

О Т З Ы В

официального оппонента на диссертацию Пронько Андрея Георгиевича «Корреляционные функции вершинных моделей с фиксированными граничными условиями и их приложения к задачам комбинаторики», представленную на соискание ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 — математическая физика.

Шестивершинная модель статистической физики описывает двумерный идеализированный кристалл, состоящий из молекул воды, атомы кислорода которой расположены в узлах квадратной решетки и связаны водородной связью. При этом каждый ион водорода находится ближе к одному из концов связи, на которой он размещен. Так как координационное число квадратной решетки равно четырем, то имеется восемь возможных вершинных конфигураций. Слэтер предположил, что ионы водорода должны подчиняться правилу льда: из четырех ионов, окружающих каждый атом кислорода, два расположены близко, а два удалены вдоль линий соответствующих связей, что дает шесть конфигураций. Получающаяся модель для тороидальных граничных условий была решена в термодинамическом пределе бесконечного числа узлов в работах Либа и Сазерленда.

Интересным с математической точки зрения является исследование шестивершинной модели на конечных решетках. В связи с активным развитием в последнее время нанотехнологий существует несомненный интерес к таким исследованиям и с точки зрения практических применений. Наиболее известным результатом в этом направлении является детерминантное представление статистической суммы для решетки квадратной формы с граничными условиями типа доменной стенки, связанное с именами Корепина и Изергина. В этой модели ионы водорода, находящиеся на правых и левых свободных линиях связи расположены вблизи атомов кислорода, а находящиеся на верхних и нижних — в отдалении от них.

В основном диссертация Пронько А.Г. посвящена исследованию шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки и является естественным развитием результатов, полученных Корепиным и Изергиным. В диссертации также исследуется пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями, которые тесно связаны со скалярными произведениями бетевских векторов вне массовой поверхности. Основной целью исследования является вывод замкнутых выражений для статистических сумм и корреляционных функций для моде-

лей, заданных на решетках конечного размера, с фиксированными граничными условиями и их комбинаторных следствий.

К наиболее значимым результатам работы следует отнести следующее. Во-первых, это — развитие методов вычисления корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. С помощью этих методов найдено представление вероятности образования пустоты в виде кратного контурного интеграла. На основе этого представления решена задача о нахождении арктической кривой модели. Далее, это — приложения граничных корреляционных функций к перечислениям матриц чередующихся знаков, а именно, нахождение связи перечислений этих матриц с классическими ортогональными многочленами и доказательство теоремы о детальном 3-перечислении матриц чередующихся знаков. Не менее интересным является изучение термодинамики шестивершинной модели на L-образной области, в процессе которого дана новая интерпретация арктической кривой как кривой фазового перехода третьего рода, возникающего при модификации решетки путем удаления ее части. Наконец, это — вычисление одноточечной корреляционной функции для пятивершинной модели со специальными граничными условиями и получение новых детерминантных представлений для статистической суммы.

Материал диссертации разбит на семь глав и снабжен введением и заключением.

Первая глава является вводной. Здесь дается определение шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, обсуждаются ее основные свойства, рассматривается формула Изергина–Корепина для статистической суммы, и формулируются задачи, на решение которых нацелена диссертация. Кроме того, в этой главе выводятся новые представления для статистической суммы однородной модели.

Во второй главе шестивершинная модель с граничными условиями типа доменной стенки формулируется в рамках квантового метода обратной задачи и описывается общий подход к вычислению корреляционных функций. Основное наблюдение, сделанное автором, состоит в том, что коммутационные соотношения алгебры Янга–Бакстера могут быть использованы для вывода рекуррентных соотношений для корреляционных функций, которые позволяют выразить их через статистические суммы этой же модели на решетках меньшего размера. Основным новым результатом здесь является вывод явных выражений для корреляционных

функций, описывающих вероятности вершинных конфигурации на рядах решетки вблизи границы, в терминах определителей.

В третьей главе полученные выражения для граничных корреляционных функциях используются для вычисления детальных взвешенных перечислений матриц чередующихся знаков. Основная идея вычислений состоит в том, что формула Изергина–Корепина в случае однородной модели позволяет решить задачу о перечислениях матриц чередующихся знаков с помощью полиномов из таблицы Аски–Вильсона: полиномов Майкснера–Поллачека (для 2-перечислений), непрерывных полиномов Хана (для 1-перечислений), и дуальных непрерывных полиномов Хана (для 3-перечислений). В результате, это позволило сформулировать простое доказательство известных результатов для детальных 1- и 2-перечислений, и вывести явное, неизвестное ранее, выражение для детальных 3-перечислений.

