«УТВЕРЖДАЮ»
Проректор по научно-исследовательской работе ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г.Чернышевского»,
профессор ____________
Алексей Александрович Короновский
«25» октября 2017 г.

ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского» на диссертационную работу Алексея Николаевича Медведева «ЛОКАЛЬНАЯ ГЛАДКОСТЬ В СРАВНЕНИИ С ГЛАДКОСТЬЮ МОДУЛЯ»,

представленной на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности
01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Актуальность темы диссертации. При решении многих задач комплексного и гармонического анализа – весовая полиномиальная аппроксимация, факторизационное представление подклассов аналитических функций класса Неванлинны-Смирнова, описание идеалов в алгебрах аналитических функций, теория ортогональных многочленов и др., – возникает следующий вопрос: пусть f – аналитическая функция в области G, непрерывная вплоть до её границы, при этом $|f|$ на границе области имеет определённую гладкость; что можно сказать о гладкости самой функции f в замкнутой области?

В случае единичного круга, когда гладкость на единичной окружности определяется условием Гёльдера, В.П. Хавиным и рецензентом диссертации в 1970 году был установлен и опубликован следующий точный результат: если модуль аналитической функции на окружности удовлетворяет условию Гёльдера порядка α, то сама функция в замкнутом круге удовлетворяет условию Гёльдера порядка

$\frac{\alpha}{2}$. Этот результат породил много глубоких и красивых исследований. Отметим некоторые из них: работы Н.А. Широкова, К.М. Дьяконова, С.В. Кислякова, А.В. Васина, Дж, Бреннана, Г.Я. Бомаш, А.А. Вагаршакяна и др. Диссертация А.Н. Медведева посвящена упомянутой тематике и, несомненно, актуальна.

Степень новизны результатов, научных положений, выносимых на защиту. Все основные результаты диссертации являются новыми и значимыми для математического анализа. В диссертационной работе А.Н. Медведева рассматривается поточечный вариант вышеуказанной задачи о гладкости. Доказанные в ней результаты показывают, например, что при некоторых естественных условиях, гёльдерова гладкость модуля аналитических функции в одной граничной точке влечёт «половинную» гладкость самой функции в той же точке.

Основные результаты диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Первая глава диссертации посвящена внешним функциям в круге с условиями на гладкость их модулей в точке не выше единицы. Основным результатом первой главы является теорема 1. Прежде чем перейти к более детальному анализу этой теоремы, введём следующие обозначения. Пусть W – симметричное пространство функций на отрезке. Если $f \in W$, то средняя осцилляция функции f по отрезку I определяется следующим образом:

$$\Omega_W(f,I,c) := \frac{\left\| |f-c|\chi_I \right\|_W}{\|\chi_I\|_W},$$

где χ_I – характеристическая функция отрезка. Средняя гладкость функции f в точке x порядка меньше единицы описывается условием $\Omega_W(f,I) \le \omega(|I|)$, где ω – это функция типа модуля непрерывности.

В теореме 1 для внешней функции O_φ в единичном круге с модулем φ на единичной окружности при некоторых общих ограничениях на пространство W устанавливается существование такого положительного числа A, что для любого отрезка I, содержащего точку x, справедливы следующие оценки: если $|I| > A$, то $\Omega_W(O_\varphi, I) \le \omega(|I|)$; если $|I| \le A$, то $\Omega_W(O_\varphi, I) \le \omega(|I|) + \omega(\psi_X |I|)$, где ψ_X – обратная к функции $R_X(u) = u\Phi_X(u)$, Φ_X – фундаментальная функция симметрического пространства X.

В этих двух неравенствах содержится довольно много информации, в частности, если $\log\varphi \in X$, то O_φ можно исправить на множество меры нуль таким образом, чтобы имела место оценка $\left|O_\varphi(x)-O_\varphi(y)\right| \le c\omega\left(\psi\left(|x-y|\right)\right)$, если φ удовлетворяет условию $\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right| \le \omega\left(|x-y|\right), x,y \in [-\pi,\pi]$. Варьируя пространство X, получаем хорошо известные теоремы о поведении гладкости внешних функций. Этот результат автора заслуживает высокой оценки и оставляет очень хорошее впечатление.

Во второй главе автор рассматривает случай внешних функций в круге, модуль которых на единичной окружности обладает гладкостью между 1 и 2. Здесь в качестве симметричного пространства X выступает, в частности,пространство Лебега и Лоренца.

Третья глава посвящена исследованию вопросов локальной гладкости внешних функций в верхней полуплоскости при условии гладкости в точке порядка меньше 1. Прямой перенос результатов для круга посредством конформного отображения ничего содержательного не дает в случае верхней полуплоскости. Здесь возникают новые трудности, как технического, так и методологического характера, и автор проводит подробный их анализ. Как установлено в диссертации, падение гладкости в случае верхней полуплоскости наблюдается лишь на близких расстояниях от точки, в которой измеряется гладкость.

Заканчивая краткий анализ содержания диссертационного исследования, отметим, что в нем получен целый ряд красивых и глубоких результатов. Результаты диссертации улучшают и 'дополняютх известные ранее результаты. Автор впервые подробно исследовал локальный вариант задачи о подении гладкости аналитической функции в сравнении с гладкостью её модуля Доказательства большей части диссертации технически очень сложны.

Автору диссертации пришлось преодолеть большие трудности, чтобы получить эти результаты. Все приведенные в диссертации утверждения являются строго доказуемыми. Результаты диссертации опубликованы в журналах, рекомендуемых ВАК к публикации.Представленная А.Н. Медведевым диссертация представляет собой законченное научное исследование, выполненное на высоком научном уровне.

Обоснованность и достоверность результатов диссертации. Все приведенные в диссертации утверждения являются строго доказанными научными фактами. Все основные результаты диссертации своевременно опубликованы в центральных математических журналах (1 статья в журнале «Алгебра и анализ», 2 статьи и 1 препринт в

Записках научных семинаров ПОМИ), входящих в список ВАК и индексируемых базами данных Scopus и WOS. Автореферат правильно и точно отражает содержание диссертации.

Научная и практическая значимость основных положений диссертации. Рецензируемая диссертация является теоретическим исследованием. Методы и результаты диссертации могут использоваться в научно-исследовательской работе специалистов в области комплексного анализа и функционального анализа в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова, Ростовском федеральном университете, Башкирском государственном университете, Институте математики с ВЦ РАН, Уфа.

Заключение. На основании вышеизложенного считаю, что диссертационная работа «Локальная гладкость в сравнении с гладкостью модуля» является завершенной научно-исследовательской работой на актуальную тему по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ. Она удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым ВАК РФ к кандидатским диссертациям, в частности, п.п. 9-11,13,14 «Положения о присуждении ученых степеней», а ее автор, Алексей Николаевич Медведев, несомненно, заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Отзыв составил доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа Шамоян Файзо Агитович.

Отзыв рассмотрен и утвержден на заседании кафедры математического анализа ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского», протокол № 6 от 23 октября 2017 г.

Заведующий кафедрой
математического анализа
доктор физико-математических наук,
профессор Прохоров Дмитрий Валентинович

Адрес: 410012, г.Саратов
ул.Астраханская, 83
тел. (8452) 26-16-95
эл.почта prokhorovdv@info.sgu.ru

Подпись
Ученый секретарь
доцент
«25» октября 17