

Отзыв официального оппонента

на диссертацию Елены Александровны Лебедевой

"Всплеск-преобразование: частотно-временная локализация, разложения по системам всплесков, обратимость"

на соискание ученой степени доктора физико-математических наук
(специальность 01.01.01 - вещественный, комплексный
и функциональный анализ)

Диссертация Е.А.Лебедевой является исследованием по действительному и гармоническому анализу. В ней получены существенные продвижения в задаче асимптотического поведения констант неопределенности для всплесков (вейвлетов) на числовой прямой, периодических всплесков и всплесков на двоичной группе Кантора. Теория всплесков как самостоятельный раздел анализа, сформировалась в конце прошлого столетия под влиянием работ таких выдающихся математиков как Ив Мейер, Стефан Малла, Карл Де Бор, Рональд Девор и др. и быстро стала мощным инструментом как в теоретических, так и прикладных исследованиях. Один из основоположников теории вейвлетов, французский математик Ив Мейер, признан лауреатом Абелевской премии в 2017 году. Теория вейвлетов оказалась эффективным методом в таких казалось бы далеких областях знаний как теория приближения функций, обработка сигналов, теория кодирования. Именно используя теорию вейвлетов, удалось решить проблему минимального роста степеней многочленов, образующих ортогональный базис Шаудера в пространстве непрерывных функций на отрезке. Используя вейлеты Добеши был разработан алгоритм JPEG2000 сжатия видеoinформации, который применяется во всех мобильных устройствах. В настоящее время трудно найти отрасль прикладной науки, в которой не используются методы вейвлет анализа.

В последние 10-15 лет активизировались работы по изучению и применению методов вейвлет анализа на абстрактных алгебраических структурах, таких как двоичные группы, группы Виленкина, локальные поля положительной и нулевой характеристики. Кроме прикладных вопросов продолжаются исследования внутренних проблем, возникающих в теории вейвлетов.

Классические вейлеты и их преобразования Фурье обычно хорошо локализованы, и мерой локализации служат временная и частотная дисперсии (в диссертации они на-

званы временным и частотным радиусами соответственно). Согласно принципу неопределенности Гейзенберга произведение временной и частотной дисперсии (его называют константой неопределенности Гейзенберга) ограничено снизу числом $1/2$. Поведение констант неопределенности для различных масштабирующих функций и вейвлетов исследовалось в работах Г. Баттла, Ч. Чуи, И. Добеши, Д.Л. Донохо. Предлагаемая работа посвящена изучению базовых свойств вейвлетов, при этом основное внимание уделено изучению асимптотического поведения констант неопределенности для различных классов вейвлетов, и эта тематика является, без сомнения, актуальной.

Отметим наиболее важные, по мнению оппонента, результаты.

1) Известно [Ч. Чуи, Й. Вонг, 1996г.], что константы неопределенности вейвлетов Добеши и Баттла-Лемарье стремятся к бесконечности с возрастанием гладкости вейвлета. М. Унзер, А. Алдроби, М. Иден построили биортогональные системы в конечных константах неопределенности. И. Я. Новиков построил систему модифицированных вейвлетов Добеши с ограниченными константами неопределенности у автокорреляционных функций. С тех пор нерешенным оставался вопрос, насколько общим является результат Ч. Чуи и Й. Вонга. В диссертации дан отрицательный ответ, а именно, построен широкий класс вейвлетов, для которых временные и частотные радиусы с ростом гладкости остаются ограниченными. Соответствующие вейвлеты строятся по маске Мейера, которая подправлена некоторым линейным методом суммирования. В качестве такого метода суммирования могут быть использованы средние Фейера, Валле-Пуссена, Абеля-Пуассона, Рогозинского. Предложенный метод является новым, и полученные таким образом вейвлеты могут найти применения в задачах, где от используемого базиса требуется гладкость определенного порядка.

2) Рассмотрена задача построения всплесков Мейера с минимальной константой неопределенности. Для нахождения таких всплесков разработан новый метод, в котором построение нужных всплесков сводится к выпуклой вариационной задаче, решение которой удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка. Решение этого уравнения автор строит как равномерный предел последовательности решений достаточно простых дифференциальных уравнений. Отметим, что и в первой и во второй задачах не просто доказывается теорема существования, но указан конкретный алгоритм построения соответствующих вейвлетов. Проведен численный эксперимент, в результате которого найдено минимальное значение констант неопределенности для всплесков Мейера с точностью до 0.001.

