

«УТВЕРЖДАЮ»

проректор – начальник Управления научной политики
Федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования
«Московский государственный университет имени
М.В. Ломоносова»

доктор физико-математических наук,
профессор А. А. Федянин

2022 г.



ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

о диссертационной работе Крюкова Николая Алексеевича “Различные задачи случайного заполнения множеств”, представленной на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика.

Диссертационная работа Н. А. Крюкова относится по своей проблематике к теории вероятностей и посвящена различным задачам случайного заполнения отрезка непересекающимися интервалами фиксированной длины.

Впервые задачу о случайном заполнении отрезка рассмотрел, по-видимому, А. Реньи в 1958 году в работе “On a one-dimensional problem concerning space-filling” в следующей постановке: на отрезке $[0, x]$ случайным образом размещается интервал $(t, t + 1)$, разбивающий отрезок $[0, x]$ на два отрезка $[0, t]$ и $[t + 1, x]$. Полученные отрезки, если их длина не меньше единицы, в дальнейшем заполняются независимо по тому же правилу, что и начальный отрезок. Отрезки длины меньше единицы убираются из рассмотрения. Весь процесс заполнения заканчивается, когда все оставшиеся отрезки имеют длину меньше единицы. Затем подсчитывается суммарное количество расположенных на начальном отрезке интервалов. Фраза “случайным образом” в данном контексте означает, что t является случайной величиной, равномерно распределенной на отрезке $[0, x - 1]$. В статье А. Реньи была изучена асимптотика математических ожиданий количества расположенных на отрезке $[0, x]$ интервалов ξ_x при $x \rightarrow \infty$ с точностью $o(x^{-n})$ для любого $n > 1$. Позднее, изучение описанной выше задачи было продолжено в работе А. Дворецкого и Г. Роббинса “On the “parking” problem”, в которой авторы получили асимптотику дисперсий случайных величин ξ_x при $x \rightarrow \infty$ с точностью $O((4e/x)^{x-4})$, а также показали, что данные случайные величины асимптотически нормальны.

Н. А. Крюковым получены аналогичные результаты для иных способов заполнения отрезка. Само название таких задач — “задачи о парковке” подтверждает актуальность диссертационной работы. Однако за последние десятилетия появилось не так много публикаций по данной тематике, и в определенной мере работа Н. А. Крюкова восполняет этот пробел.

Диссертация состоит из шести разделов (глав), включая введение и приложение. Полный объем диссертации составляет 79 страниц, список литературы содержит 23 наименования, по теме диссертации опубликовано 6 работ в журналах “Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия” и “Зависки научных семинаров ПОМИ. Вероятность и статистика” из списка ВАК. Две из них без соавторов, в остальных — все основные утверждения доказаны Н. А. Крюковым самостоятельно.

Опишем более подробно полученные Н. А. Крюковым результаты.

Введение (первая глава) содержит описание целей и методы диссертационной работы, а также формулировку положений, выносимых на защиту. Приводится краткий обзор результатов, которые развиваются автором. Обосновывается актуальность и теоретическая значимость работы.

Во второй главе рассматривается обобщение стандартной задачи заполнения отрезка, описанной выше, в котором интервалы единичной длины располагаются неравномерно. Предполагается, что у случайной величины t имеется плотность, которая удовлетворяет свойству антисимметричности (определенному соотношением (3), на странице 7 автореферата). Для такой задачи показано, что распределение случайных величин ξ_x не зависят от конкретного распределения случайной величины t .

В третьей главе рассматривается дискретный аналог задачи о случайном заполнении отрезка. Вместо интервала $(t, t + 1)$ на отрезке целой длины случайным образом располагается интервал $(t, t + l)$ заранее зафиксированной натуральной длины l . Однако случайная величина t в данной задаче имеет дискретное распределение и равномерно распределена на множестве $\{1, \dots, x - l\}$. В случае $l = 2$ получены явные выражения для математических ожиданий случайных величин ξ_x . В случае $l > 2$ изучена асимптотика этих математических ожиданий при $x \rightarrow \infty$ с точностью $o(e^{-x})$. Также, в этой главе вычислен первый член асимптотики дисперсий случайных величин ξ_x при $x \rightarrow \infty$, и показана асимптотическая нормальность последовательности случайных величин ξ_x .

Четвертая глава разделена на две части. В *первой части* рассматривается дискретная задача случайного заполнения отрезка интервалами длины один со дополнительным ограничением: отрезки, длина которых меньше заранее заданного натурального значения l также исключаются из рассмотрения. Для этой задачи получены явные выражения для математических ожиданий, дисперсий и третьих центральных моментов случайных величин ξ_x для целых x . В случае

$l = 2$ была показана асимптотическая нормальность последовательности случайных величин ξ_x при $x \rightarrow \infty$. Во второй части рассмотрена дискретная задача случайного неравномерного заполнения отрезка интервалами длины 1, в которой случайная величина t при $x \geq 2$ равномерно распределена на множестве $\{1, \dots, x - 1\}$ вместо множества $\{0, \dots, x - 1\}$. При этом отрезки длины 1 убраны из рассмотрения. Для такой постановки задачи получены явные выражения для математических ожиданий случайных величин ξ_x при натуральных x .

В пятой главе рассматривается задача дискретного заполнения отрезка интервалами случайной длины l , распределенной на множестве $\{1, 2\}$. В работе явным образом вычислены математические ожидания случайных величин ξ_x для натуральных x .

