О Т З Ы В
ОФИЦИАЛЬНОГО ОППОНЕНТА НА ДИССЕРТАЦИЮ И.М.ВАСИЛЬЕВА "ГРАНИЧНАЯ ГЛАДКОСТЬ, К-ЗАМКНУТОСТЬ И РАЗЛОЖЕНИЯ ЛИТТЛВУДА–ПЭЛИ", ПРЕДСТАВЛЕННУЮ НА СОИСКАНИЕ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ КАНДИДАТА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

Диссертация И.М.Васильева посвящена обобщению нескольких классических утверждений из вещественного и комплексного анализа на многомерный случай.

Остановимся более подробно на основных результатах диссертации. Во *второй главе* дано обобщение известной теоремы из комплексного анализа, утверждающей, что гладкость функции, аналитической и не имеющей нулей в круге, а также непрерывной вплоть до его границы, в два раза меньше гладкости модуля ее граничного значения. Эта теорема была получена (при различных условиях на рассматриваемые классы функций) в работах В.П.Хавина, Ф.А.Шамояна и Н.А.Широкова. В статье А.В.Васина, С.В.Кислякова и А.Н.Медведева был предложен ее локальный вариант, формулируемый в терминах средней осцилляции функции. Именно в этой форме теорема переносится в диссертации на функции, аналитические в единичном шаре в $\mathbb{C}^n$ (теоремы 1 и 2). Более того, в теореме 3 показано, что указанный результат является точным. Для доказательства приведенных утверждений используются методы вещественного анализа и, в частности, теории сингулярных интегральных операторов, свободное владение которыми автор демонстрирует. Из многомерного комплексного анализа участвует только интегральное представление Коши в шаре, называемое иногда формулой Коши–Фантапье. Нет особых сомнений в том, что эти результаты должны распространяться на области голоморфности более общего вида, например, строго псевдовыпуклые области (локально биголоморфно эквивалентные строго выпуклым). Для их доказательства придется по-видимому использовать более общие интегральные представления типа Коши–Лере. Было бы также интересно изучить соотношение между гладкостью модуля граничного значения функции и ее гладкостью при подходе к границе по некасательным путям и путям, касающимся границы вдоль комплексных касательных направлений (как в многомерном варианте теоремы Линделефа, доказанном Е.М.Чиркой).

Главным результатом *третьей главы* является теорема 6 о К-замкнутости пары вещественных пространств Харди в $\mathbb{R}^n$ с различными показателями $\frac{n-1}{n} < p_1 < p_2 \leq \infty$ в паре пространств Лебега с теми же показателями. Это утверждение, как и теоремы второй главы, касается соотношения между функциями, на этот раз гармоническими в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+$, и их граничными значениями на $\mathbb{R}^n$. А именно, из доказанной теоремы следует, что разложение граничной функции на компоненты, принадлежащие пространствам Лебега с показателями p_1, p_2, порождает аналогичное разложение самой функции на компоненты из пространств Харди с теми же показателями и нормами, контролируемыми нормами лебеговых компонент.

Четвертая глава посвящена важной и интересной проблеме: охарактеризовать измеримые положительные функции f на $\mathbb{R}^n$, логарифм которых принадлежит пространству $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$. Автор предлагает в виде гипотезы критерий принадлежности функций указанному классу в терминах оценок преобразований Рисса. В диссертации установлена его достаточность (лемма 6), однако найдена и другая характеризация условия $\log f \in \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ (теорема 7), также формулируемая в терминах оценок на преобразования Рисса.

Наконец, в *пятой главы* дается описание пространств Трибеля–Лизоркина, обобщающее теорему С.В.Бочкарева для функций на окружности. Теорема Бочкарева формулируется в терминах ядер Валле-Пуссена и утверждает, что естественная норма на пространстве интегрируемых функций, определяемая через ядра Валле-Пуссена, эквивалентна норме пространства BMO. В основном результате пятой главы доказывается вариант этого результата для пространств Трибеля–Лизоркина в многомерной ситуации. Он формулируется в виде теоремы 8 об эквивалентности двух систем норм, задаваемых различными системами ядер на пространстве $\mathbb{R}^n$.

Укажем несколько замечаний, касающихся оформления диссертации.

(1) Имеется некоторая путаница в названии шаров Q относительно метрики, диктуемой интегральным представлением Коши–Фантапье. Так, в теореме 1 на стр.17 указанный шар называется неизотропным, а на стр.19 он же именуется анизотропным. Было бы также нелишне привести явное определение указанных шаров.

(2) Стоило бы напомнить определение системы сопряженных гармонических функций на стр. 36. То же самое относится и к максимальной функции Харди–Литтлвуда (стр.39).

(3) На стр.37-38 имеется некоторый разнобой в обозначениях: конус Γ_x обозначается также через $\Gamma(x)$. Раствор этого конуса равен Ct, а не Cn как в последней строке на стр.37. Еще одно замечание того же плана: на стр.51 в последнем абзаце функция $W(x,t)$ обозначается также через $W_{t_0}(x,t)$.

Конечно, все эти замечания носят технический характер и не влияют на общую оценку диссертации.

Подведем итог. В диссертации получены следующие основные результаты.

(1) Доказана теорема о связи гладкости функции, аналитической в единичном шаре и не имеющей там нулей, с гладкостью модуля ее граничного значения на сфере.

(2) Доказана K-замкнутость пары вещественных пространств Харди на пространстве $\mathbb{R}^n$ в паре пространств Лебега с теми же показателями.

(3) Получена характеризация условия принадлежности логарифма функции классу $\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ в терминах оценок преобразований Рисса.

(4) Найдено описание пространства Трибеля–Лизоркина на $\mathbb{R}^n$ в терминах систем ядер, обобщающих ядра Валле-Пуссена.

При доказательстве указанных результатов автор демонстрирует прекрасное владение методами вещественного анализа. Полученные им утверждения несомненно представляют интерес для специалистов по многомерному комплексному и гармоническому анализу.

Все результаты диссертации опубликованы с полными доказательствами в журналах "Записки научных семинаров ПОМИ" и "Journal of Functional Analysis". Автореферат диссертации правильно отражает ее содержание, а она сама удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям. Считаю, что И.М.Васильев безусловно заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – ”Вещественный, комплексный и функциональный анализ”.

Ведущий научный сотрудник
отдела комплексного анализа МИАН
доктор физ.-мат наук

А.Г.Сергеев

Подпись А.Г.Сергеева удостоверяю

П.А. Яськов
Учёный секретарь МИАН