

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертационную работу
ПРОНЬКО Андрея Георгиевича
«Корреляционные функции вершинных моделей с
фиксированными граничными условиями и их приложения к
задачам комбинаторики»
представленной на соискание ученой степени доктора
физико-математических наук по специальности 01.01.03 —
математическая физика

Диссертация Пронько А. Г. продолжает традиции научной школы Л. Д. Фаддеева и посвящена исследованию вершинных моделей, в основе которых лежит уравнение Янга–Бакстера. Работа в основном посвящена исследованию шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки и является естественным развитием результатов полученных в 80-х годах В. Е. Корепиным и А. Г. Изергиным для статистической суммы этой модели, которая изначально возникла в контексте задачи вычисления скалярного произведения векторов состояний в алгебраическом анзаце Бете. Эта статистическая сумма отличается от статистической суммы с периодическими граничными условиями даже в том режиме, когда корреляционные функции при периодических граничных условиях быстро убывают (разупорядоченная фаза). Такое поведение противоречит устоявшемуся среди физиков убеждению, что при быстро убывающих корреляциях статистическая сумма не зависит от граничных условий. Причина для такого, нетипичного, поведения кроется в том, что определяющие шестивершинную модель условия льда не дают степеням свободы смешиваться достаточно быстро. Поэтому в случае граничных условий Изергина–Корепина модель находится в упорядоченной фазе вблизи границы, достигая разупорядочения на некотором расстоянии от нее. В термодинамическом пределе упорядоченная и разупорядоченная фазы разделяются некоторой кривой, называемой арктической. Интересен вопрос о форме арктической кривой. Изучению этого вопроса и посвящена основная часть диссертации А.Г. Пронько.

В диссертации также исследуется пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями, которые тесно связаны со скалярными произведениями бетевских векторов вне поверхности масс.

Основное направление исследования — проблематика вывода замкнутых выражений для статистических сумм и корреляционных

функций пяти- и шестивершинной моделей статистической механики заданных на решетках конечного размера и с фиксированными граничными условиями, и их комбинаторных приложений.

К наиболее важным результатам работы можно отнести развитие метода вычисления корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. В частности, вычислена вероятность образования пустоты в терминах кратного контурного интеграла. На основе этого представления решена задача о нахождении арктической кривой модели. В диссертации также приложения граничных корреляционных функций к перечислениям матриц чередующихся знаков, а именно, найдена связь перечислений этих матриц с классическими ортогональными многочленами и доказана теорема о детальных 3-перечислениях матриц чередующихся знаков. Изучена термодинамика шестивершинной модели на L-образной области, дана новая интерпретация арктической кривой как кривой фазового перехода третьего рода возникающего при деформациях решетки путем удаления ее части. Для пятивершинной модели с специальными фиксированными граничными условиями проведено вычисление одноточечной корреляционной функции и получены различные новые детерминантные представления для статистической суммы.

Диссертация состоит из введения, семи глав, и заключения.

В первой главе обсуждаются общие свойства шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, формулируются основные актуальные задачи связанные с этой моделью и на решение которых нацелено исследование в диссертации. Основные новые результаты в этой главе касаются эквивалентных представлений для статистической суммы.

Во второй главе квантовым методом обратной задачи развит подход к вычислению граничных корреляционных функций шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки. В основе этого подхода лежат коммутационные соотношения алгебры Янга–Бакстера и концепция «двухузельной модели», которые позволяют выразить граничные корреляционные функции в терминах статистической суммы на решетках меньшего размера. Основные новые результаты этой главы касаются вычисления граничных корреляционных функций в терминах определителей. Также показано, что двухточечная граничная корреляционная функция разрешима в терминах одноточечной.

Третья глава посвящена приложению полученных результатов о граничных корреляционных функций к задаче вычисления детальных взвешенных перечислений матриц чередующихся знаков. Важное наблюдение состоит в том, что формула Изергина–Корепина для однородной шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки позволяет решать задачи о перечислениях матриц чередующихся знаков с помощью классических полиномов из таблицы Аски–Вильсона. Это позволило значительно упростить доказательство известных результатов об детальных 1- и 2-перечислениях, и, более того, вывести ранее неизвестное явное выражение для детальных 3-перечислений.

