

Отзыв официального оппонента на диссертацию
Романова Романа Владимировича
«Вопросы спектральной теории абстрактных и
дифференциальных операторов
для неядерных возмущений и проблема порядка»,
представленную на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.01
– Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертация Р. В. Романова относится к области теории операторов, связанной с интенсивно развивавшимися в последние десятилетия теорией функциональных моделей, чаще всего связываемая с именами Б.Сёкефальви-Надя и Ч. Фойаша, и теорией пространств де Бранжа, одним из основоположников которой является Л. де Бранж. Эти области тесно связаны и между собой, так как модельное пространство получается из пространства де Бранжа делением на целую функцию, задающую пространство. Теория функциональных моделей изначально связана со спектральным анализом диссипативных операторов (для моделей, связанных с полуплоскостью), позднее были обнаружены и содержательные связи с операторами, не являющимися диссипативными - как самосопряжёнными, так и почти произвольными, причём работоспособность модели в значительной степени определяется близостью исследуемого оператора к самосопряжённому. Естественному

классу близости - ядерным возмущениям самосопряжённых операторов - были посвящены более ранние исследования в указанном направлении, и, как это естественно для теории возмущений, класс ядерных возмущений является естественной границей для многих задач. Естественно возникает вопрос о невозможности распространения тех или иных фактов при переходе к более широким классам возмущений, чем класс ядерных операторов, и иллюстрации этих обстоятельств конкретными примерами. Часть диссертации посвящена подобным вопросам, связанным с каноническими (абсолютно непрерывным и сингулярным) инвариантными подпространствами для операторов, близких к самосопряжённым. Дальнейшие результаты такого рода связаны с дифференциальными операторами, типичными для математической физики; для них уже термины, в которых ищется ответ на поставленные вопросы, связаны с потенциалом или его естественными аналогами. Наконец, последняя часть диссертации относится к теории канонических систем -- дифференциальных операторов, включающих операторы Шрёдингера, Дирака и другие. Все перечисленные темы относятся к областям математического анализа, развивающимся в настоящее время. Так, тематика, связанная с функциональными моделями операторов, является одним из традиционных направлений работы петербургской школы анализа: направление, связанное с бескоординатным подходом к функциональным моделям сжатий, развивалось Н. К. Никольским, В. И. Васюниным, Н. Г. Макаровым и их учениками; диссипативный вариант модели, включая недиссипативные возмущения, разрабатывался С. Н. Набоко и его группой; роль теории в последнее время растёт в связи с разнообразными приложениями к конкретным операторам. Изучение самосопряжённых дифференциальных операторов - классическая область математики, к которой тесно примыкает теория возмущений. Наконец, теория пространств де Бранжа долгое время оставалась в некоторой тени, хотя её значение можно интерпретировать как распространение

преобразования Фурье, связанного с мерой Лебега на прямой, на более широкие классы мер и гамильтонианов. Несмотря на то, что теория пространств де Бранжа появилась уже достаточно давно, она привлекла к себе широкое внимание специалистов в последние десятилетия и теперь также интенсивно развивается. Таким образом, имеющийся фундамент предшествующих исследований вместе с значительным количеством открытых вопросов несомненно свидетельствуют об актуальности исследований, представленных в диссертации.

Ряд результатов работы связан с абсолютно-непрерывным и сингулярным подпространствами операторов, близких к самосопряжённым. Эти понятия обобщают эти классические объекты для самосопряжённых операторов на случай, когда оператор не является самосопряжённым. Понятие абсолютно непрерывного подпространства можно обобщить разными способами, и в диссертации рассматриваются два из них, называемые сильным и слабым. Известно, что для ядерных возмущений самосопряжённых операторов эти определения совпадают. В диссертации показано, что при выходе возмущения из класса ядерных операторов в любой более широкий идеал совпадение этих двух определений нарушается. Аналогичный результат получен для сингулярных подпространств. Принцип невозможности выхода за класс ядерных возмущений типичен для теории возмущений, так что в диссертации получены его новые проявления при описаниях канонических спектральных подпространств операторов, близких к самосопряжённым.

