

Отзыв

официального оппонента о диссертации

Алексея Рафаиловича Минабутдинова

«Предельные кривые для класса самоподобных адических автоморфизмов»,

представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертация посвящена решению задачи об уточнении индивидуальной эргодической теоремы для некоторого класса адических преобразований. В категории метрических динамических систем, в силу теоремы А.М. Вершика о реализации, достаточно рассматривать только адические автоморфизмы. Классическим примером такого автоморфизма является сдвиг на графе Паскаля, анализ уточнений эргодической теоремы для него был начат в статье E. Janvresse, T. de la Rue и Y. Velenik в 2005 году. Их подход основан на микроанализе поведения частичных сумм суммируемых функций вдоль индивидуальных (односторонних) траекторий автоморфизма и отличается от рассматриваемых ранее тем, что возникающий предельный объект, получивший название предельной функции, имеет не стохастическую, а детерминистическую природу. На основе данного подхода появляется возможность изучить поведение частичных сумм для более широкого класса адических автоморфизмов и цилиндрических функций. При этом получаемые результаты представляют интерес не только в современной эргодической теории, но и в пограничных областях: теории чисел, комбинаторике, теории специальных функций. Поэтому считаю тематику диссертации актуальной.

В работе А.Р. Минабутдинова решается задача обобщения единственного, на момент начала работы, результата E. Janvresse, T. de la Rue и Y. Velenik для графа Паскаля на более широкий класс диаграмм Браттели и более широкий класс функций. Отметим следующее свойство графа Паскаля: для любой его вершины соответствующий полный подграф изоморфен исходному графу. Диаграммы Браттели с таким свойством называются самоподобными, они являются основным объектом исследования в диссертации. Диссертация состоит из трех глав. В первой главе дается необходимое условие существования предельных функций, как в терминах поведения частичных сумм (неограниченный рост нормирующих коэффициентов), так и в терминах функции, эргодические суммы которой рассматриваются (некогомологичность константе). Полученный критерий применяется для доказательства того, что для цилиндрических

функций, заданных на фазовом пространстве одометра, не существует предельных кривых.

Во второй главе доказывается теорема существования предельных функций для класса самоподобных адических автоморфизмов, диаграммы Браттели которых задаются некоторым полиномом с натуральными коэффициентами. Такие автоморфизмы, получившие название полиномиальных, исследовались в работах К. Мела, К. Петерсена и С. Бейли (в частности, известен полный список инвариантных эргодических мер). Автор показывает, что для цилиндрических функций найденное в первой главе условие существования предельных кривых в классе полиномиальных автоморфизмов является также и достаточным. Автор исследует комбинаторную динамику цилиндрических множеств, находит формулу, по началу пути задающую его номер в лексикографическом порядке, определяющем данный автоморфизм. Это позволяет дать явную формулу для частичных сумм цилиндрических функций. Автор определяет также класс функций, которые можно рассматривать как обобщения известной функции Такаги, и показывает, что такие функции возникают в качестве предельных функций. Дополнительно исследуются свойства самоподобия функций из данного класса, а также показывается, что асимптотически, при увеличении степени полинома, графики этих функций сходятся к гладкой кривой. Было бы интересно получить аналогичные результаты для самоподобных диаграмм Браттели общего вида, а также понять, насколько условие самоподобия можно ослабить.

В третьей главе автор подробно изучает предельные кривые для автоморфизма Паскаля. Для этого случая автору удастся исследовать не только регулярный случай (описание предельных кривых для почти всех путей), но и в явном виде описать так называемые "транзитные режимы", когда предел отличен от регулярного. Таким образом, для графа Паскаля задача решена автором для произвольного пути и произвольной цилиндрической функции. Дан явный критерий кохомологичности константе для цилиндрических функций. Для регулярных точек автор подтверждает гипотезу о том, что множество предельных функций содержит функцию Такаги, а для транзитных режимов возникает линейная комбинация двух обобщенных функций Такаги, ранее наблюдавшаяся в компьютерных экспериментах. Результаты автора могут найти применение в теории чисел, теории симметричных булевых функций и комбинаторике. Интересны также найденные в этой главе автором асимптотические разложения полиномов Кравчука, которые могут оказаться полезными при анализе скейлинговых пределов соответствующих точечных процессов.

Представленная А.Р.Минабутдиновым диссертация «Предельные кривые для класса самоподобных адических автоморфизмов» отличается высоким научным уровнем. Результаты диссертации получены самим диссертантом, четко сформулированы, строго доказаны и своевременно опубликованы.

В работе присутствуют некоторые опечатки: например, на странице 15 в середине третьего абзаца формулу « $k(c)=n$ » нужно читать как « $k(c)=k$ »; на странице 54, в формуле в центре страницы j нужно считать равным единице, и пр. За исключением небольшого количества опечаток, существенных замечаний по диссертационной работе у меня нет.

Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание. Список публикаций содержит необходимое количество публикаций по специальности 01.01.01 в журналах из перечня ВАК.

Считаю, что диссертация удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК к диссертациям, представляемым на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, а диссертант заслуживает присвоения ему ученой степени кандидата физико-математических наук.

Старший научный сотрудник лаборатории теории представлений и динамических систем

Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А.Стеклова Российской академии наук

кандидат физико-математических наук



Никитин Павел Павлович

20.04.2017

pnikitin@pdmi.ras.ru

+7(911)959-73-03

ПОМИ РАН, наб. р. Фонтанки 27,

191023, Санкт-Петербург, Россия