В четвертой главе, рекуррентные соотношения, полученные во второй главе, используются для нахождения нелокальных корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. Основным рассмотренным примером является вероятность образования пустоты — корреляционная функция, описывающая формирование сегнетоэлектрического порядка. Рассматривается и более общая корреляционная функция — вероятность образования ряда. Эти корреляционные функции представлены в виде кратных контурных интегралов.

По-видимому, наиболее интересные результаты диссертации, касающиеся шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, получены в пятой главе. В этой главе исследуется представление для вероятности образования пустоты в скейлинговом пределе, из которого выводится центральный результат — уравнение арктической кривой модели, частный случай которой описывает предельную форму матриц чередующихся знаков. Предлагаемый вывод основан на термодинамическом пределе для вероятности образования пустоты и механизме воспроизведения этого предела, следующего из представления в терминах кратного контурного интеграла.

В шестой главе для шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в точке свободных фермионов находится главный член асимптотики вероятности образования пустоты в термодинамическом пределе. Основным заключением является то, что арктическая кривая является кривой фазового перехода третьего рода, возникающего при геометрической модификации области

задания модели. Найденный фазовый переход обладает чертами хорошо известных в теории матричных моделей фазовых переходов третьего рода типа Дугласа–Казакова и Гросса–Виттена–Вадья.

В седьмой главе исследуется пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями, для которых имеет место взаимно-однозначное соответствие между конфигурациями модели и трехмерными диаграммами Юнга (плоскими разбиениями, или, эквивалентно, замощениями ромбами) в ящике. Основным результатом здесь является детерминантная формула для статистической суммы пятивершинной модели с граничными условиями типа «скалярное произведение» в однородном пределе. Показано, что эта статистическая сумма допускает представление в виде τ -функции шестого уравнения Пенлеве для частных значений параметров, соответствующих классическим решениям.

Представленная диссертация является оригинальным исследованием, выполненным на очень высоком научном уровне. Она является важным вкладом в развитие теории квантовых интегрируемых систем и расширяет область приложений квантового метода обратной задачи рассеяния. Необходимо отметить, что в диссертации также получены важные, чисто математические результаты, относящиеся к широкому кругу задач перечислительной комбинаторики. Полученные результаты и разработанные для их получения новые методы существенно обогащают математический аппарат теории квантовых интегрируемых моделей статистической механики. Особенно это относится к результатам, касающимся представлений для корреляционных функции шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, а также к результату об арктической кривой этой модели.

В качестве замечания к диссертации, стоит отметить, что доказательство явного выражения для детальных 3-перечислений матриц чередующихся знаков в разделе 3.3 представляется весьма затянутым, хотя основано, по сути, лишь на кубическом преобразовании гипергеометрической функции Гаусса. Также, выглядит несколько излишним вывод различных представлений для вероятности образования пустоты в разделе 6.1, поскольку собственно представление в виде кулоновского газа, которое и было использовано для вывода главного члена в термодинамическом пределе, приводится только в разделе 6.2.4. Эти замечания, однако, не касаются существа полученных автором результатов и поэтому не влияют на сугубо положительную оценку представленного исследования.

Результаты диссертации полностью и своевременно опубликованы в ведущих научных журналах и неоднократно докладывались на научных семинарах и конференциях. Автореферат правильно и полно отражает основное содержание диссертации.

В силу всего выше сказанного, диссертация Пронько Андрея Георгиевича «Корреляционные функции вершинных моделей с фиксированными граничными условиями и их приложения к задачам комбинаторики» полностью соответствует предъявляемым к докторским диссертациям требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», а её автор несомненно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Главный научный сотрудник
Отдела теоретической физики
«НИЦ «Курчатовский институт» — ИФВЭ,
доктор физико-математических наук

Разумов А.В.

Федеральное государственное бюджетное учреждение «Институт физики высоких энергий имени А.А. Логунова Национального исследовательского центра «Курчатовский институт»

142281, Россия, Московская область, город Протвино, площадь Науки, дом 1

Телефон: (4967) 71-36-23

E-mail: Alexander.Razumov@ihep.ru

18 сентября 2017 г.

Подпись Разумова А.В. удостоверяю,
ученый секретарь

«НИЦ «Курчатовский институт» — ИФВЭ



Прокопенко Н.Н.