**ОТЗЫВ**
**официального оппонента**
**на диссертацию**
**Каплуна Александра Владимировича**
**"Алгебра эйконалов метрического графа",**
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.03 - математическая физика

## Задачи и цели работы

Алгебра эйконалов метрического графа (в работе - $\mathfrak{E}_\Sigma^T$) это сравнительно новый (2015) и малоисследованный объект. Интерес к нему связан с возможными приложениями в обратных задачах на графах. Эти задачи - отдельное актуальное направление в обратных задачах математической физики. Среди них - задача восстановления графа по его граничным спектральным и динамическим данным. Одним из подходов к ней является алгебраический вариант метода граничного управления (BC-метода), использующий связи обратных задач с теорией банаховых алгебр. Этот вариант основан на фундаментальном факте: топологическое пространство характеризуется адекватной (функциональной, операторной) алгеброй. Алгебра $\mathfrak{E}_\Sigma^T$ определяется граничными данными и содержит информацию о строении графа. Вопрос в том, что это за информация и как ее извлечь из алгебры.

Алгебра $\mathfrak{E}_\Sigma^T$ это операторная C*-алгебра, определяемая динамической системой, которая описывает распространение волн в графе. В отличие от своих аналогов, используемых в задачах на многообразиях, она некоммутативна, что существенно затрудняет ее изучение. Добавим, что структура $\mathfrak{E}_\Sigma^T$ усложняется с ростом параметра $T$ - времени эволюции динамической системы.

Цель диссертации А.В.Каплуна состояла в возможно более полном исследовании алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma^T$.

## Результаты

Главные итоги работы состоят в следующем.

**1.** Найдено каноническое представление алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma^T$ в виде суммы независимых блоков, являющихся стандартными алгебрами матричнозначных непрерывных функций. Описан способ перехода к каноническому представлению от исходного параметрического. Переход включает выделение неприводимых блоков и их последующее объединение.

**2.** Дано полное описание спектра $\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$ алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma^T$ – множества ее неприводимых представлений. Построена ее функциональная модель. Модель используется в процедуре, позволяющей привести к канонической форме любую изометрическую копию алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma^T$. Последнее важно для возможного применения $\mathfrak{E}_\Sigma^T$ в обратных задачах.

**3.** Введены канонические координаты на спектре $\widehat{\mathfrak{E}_\Sigma^T}$. Они определяют факторизацию спектра, превращающую его в пространство, гомеоморфное некоторому графу. Сформулированы естественные достаточныеные условия, при которых факторизованный спектр гомеоморфен фактор-пространству (остову) исходного графа по отношению эквивалентности, имеющему прозрачный геометрический смысл. Этим устанавливается связь между структурой алгебры $\mathfrak{E}_\Sigma^T$ и геометрией графа.

В этих результатах наиболее впечатляющим является максимальный уровень их общности. Фактически они установлены для *произвольного* метрического графа: требуются лишь локальная компактность и связность, что в содержательных приложениях всегда выполнено. Важен и перспективен для дальнейшей разработки найденный автором гомеоморфизм между факторизованным спектром и остовом графа. Тем самым, сделан первый шаг в изучении связей алгебры эйконалов с геометрией графа.

### Замечания и комментарии

Работа не свободна от погрешностей, указанных в нижеследующих замечаниях. Цитаты из работы выделены скобками $\langle ... \rangle$.

**стр.6** $\langle$Тем не менее, в самой работе дается строгое определение графа и всех связанных с ним понятий на основе локальной гомеоморфности малых окрестностей каждой точки графа некоторым стандартным структурам (интервалам и звездам).$\rangle$ Слово "малых" – лишнее, т.к. локальность подразумевает малость.

**стр.11** $\langle$Для ребра $e \in E$, параметризованного...$\rangle$ Следовало написать "параметризованного отображением".

**стр.12** $\langle$задача имеет единственное классическое решение$\rangle$ Следовало пояснить, что понимается под классическим решением для графа.

**стр.18** $\langle$Оно показывает, что метрическая окрестность $\Omega^T[\Sigma]$ есть часть графа, захваченная волнами, идущими от $\Sigma$, к моменту $t = T$.$\rangle$ Каким образом соостношение (1.13) это показывает?

**стр.20** $\langle$Во всех подробностях и с графическими иллюстрациями оно описано в [8].$\rangle$ Эти иллюстрации следовало поместить в диссертацию, это бы облегчило чтение работы.

