«УТВЕРЖДАЮ»
Первый проректор-проректор по
научной работе РУДН,
д. м. н., профессор, чл.-корр.РАН

_____ А. А. Костин
«18» 05 2026 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

Федерального государственного автономного
образовательного учреждения высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»
(РУДН)
на диссертационную работу Сергеева Василия Александровича
«Адиабатические задачи в квантовой механике и теории
распространения волн»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика

В диссертации рассматривается проблема нахождения в адиабатическом пределе асимптотик решений двух модельных задач для нестационарного одномерного уравнения Шрёдингера и для двумерного уравнения Гельмгольца.

Актуальность темы выполненной работы

Асимптотические методы играют важную роль в исследовании решений дифференциальных уравнений математической физики. Адиабатические задачи восходят к трудам Эренфеста, Эйнштейна и исследовались многими авторами (например, Борн и Фок, Като, Аврон и Элгарт, Аврон и Хоуланд и Саймон, Берри, и др.) Важное значение имеет квантовая адиабатическая теорема Борна и Фока, которая описывает эволюцию квантовых состояний согласно нестационарному уравнению Шрёдингера. В классической версии теоремы предполагается, что эволюция отвечает дискретной части спектра соответствующего семейства стационарных операторов (квантовых гамильтонианов), зависящих от времени. При этом должно быть выполнено так называемое условие наличия щели в спектре (обсуждаемый дискретный спектр отделен от остального). Имеется актуальная задача исследования квантовых адиабатических задач при наличии непрерывного спектра и в ситуации, когда нет щели, и собственные значения могут приближаться к непрерывному спектру и исчезать, достигнув его.

Адиабатические задачи естественно возникают также в акустике. В частности, задача о распространении звука в узком прибрежном водном клине может быть поставлена как адиабатическая задача. С физической точки зрения такая задача исследовалась Пирсом, Арнольдом и Фелсоном и др. Однако, математическое исследование этих задач пока не проводилось.

Диссертационное исследование Сергеева В.А. выполнено в рамках вышеуказанных двух интересных направлений. Тема диссертации является актуальной.

Характеристика структуры диссертации.

Диссертация состоит из шести глав, заключения, двух приложений и списка литературы. Полный объём диссертации составляет 110 страниц. Список литературы содержит 40 наименований.

В первой главе даётся постановка рассматриваемых задач. Первая задача ставится для нестационарного одномерного уравнения Шрёдингера на полуоси с потенциалом, зависящим от времени, и представляющем собой линейно сужающуюся со временем прямоугольную потенциальную яму. Вторая задача представляет собой краевую задачу для двумерного уравнения Гельмгольца в

полуплоскости. При этом, уравнение Гельмгольца имеет разрывный коэффициент, моделирующий узкий прибрежный водный клин.

Даётся краткий обзор существующих результатов по тематике диссертации. Также во введении указываются задачи исследования, положения, выносимые на защиту, описываются методы, применяемые в исследовании, обосновывается выбор темы, теоретическая и практическая значимость работы, указываются публикации автора по теме диссертации, дан список конференций и семинаров, на которых проходила апробация работы.

Во второй главе даётся детальное обсуждение результатов, выносимых на защиту. Для обеих задач формулируются основные теоремы диссертационной работы — теоремы об асимптотиках решений по адиабатическому параметру. Кроме формулировок теорем, обсуждаются физическая и геометрическая интерпретации найденных асимптотик решений.

В третьей и четвертой главах доказывается результат об асимптотике решения квантово-механической задачи в случае, когда у соответствующего стационарного оператора Шредингера (зависящего от времени, как от параметра) имеются собственные значения, которые с течением времени двигаются к непрерывному спектру и, достигнув его, по очереди исчезают. Исследуется решение близкое к собственной функции стационарного оператора, пока существует соответствующее собственное значение. Диссертант называет это решение адиабатической нормальной волной. Используется представление решения в виде контурного интеграла, в котором подынтегральное выражение содержит специальную функцию с бесконечными цепочками точек ветвления. Асимптотический анализ рассматриваемых интегралов непрост: при различных значениях переменных (координаты и времени) возникают разные асимптотические эффекты, требующие применения известных или развития новых асимптотических методов. Так, вблизи момента исчезновения собственного значения точка перевала приближается к краю цепочки точек ветвления подынтегральной функции, и нахождение асимптотики сводится к исследованию интеграла с двумя близкими точками перевала. Для описания решения после исчезновения соответствующего собственного значения старший член асимптотик может описываться уже суммой вкладов всех точек ветвления, образующих бесконечную цепочку и близких друг к другу.

В пятой главе диссертации исследуются аналоги адиабатических нормальных волн в случае непрерывного спектра. Они строятся с помощью геометрооптических соображений в виде бесконечных рядов. Ответы естественно записываются с помощью уже упоминавшейся специальной функции. Используя асимптотики этой функции (она зависит от малого адиабатического параметра) и применяя формулу суммирования Пуассона, диссертант получает асимптотические формулы для исследуемого решения.

В шестой главе приводится обоснование асимптотических формул для решений акустической задачи — адиабатических нормальных волн, которые физики эвристически строят с помощью приближенного разделения переменных. Здесь также решения записаны в виде контурного интеграла, асимптотика которого затем и вычисляется.