Приложение содержит доказательства технических лемм, использованных в предыдущих главах.

Таким образом, в рассматриваемой диссертационной работе **получены новые результаты**, касающиеся различных вариантов задачи случайного заполнения. Перечислим основные из них. Установлена эквивалентность всех процессов “парковки”, для которых плотности распределений размещаемого интервала обладает свойством антисимметричности. Уточнена асимптотика математических ожиданий и дисперсий в дискретном аналоге задачи о парковке, рассмотренной Р. Пинским (Pinsky R. G., “Problems from the Discrete to the Continuous”, Springer International Publishing Switzerland. Chapter 3. P. 21–34. 2014). Обоснована слабая сходимость случайных величин ξ_x к нормальному закону. Вычислены точные значения математических ожиданий, дисперсий и третьих центральных моментов в задаче о дискретной парковке машин длины 1 с дополнительным условием остановки процесса заполнения в случае, если длина отрезка становится меньше заранее заданного значения. Вычислены точные значения математических ожиданий в задаче о дискретной парковке машин длины 1 с дополнительным условием запрета расположения интервала на самом первом месте. Вычислены точные значения математических ожиданий в задаче о дискретной парковке машин, длина которых является случайной величиной, распределенной на бинарном множестве $\{1, 2\}$.

Результаты диссертации **прошли апробацию** на международных конференциях “Stochastic Models II” (2019) и “Наука СПбГУ” (2020), а также на Санкт-Петербургском Городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике под руководством академика РАН И. А. Ибрагимова (2021). В марте 2022 г. состоялось выступление Н. А. Крюкова на аспирантском коллоквиуме кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (руководитель академик РАН А.Н. Ширяев).

Замечания к диссертационной работе:

- Название диссертации представляется несколько “расплывчатым”. Нам бы казалось, что оно должно быть более конкретным, подчеркнуть “одномерность” рассматриваемой задачи и отражать именно “задачу парковки”, различные варианты которой, как видно из названия разделов, в основном рассматриваются в работе.
- “Для получения предельных распределений используется метод, основанный на получении точных асимптотик моментов” (стр. 4). Этот метод является достаточно сложным и относится к классической проблеме моментов. Существуют, например, различные достаточные условия, при которых предельное распределение однозначно определяется своими моментами и их требуется проверить. В работе же автор лишь ограничивается доказательством сходимости моментов изучаемых случайных величин к моментам нормально распределенной случайной величины, про которую такой факт известен. Желательно было бы более подробно остановиться на изложении подобного рода ключевых вопросов. Приведенные в доказательствах ссылки на теорему 6.1 являются достаточно формальными.
- Отметим некоторую небрежность в оформлении текста. В ряде мест лемм и теорем пишутся с заглавной буквы: “...технических Лемм” (напр., на стр. 4), “Доказательство Леммы 3.6” или “Доказательство Теоремы...”. В конце предложений часто отсутствуют точки (напр., стр 71, 7-ая строка сверху, стр. 75), а в выносных формулах запятые (стр. 75). На стр. 77 после первой фразы выносная формула начинается со знака =. На стр. 4 “Развиваются методы, приведенные в работах [1] [3]” пропущен знак “-” или предлог и т.п. Доказательство формулы (26) частично дается в тексте работы, а фрагмент ее доказательства (интегрирование по частям) вынесен в раздел “Приложение”, что затрудняет восприятие работы.

Вместе с тем, **приведенные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования.**

Автором решен ряд задач случайного заполнения множеств и получены новые результаты, касающиеся моментов и предельных распределений количества случайно размещенных интервалов малой длины на отрезках большой длины. Диссертация носит теоретический характер, при этом ее результаты могут быть использованы при оценке числа случайно размещенных интервалов малой длины на отрезках большой длины. Результаты работы несомненно привлекут внимание специалистов по теории вероятностей работающих в МГУ и СПбГУ.

Представленные в диссертации Н. А. Крюкова результаты являются **новыми** и **снабжены строгими математическими доказательствами**, которые в ряде случаев основаны на достаточно сложных комбинаторных методах теории вероятностей. Основные результаты диссертационной работы опубликованы автором в рецензируемых российских математических журналах из списка ВАК.

Несмотря на то, что часть статей были опубликованы в соавторстве, вклад в данные работы диссертанта описан в автореферате (стр. 6) и является определяющим.

Автореферат полностью соответствует содержанию диссертации.

Диссертация Н. А. Крюкова “Различные задачи случайного заполнения множеств” является законченной научно-квалификационной работой. Содержание диссертации полностью соответствует паспорту специальности 01.01.05 “Теория вероятностей и математическая статистика”, а также требованиям п. 7 “Положения о порядке присуждения ученых степеней” ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям. Таким образом, соискатель Крюков Николай Алексеевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 “Теория вероятностей и математическая статистика”.

Отзыв составлен профессором кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова, доктором физико-математических наук Яровой Еленой Борисовной. Отзыв о диссертации и автореферате обсужден и одобрен на заседании кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова «30» марта 2022 года, протокол номер 5.

Заведующий кафедрой теории вероятностей
механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова,
академик РАН, профессор,
доктор физико-математических наук



А. Н. Ширяев

Профессор кафедры теории вероятностей
механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова,
доктор физико-математических наук



Е. Б. Яровая

Декан механико-математического факультета
МГУ имени М. В. Ломоносова
член-корреспондент РАН, профессор,
доктор физико-математических наук



А. И. Шафаревич