**стр.30** $\langle$Нетрудно показать, что множество $\Lambda_\Sigma \cap \Omega^T[\gamma]$ является $\Lambda_\gamma$-замкнутым (в $\Omega^T[\gamma]$).$\rangle$ Это не очевидно и требует пояснений.

**стр.37** $\langle$В техническом отношении, при описании алгебры, порожденной эйконалами, удобно использовать операторы (смещенные эйконалы)$\rangle$ В чем именно состоит удобство?

**стр.42** Отношение $\sim$, которое вводится здесь, совпадает с отношением $\overset{\text{nort}}{\sim}$, используемым в дальнейшем. Это обозначение надо было ввести сейчас.

**стр.52** $\langle$... несложно показать, что нарушение хотя бы одного из равенств (3.54) приводит к тому, что алгебра $\mathfrak{Q}_{12}$ не связывает блоки $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$.$\rangle$ Это не очевидно и требует пояснений.

**стр.55** Вероятно, в (3.73) должно быть $\mathcal{I}_k$ вместо $\mathcal{I}$?

**стр.58** В формулировке Леммы 4.1.1 должно быть $r_j, r'_j \in (0, \varepsilon_j)$.

Внизу страницы, вместо $\langle$... появляются связи между ее блоками$\rangle$ правильней было бы "могут появиться связи между ее блоками".

**стр.60** Заменить $\langle$... являющиеся классом эквивалентности по отношению $\sim$"$\rangle$ на "являющиеся классами эквивалентности по отношению $\sim$". Кстати, здесь стоило использовать обозначение $\overset{\text{nort}}{\sim}$.

**стр.64** Смысл высказывания $\langle$... разделение полученных пар проекторов, определяемых отображением $\mathcal{T}$, на отдельные невозможно в рамках рассмотрения отдельных граничных подалгебр"$\rangle$ не ясен.

**стр.77** $\langle$Как легко видеть, она определена с точностью до унитарного преобразования на каждом сегменте спектра $\mathscr{S}_l$".$\rangle$ Какое преобразование имеется ввиду: что во что оно переводит?

**стр.81** Во фразе $\langle$... отождествлению склеенных границ сегментов $\mathscr{S}_l$...$\rangle$ следовало уточнить: "отождествлению склеенных границ РАЗНЫХ сегментов $\mathscr{S}_l$".

$\langle$В результате, пространство $\mathfrak{S}^T_\Sigma$ оказывается хаусдорфовым, а каждая его компонента связности гомеоморфна некоторому графу$\rangle$ – это не очевидно и требует пояснений.

**стр.82** ⟨Очевидно, что каждое $\Lambda_\Sigma[x]$ есть дизъюнктное объединение таких множеств.⟩ – это не очевидно: почему $\Lambda_\Sigma[x] \setminus \tilde{\Lambda}_\Sigma[x]$ тоже является множеством определенности?

**стр.88** Возможно, проще и выразительней было бы сформулировать условия того, что $\lambda$ не является исключительной точкой.

**стр.89** В (6.28) одно и то же соотношение повторяется два раза.

В целом создается впечатление, что материал раздела 6.7 довольно сырой и нуждается в дополнительной проработке.

## Заключение

Приведенные замечания не умаляют достоинств работы и значимости ее результатов. Эти результаты важны, интересны и перспективны для дальнейшей разработки. Есть все основания полагать, что в дальнейшем они приведут к продвижению в фундаментальной задаче реконструкции графа по граничным данным.

Диссертация А.В.Каплуна является законченной квалификационной работой и удовлетворяет всем требованиям Положения о порядке присуждения ученых степеней, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, а ее автор Александр Владимирович Каплун безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 - математическая физика.

Автореферат диссертации адекватно отражает ее содержание.

Официальный оппонент: Л.Н.Пестов

**Пестов Леонид Николаевич**
доктор физико-математических наук, профессор
ФГАОУ ВО «Балтийский федеральный университет им. И.Канта»
236041, Россия, Калининград, ул. А. Невского, 14
email : lpestov@kantiana.ru
Тел. +7(4012) 59-55-95(9435)



Подпись заверяю
10.08.2022 г.
Зам. директора

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта" Научно-исследовательский институт прикладной информатики и математической геофизики БФУ им. И. Канта