3) Значительное место в диссертации уделено константам неопределенности (Брейтенбергера) периодических всплесков. Их изучением занимались Ю. Престин и его ученики К. Зайлих, Х. Раухут, а также Ф. Наркович, С.С. Го. Принцип неопределенности Брейтенбергера утверждает, что для любой функции интегрируемой с квадратом на единичном отрезке и не являющейся комплексной экспонентой, константа неопре-

деленности Брейтенбергера больше $1/2$, и это граничное значение не достигается. В диссертации доказано, что существуют фреймы Парсевала периодических всплесков, константы неопределенности масштабирующих функций которых сколь угодно близки к $1/2$.

4) Вейвлеты на группах Виленкина и двоичной группе Кантора и методы их построения достаточно подробно исследованы в работах Лэнга, Фаркова, Протасова, Шаха, Бата, Родионова, Голубова, Бердникова, автора этого отзыва, Крусса, Джанг и других. Интерес к таким задачам связан с тем, что дискретная структура групп Виленкина оказывается удобной при кодировке дискретных сигналов, так как нет необходимости дискретизации сигнала. Однако результатов о локализации как вейвлетов, так и произвольных функций, заданных на двоичной группе, нет. В диссертации Е.А.Лебедевой начаты исследования в этом направлении. Введены константы неопределенности и для них получена оценка снизу. Вопрос о точности полученных оценок остается открытым. Заслуживает внимания и задача использования двоичных вейвлетов для решения дифференциальных уравнений.

Полученные результаты являются новыми и решают ряд проблем, поставленных ранее. Теоретическая и практическая ценность полученных результатов не вызывает сомнений.

Следует отметить и некоторые недостатки. 1) При рассмотрении констант неопределенности Брейтенбергера не всегда понятно о каких константах идет речь: Гейзенберга или Брейтенбергера. 2) Анализ Фурье на группах Виленкина отличается от анализа Фурье на прямой тем, что на группах Виленкина преобразование Фурье ступенчатой функции с компактным носителем тоже есть ступенчатая функция с компактным носителем, т.е. и сама ступенчатая функция и ее преобразование Фурье достаточно хорошо локализованы. Наверное, это стоило отметить в диссертации. Текст тщательно отредактирован, и количество опечаток сведено к минимуму.

Указанные недостатки не носят принципиального характера и не умаляют научных достоинств диссертации. Полученные результаты являются новыми, важными и практически значимыми. Они опубликованы в 15 работах автора (8 в соавторстве), из которых 5 в российских журналах из списка ВАК, а остальные в ведущих иностранных журналах, в том числе в таких высокорейтинговых журналах как *Appl. Comput. Harmon. Anal.* (имп. фактор 2.4), *Appl. Math. Comput.* (имп. фактор 1.7), *J. Math. Anal. Appl.* (имп. фактор 1.1). Впечатляет список конференций и семинаров, где Е.А.Лебедева выступала с докладами. Полученные результаты могут быть применены в теории всплесков, дискретной математике, теории обработки информации. Они будут интересны специалистам из МГУ им.М.В.Ломоносова, Математического института им.В.А.Стеклова РАН, СПбГУ, Воронежского, Самарского, Саратовского госу-

дарственных университетов, ИММ УрО РАН. Автореферат соответствует содержанию диссертации. Математические результаты и разработанные методы достаточны для защиты докторской диссертации. Диссертационная работа Е.А.Лебедевой соответствует требованиям п.п. 9-11,13,14 "Положения о присуждении ученых степеней" , установленным для докторской диссертации, а ее автор заслуживает присуждения ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.01. – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Официальный оппонент,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры математического анализа
ФГБОУ ВО "Саратовский национальный
исследовательский государственный
университет имени Н.Г.Чернышевского"



Лукомский Сергей Федорович

г.Саратов, 410012, ул.Астраханская 83,
тел. 8452515537,
эл. почта: LukomskiiSF@info.sgu.ru

