

## ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу

Пронько Андрея Георгиевича

«Корреляционные функции вершинных моделей с фиксированными граничными условиями и их приложения к задачам комбинаторики»  
представленной на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 — математическая физика

Диссертация А. Г. Пронько посвящена решению математических проблем связанных с вычислением корреляционных функций вершинных моделей двумерной статистической механики заданных на решетках конечного размера и с фиксированными граничными условиями. Основная мотивация к изучению этого круга задач обусловлена современным интересом к исследованию влияния граничных условий на термодинамические свойства моделей статистической механики, вычислению в замкнутом виде их корреляционных функций, и выявлению их связей с объектами перечислительной комбинаторики (например, плоскими разбиениями, димерными моделями, задачами замощений, матрицами чередующихся знаков).

Исторически, изучение моделей двумерной статистической механики сыграло огромную роль в развитии различных областей математики и физики. Достаточно упомянуть решение Р. Онзагером двумерной модели Изинга, Э. Либом и Б. Сазерлендом модели типа льда (шестивершинной модели), Р. Бакстером восьмивершинной модели и модели жестких гексагонов. Решение этих моделей тесно связано с квантовой интегрируемостью и квантовым уравнением Янга–Бакстера. Важный вклад, и, в целом, огромное влияние на развитие теории квантовых интегрируемых моделей, был сделан в работах Л. Д. Фаддеева и его учеников.

В диссертации продолжены исследования вершинных моделей, в основе которых лежит уравнение Янга–Бакстера, в целях вычисления корреляционных функций и изучения влияния граничных условий на термодинамические свойства. Работа в основном посвящена исследованию шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки и является естественным развитием результатов полученных в 80-х годах В. Е. Корепиным и А. Г. Изергиным для статистической суммы этой модели, которая изначально возникла в задаче вычисления скалярного произведения векторов состояний в алгебраическом анзаце Бете. Также исследуется пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями, которые тесно связаны со скалярными произведениями бетевских векторов вне массовой поверхности. В диссертации изучается проблематика вы-

вода замкнутых выражений для статистических сумм и корреляционных функций пяти- и шестивершинной моделей статистической механики, заданных на решетках конечного размера с фиксированными граничными условиями, и их комбинаторных приложений.

К наиболее важным результатам работы можно отнести развитие метода вычисления корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. В частности, вычислена вероятность образования пустоты в терминах кратного контурного интеграла. На основе этого представления решена задача о нахождении арктической кривой модели. В диссертации также обсуждаются чисто математические приложения граничных корреляционных функций к перечислениям матриц чередующихся знаков: найдена связь перечислений этих матриц с классическими ортогональными многочленами, доказана теорема о детальных 3-перечислениях матриц чередующихся знаков. Изучена термодинамика шестивершинной модели на L-образной области, дана новая интерпретация арктической кривой как кривой фазового перехода третьего рода, возникающего при деформациях решетки путем удаления ее части. Для пятивершинной модели со специальными фиксированными граничными условиями проведено вычисление одноточечной корреляционной функции и получены различные новые детерминантные представления для статистической суммы.

Основные результаты диссертации опубликованы в ведущих зарубежных (16 публикаций) и отечественных (5 публикаций) журналах. Диссертация состоит из введения, семи глав и заключения. Общий объем диссертации — 260 страниц.

Первая глава имеет вводный характер: вводится шестивершинная модель с граничными условиями типа доменной стенки, обсуждается ее связь с задачами комбинаторики, выводятся различные эквивалентные представления для статистической суммы.

Во второй главе на основе квантового метода обратной задачи развит подход к вычислению корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. Вычислены одно- и двухточечные граничные корреляционные функции и показано, что для однородной модели двухточечные функции явно редуцируются к одноточечным.

В третьей главе на основе детерминантной формулы для статистической суммы однородной шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки установлена связь перечислений матриц чередующихся знаков с классическими полиномами из таблицы Аски–Вильсона. Обнаруженная связь позволила дать простые доказательства известных результатов о детальных 1-

и 2-перечислениях, а также получить неизвестное ранее явное выражение для детальных 3-перечислений.

Четвертая глава посвящена вычислению нелокальных корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. Основным результатом здесь является представление в терминах кратного контурного интеграла для вероятности образования пустоты. Это представление интенсивно исследуется в пятой и шестой главах в приложении в описанию явлений разделения фаз.

Пятая глава посвящена выводу арктической кривой шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. Получено уравнение для арктической кривой в параметрической форме для всех значениях параметров модели, при которых эта кривая существует. Также обсуждаются частные случаи этой кривой, в частности, в приложении к задаче о предельной форме матриц чередующихся знаков.

В шестой главе выводится главный член асимптотики в термодинамическом пределе для вероятности образования пустоты шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в точке свободных фермионов. Установлено, что арктическая кривая является кривой фазового перехода третьего рода, возникающего при геометрической деформации области задания модели. Указано, что этот фазовый переход тесно связан с фазовыми переходами Дугласа–Казакова и Гросса–Виттена–Вадья из теории матричных моделей.

Наконец, седьмая глава посвящена пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями, при которых ее конфигурации находятся в взаимнооднозначном соответствии с плоскими разбиениями (трехмерными диаграммами Юнга) в ящике. Одним из основных результатов здесь является формула для статистической суммы пятивершинной модели с граничными условиями типа «скалярное произведение», для которой, как показано, имеет место представление в виде  $\tau$ -функции шестого уравнения Пенлеве.

Одним из достоинств диссертации является ее продуманная структура, равномерное распределение материала по значимости и возрастающей сложности. Обсуждение идей и формулировки результатов сопровождаются подробными доказательствами, которые, однако, организованы таким образом, что не прерывают изложение основополагающих фактов и рассуждений.

По моему мнению работа автора вносит яркий вклад в развитие теории интегрируемых моделей на решетке и квантового метода обратной задачи. В диссертации получены важные чисто математические результаты относящиеся к ши-

