чужих теорем в список основных 84 теорем (и, в придачу, отсутствие теорем 50 и 69 – 73). Лучше было бы чужие теоремы занумеровать буквами, например.

Заключение. Представленная диссертация посвящена решению актуальных вероятностных задач, связанных с изучением распределений различных случайных мер стохастических геометрических объектов, которые традиционно считаются трудными для изучения.

Результаты диссертации опубликованы в 17 работах, 16 из которых в ведущих отечественных и международных научных журналах. Основные результаты диссертации докладывались на различных математических семинарах и конференциях как в России, так и за рубежом. Автореферат полно и правильно отражает содержание диссертации.

Основные результаты диссертации являются новыми и получены соискателем лично или с 1-2 соавторами. При получении большинства этих результатов им продемонстрирована находчивость и изобретательность, говорящие о несомненном наличии у автора достаточно высокого математического уровня. Математическое содержание представленной диссертационной работы несомненно соответствует требованиям, предъявляемым к докторским диссертациям по специальности «01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика», а её автор Дмитрий Николаевич Запорожец безусловно заслуживает присуждения ему степени доктора физико-математических наук.

Результаты диссертации можно рекомендовать к использованию в исследованиях, проводимых в МГУ им. М. В. Ломоносова, МИ РАН им. В. А. Стеклова, СПОМИ РАН им. В. А. Стеклова, ИМ СО РАН им. С.

Л. Соболева, Санкт-Петербургском и Новосибирском государственных университетах.

Отзыв на диссертацию и автореферат обсуждены на заседании лаборатории прикладной вероятности НГУ 6 июня 2017 г., протокол № 1.

Заведующий кафедрой
теории вероятностей
и математической статистики НГУ
д.ф.-м.н., профессор
630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга 4;
+7(983)-309-49-15; lotov@math.nsc.ru

В. И. Лотов

Заведующий лабораторией
прикладной вероятности НГУ
д.ф.-м.н., профессор
630090, г. Новосибирск, пр. Коптюга 4;
+7(913)-462-30-99; aisakh@mail.ru

А. И. Саханенко