В конце работы имеются два приложения, в которых для удобства читателя приводятся известные сведения об интегральных представлениях решений асимптотических задач.

Новизна исследования и полученных результатов, выводов и рекомендаций, сформулированных в диссертации

В диссертации получены следующие новые научные результаты:

1) для квантово-механической задачи впервые строго получены асимптотики адиабатических нормальных волн вне потенциальной ямы в ситуации, когда собственное значение приближается с течением времени к границе непрерывного спектра и исчезает, достигнув его;

2) построены аналоги адиабатических нормальных волн в случае непрерывного спектра, получены их адиабатические асимптотики ;

3) для акустической задачи получены асимптотики адиабатических нормальных волн как в узком водном клине, так и в дне. Часть описанных эффектов была эвристически предсказана физиками (излучение нормальной волны в дно вблизи момента исчезновения соответствующего собственного значения, образование после этого поверхностной волны, распространяющейся вдоль дна), а часть обнаружена впервые (периодическое просачивание поверхностной волны обратно в водный слой).

Рекомендации по использованию результатов и выводов диссертационной работы

Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях по асимптотическим методам в математической физике и теории дифференциальных уравнений, ведущихся в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова, Российском университете дружбы народов имени Патриса Лумумбы, Воронежском государственном университете, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша, Московском физико-техническом институте, а также при чтении специальных курсов студентам и магистрантам математических и естественно-научных направлений подготовки.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 5 статьях в центральных математических журналах, индексируемых в международных базах данных.

Замечания по работе.

1. В работе не написано, что понимается под решением рассматриваемых задач. В частности, не указывается, в каких классах функций ищутся решения задач. Не затронут вопрос о единственности решений. Надо отметить, что рассматриваемые в работе дифференциальные уравнения имеют негладкие, кусочно-постоянные коэффициенты и по этой причине постановка задачи в соответствующих функциональных пространствах может оказаться не вполне тривиальной.
2. Расположение материала в диссертации не всегда дружественно по отношению к читателю. Например, важнейшие для работы решения Ψ_n квантово-механической задачи, построенные А.А. Федотовым, упоминаются на стр. 6, где есть ссылка на приложения А и В в конце работы, где эти функции детально обсуждаются. При этом, приложения не являются замкнутыми в себе --- в них есть много ссылок на основной текст работы.
3. В список литературы можно было бы добавить работы: Б.Ю. Стернин, В.Е. Шаталов, “Метод ресургентного анализа в теории атомных столкновений”, ТМФ, 112:2 (1997), 308–323; Theoret. and Math. Phys., 112:2 (1997), 1043–1055, см. также работу по физике: Е. А. Соловьев, “Неадиабатические переходы в атомных столкновениях”, УФН, 157:3 (1989), 437–476; Phys. Usp., 32:3 (1989), 228–250, в которых к адиабатическим задачам применяются близкие математические методы.

Вместе с тем, надо отметить, что эти замечания не умаляют общей высокой оценки диссертационной работы.

Заключение. Диссертационное исследование Сергеева Василия Александровича «Адиабатические задачи в квантовой механике и теории распространения волн», представленное на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, является законченной научно-квалификационной работой, в которой содержится решение научной задачи построения адиабатических асимптотик решений нестационарного уравнения Шредингера в ситуации, когда соответствующий стационарный оператор, зависящий от времени как от параметра, имеет непрерывный спектр, а его

собственные значения выходят на границу непрерывного спектра. Строго решена родственная акустическая задача. Автореферат соответствует содержанию диссертации, полно и правильно отражает все основные положения диссертации. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика.

На основании изложенного, можно с уверенностью утверждать, что диссертационная работа В.А. Сергеева «Адиабатические задачи в квантовой механике и теории распространения волн» удовлетворяет требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика, а её автор, Сергеев Василий Александрович, несомненно заслуживает присуждения ему учёной степени кандидата физико-математических наук.

Отзыв подготовил доктор физико-математических наук (специальность 01.01.02), профессор Математического института имени С.М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» Савин Антон Юрьевич.

Отзыв ведущей организации на диссертацию Сергеева В.А. обсужден и одобрен на заседании Математического института имени С.М. Никольского факультета физико-математических и естественных наук Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы», протокол №0200-51-БУП-2 от «7» мая 2026 г.

Председательствующий на заседании:
Директор Математического института
имени С.М. Никольского,
д.ф.-м.н. Муравник Андрей Борисович — Муравник А.Б.

Отзыв составил:
Профессор Математического института
имени С.М. Никольского
д.ф.-м.н. Савин Антон Юрьевич — Савин А.Ю.

Подписи Муравника Андрея Борисовича и Савина Антона Юрьевича заверяю.

Учёный секретарь Учёного совета
факультета физико-математических
и естественных наук, к.ф.-м.н. — Зарядов И.С.

Сведения о ведущей организации: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)
Почтовый адрес: 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, дом 6
Телефон организации: +7 (499) 936-87-87
Адрес электронной почты организации: rudn@rudn.ru
Web-сайт организации: https://www.rudn.ru.