Несомненный интерес представляют результаты второй главы диссертации об исчезновении абсолютно непрерывного спектра при возмущениях дифференциальных операторов, выходящих за рамки классических пределов, при которых абсолютно-непрерывный спектр является устойчивым. Автором получен ряд результатов такого рода, объединённых под общим названием "теорем о неустойчивости".

Значительная часть диссертации относится к теории канонических систем, охватывающих многие известные дифференциальные операторы. Каноническая система задаётся гамильтонианом на интервале вещественной оси, представляющим собой матричнозначную (размера 2×2) локально суммируемую функцию. В зависимости от поведения гамильтониана вблизи концов интервала канонические системы могут быть регулярными или сингулярными. С широким классом канонических систем изометрически связаны гильбертовы пространства де Бранжа, состоящие из целых функций на комплексной плоскости и допускающие простое аксиоматическое описание. В случае, когда левый конец интервала сингулярен, а правый регулярен, хорошо известно, что системе соответствует некоторое пространство де Бранжа тогда и только тогда, когда дискретен спектр оператора, соответствующего "перевернутому" гамильтониану, т. е. при развороте интервала, на котором задан гамильтониан. Вопрос об описании такого класса гамильтонианов относится к основам теории, однако до появления работы, включённой в диссертацию, оставался открытым для гамильтонианов, не являющихся диагональными. Автором диссертации (в совместной статье с Х.Ворачеком) показано, что результат для общего случая сводится к случаю диагональных гамильтонианов самым простым преобразованием из возможных: заменой внедиагональных клеток на нулевые. Хотя такой ответ кажется внешне естественным, оно оказалось несколько неожиданным, ибо имелись соображения в пользу того, что ответ может зависеть от внедиагональных элементов гамильтониана. Этот ответ на известный открытый вопрос получен в рамках более общего результата об описании принадлежности резольвенты оператора канонической системы классам Шаттена-фон Неймана.

Также в диссертации получены разнообразные другие результаты, многие из которых заслуживают отдельного внимания и определили

содержание публикаций автора диссертации. Выше были упомянуты лишь результаты, представляющие наибольший интерес, по моему мнению.

Имеется ряд мелких замечаний, не связанных с математическим содержанием диссертации и не влияющих на её научное содержание, избежать которых затруднительно при переработке материалов ранее опубликованных статей в текст диссертации. В основном это опечатки и другие незначительные погрешности.

Результаты диссертации являются новыми и строго доказанными, для доказательства многих из них потребовалось развитие новой техники, предложенной автором диссертации. Результаты диссертации вносят существенный вклад в теории функциональных моделей, возмущений самосопряжённых операторов, канонических систем и пространств де Бранжа. Они были своевременно опубликованы в ведущих математических журналах и представлены на российских и международных семинарах и конференциях. Из результатов пяти (из десяти) статей, написанных в соавторстве, в диссертацию включены только полученные самим автором диссертации. Результаты диссертации представляют интерес для специалистов из Математического института им. В. А. Стеклова (Москва), Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова, Московского, Санкт-Петербургского, Казанского университетов, Уфимского института математики с вычислительным центром, а также в ведущих зарубежных университетах. Автореферат правильно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертация Романова Романа Владимировича «Вопросы спектральной теории абстрактных и дифференциальных операторов для неядерных возмущений и проблема порядка» представляет собой оригинальную законченную научно-квалификационную работу. Диссертация выполнена на высоком уровне, она удовлетворяет требованиям ВАК, предъявляемым к докторским диссертациям,

автореферат правильно отражает содержание диссертации. Автор диссертации Р.В.Романов заслуживает присуждения ему ученой степени доктор физико-математических наук по специальности 01.01.01 – Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Я, Капустин Владимир Владимирович, даю согласие на включение моих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета и дальнейшую их обработку.

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, ведущий сотрудник
лаборатории математического анализа ФГБУН Санкт-Петербургское
отделение Математического института им. В. А. Стеклова
Российской академии наук (ПОМИ РАН)

Адрес: Санкт-Петербург, 191023, наб.р.Фонтанки, д.27.

Тел. (812)-312-40-58; email: kapustin@pdmi.ras.ru


_____ / В. В. Капустин /
28 сентября 2020 года

