

**Отзыв официального оппонента на диссертацию**  
**Бабушкина Максима Владимировича**  
**«Оценки приближения функции**  
**посредством модулей непрерывности**  
**различных порядков»,**  
**представленную на соискание ученой степени**  
**кандидата физико-математических наук**  
**по специальности 01.01.01**  
**- вещественный, комплексный и функциональный анализ**

Диссертация М.В.Бабушкина "Оценки приближения функции посредством модулей непрерывности различных порядков" относится к теории аппроксимации. В диссертации три ее главы посвящены трем основным достижениям, выносимым на защиту. Круг вопросов, охватываемых диссертацией, относится к классической проблеме: если дана информация о локальных свойствах функции, требуется оценить скорость её приближения функциями из стандартных классов, например, тригонометрическими полиномами порядка не выше заданного. В точки зрения современного анализа результаты диссертации можно рассматривать и в контексте теорем вложения для функциональных пространств, определяемых модулем непрерывности входящих в него функций, в другие пространства, топология в которых задается расстояниями до стандартных подпространств. Классические результаты в указанной области для модуля непрерывности первого

порядка были получены Д.Джексоном и С.Н.Бернштейном. Исследования такого рода для классов функций, определяемых модулем непрерывности более высокого порядка, проводились С.Б.Стечкиным, позднее - С.Фукаром, Ю.В.Крякиным, А.Ю.Шадриным. В Санкт-Петербурге такие вопросы изучались В.В.Жуком и О.Л.Виноградовым, руководившими научной работой диссертанта. Общая тематика диссертации несомненно является актуальной.

Однако хотелось бы обратить внимание на то обстоятельство, что большое внимание в работе - а именно, в ее первой главе, - уделено поиску точных констант в оценочных неравенствах. В современном анализе как правило исследование заканчивается установлением факта, что требуемая оценка выполнена с некоторой константой, значение которой не приводится (либо оценивается достаточно грубо), тогда как вопрос о точном ее значении считается второстепенным по отношению к самому факту ее существования. Вопрос о нахождении точной константы может быть оправдан рядом обстоятельств, в частности, если речь идет о классических неравенствах особенной важности или если полученные оценки предполагается применять в конкретных вычислениях, в которых требуется достаточно точная оценка остаточного члена; а также если новые результаты получены новыми методами, вызывающие интерес в качестве полезного технического средства. Применительно к диссертации М.В.Бабушкина все эти обстоятельства играют роль в некоторой мере. Кроме того, на самом деле часто, особенно в двух других главах, речь идет не только о численных значениях констант, но и об их равномерности по параметру, имеющемуся в задаче, или об асимптотиках при больших значениях параметра. В связи со сказанным, считаю, что тема диссертации является актуальной и полученные результаты представляют интерес, достаточный для кандидатской диссертации достойного качества.

В первой главе основной результат улучшает известную

численную оценку Жука-Виноградова для неравенств типа Джексона. Искомая константа зависит от трёх параметров: это порядок модуля непрерывности, порядок производной изучаемой функции, и коэффициент обратной пропорциональности между шагом сетки, используемой для построения разностей, и степенью аппроксимирующего тригонометрического полинома. Вычислением асимптотик показывается, что при определенных ограничениях полученные константы лучше, чем известные ранее. Улучшение оценок получено с помощью подходящей модификации метода оценок, использовавшегося в более ранних работах.

Группа результатов, рассматриваемая во второй главе, связана с оценками приближений, связанных с аппроксимационными формулами Вороновской-Бернштейна. В диссертации получена общая формула для аппроксимации по набору точек и значениям аппроксимируемой функции в них достаточно общего вида. Из общей теоремы выводятся следствия для разнообразных конкретных операторов аппроксимации и производятся оценки остаточного члена. От предшествовавших работ общий результат этой главы диссертации отличается двумя основными свойствами: во-первых, показано, что в оцениваемом выражении можно вынести оператор аппроксимации за знак модуля и тем самым усилить оценку, что является новым подходом к исследуемым задачам, и, во-вторых, оценки производятся в терминах локального модуля непрерывности. Улучшения по сравнению с предшествовавшими результатами имеются в нескольких направлениях. Так, теоремы 2.1 и 2.3 (точнее, следствие из последней) содержат обобщение и усиление недавних результатов В.В.Жука для аппроксимирующего оператора интегрального типа или построенного в виде суммы только при  $r=0$ .

Наконец, третья глава диссертации посвящена аппроксимации периодических функций суммами Фейера и, в большей общности, суммами Рисса с натуральным показателем, в случае, когда он равен 1, дающим



суммы Фейера. Предшествовавшие результаты были получены независимо В.В.Жуком и Р.М.Тригубом для случая четных и, отдельно, нечетных показателей с использованием преобразования Гильберта. В диссертации для усиления и обобщений предлагается использование преобразования Гильберта дробного порядка, что дает новые результаты для подкласса четных функций с неотрицательными коэффициентами Фурье.

Кроме некоторых критических соображений о задаче нахождения точных констант, приведённых выше при обсуждении актуальности темы диссертации и касающихся главным образом лишь первой из ее трех глав, других существенных замечаний к диссертационной работе нет. Как было сказано, упомянутые критические размышления не повлияли на общую оценку диссертации оппонентом.

Диссертация носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в теории аппроксимации, а также в вычислительной математике. Результаты диссертации являются новыми, они строго доказаны в тексте диссертации; они были своевременно опубликованы в четырех статьях (из них три - в соавторстве), и представлены автором диссертации на петербургском семинаре по конструктивной теории функций и на международных конференциях в Воронеже, Ростове-на-Дону и Санкт-Петербурге. Диссертация Бабушкина Максима Владимировича «Оценки приближения функции посредством модулей непрерывности различных порядков» представляет собой оригинальное законченное научное исследование, вносящее заметный вклад в теорию аппроксимации. Текст диссертации составлен на хорошем уровне. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Таким образом, диссертация является научно-квалификационной работой, в которой получены новые важные результаты по теории аппроксимации. Она удовлетворяет требованиям ВАК, предъявляемым к

кандидатским диссертациям, а автор диссертации **М.В.Бабушкин** заслуживает присуждения ему ученой степени кандидат физико-математических наук по специальности 01.01.01 - **вещественный, комплексный и функциональный анализ.**

Я, Капустин Владимир Владимирович, даю согласие на включение моих персональных данных в документы, связанные с работой диссертационного совета и дальнейшую их обработку.

Официальный оппонент: доктор физико-математических наук, ведущий сотрудник лаборатории математического анализа ФГБУН Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова Российской академии наук (ПОМИ РАН)

Адрес: Санкт-Петербург, 191023, наб.р.Фонтанки, д.27.  
Тел. (812)-312-40-58; email: [kapustin@pdmi.ras.ru](mailto:kapustin@pdmi.ras.ru)

  
\_\_\_\_\_ / В. В. Капустин /  
28 января 2021 года