В четвертой главе получены результаты, позволяющие позднее найти арктическую кривую. Самым естественным способом вычисления мог бы состоять в вычислении одноточечной функции во всей области. Однако, такое вычисление представляется чрезвычайно сложным. Вместо этого предлагается следующий остроумный способ. Поддается вычислению нелокальная корреляционная функция, представляющая собой вероятность обнаружения упорядоченного прямоугольника, расположенного в углу исходной области, то есть имеющего одну вершину вне границы. Если в термодинамическом пределе эта вероятность равна единице (нулю), то указанная вершина лежит вне (внутри) арктического круга. Такая корреляционная функция называется вероятностью образования пустоты. Рассматривается также вероятность конфигурации ряда. В этой главе получены наиважнейшие результаты диссертации о корреляционных функциях модели, для вычисления которых развит подход позволяющий получать представления в терминах кратных контурных интегралов.

Пятая глава содержит наиболее интересные результаты в связи с явлением разделения фаз в шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки, и предельной форме матриц чередующихся знаков. Основной результат — уравнение арктической кривой модели. Это действительно выдающийся результат. Вывод основан на термодинамическом пределе для вероятности образования пустоты и механизме воспроизведения этого предела из представления в терминах кратного контурного интеграла, а именно, что арктическая кривая соответствует условию на параметры интеграла, при выполнении которого почти все решения системы уравнений седловой точки равны одному, известному, значению. Также обсуждаются частные случаи этой кривой, в частности, предьявлено явное выражение кривой описывающее предельную форму матриц чередующихся знаков.

В шестой главе выводится главный член асимптотики в термодинамическом пределе для вероятности образования пустоты шестивершинной модели с граничными условиями типа доменной стенки в точке свободных фермионов. Основным результатом состоит в том, что арктическая кривая является кривой фазового перехода третьего рода возникающего при геометрической деформации области задания модели. Найденный фазовый переход обладает чертами фазовых переходов третьего рода типа Дугласа–Казакова и Гросса–Виттена–Вадья хорошо известными в теории матричных моделей.

В седьмой главе исследуется пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями при которых имеет место взаимнооднозначное соответствие между конфигурациями модели и трехмерными диаграммами Юнга (плоскими разбиениями, или, эквивалентно, замощениями ромбами) в ящике. Одним из основных результатов здесь является детерминантная формула для статистической суммы пятивершинной модели с граничными условиями типа «скалярное произведение» в однородном пределе. Кроме того показано, что эта статистическая сумма допускает представление в виде τ -функции шестого уравнения Пенлеве для частных значений параметров, соответствующих классическим (в смысле Окамото) решениям.

Представленная диссертация является оригинальным исследованием, выполненным на очень высоком научном уровне. Полученные результаты и разработанные для их получения новые методы существенно обогащают математический аппарат интегрируемых моделей статистической механики. В частности, вычисление корреляционных функций на основе квантового метода обратной задачи, в существенной степени привлекает теорию ортогональных полиномов (для моделей на конечных решетках) и оперирует методами матричных моделей (для исследования величин в термодинамическом пределе). Изложение имеет продуманную структуру, основные результаты полно и строго доказаны.

По моему мнению работа автора вносит яркий вклад в развитие теории интегрируемых моделей на решетке и квантового метода обратной задачи. В диссертации получены важные чисто математические результаты относящиеся к широкому кругу задач пересчетной комбинаторики.

В качестве замечания к диссертации, стоит отметить некоторую избыточность в седьмой главе. Пятивершинная модель в случае свободных фермионов рассматривается дважды: сначала в приложении к плоским разбиениям, а затем к взвешенным плоским

разбиениям. Используется совершенно аналогичная техника, некоторые детали повторяются дважды. На мой взгляд было бы естественно рассмотреть только взвешенные плоские разбиения и упомянуть плоские разбиения в качестве частного случая. Учитывая, однако, желание автора придерживаться полноты изложения, указанные замечания носят рекомендательный характер и не меняют общей положительной оценки представленной работы.

Результаты работы своевременно и полно опубликованы. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация Пронько Андрея Георгиевича «Корреляционные функции вершинных моделей с фиксированными граничными условиями и их приложения к задачам комбинаторики» полностью соответствует предъявляемым к докторским диссертациям требованиям «Положения о присуждении ученых степеней», а её автор несомненно заслуживает присуждения ему ученой степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.03 – математическая физика.

Официальный оппонент
доктор физико-математических наук
СМИРНОВ Федор Александрович



Директор исследований первого класса
Лаборатории теоретической физики и высоких энергий
Национального центра научных исследований,
Париж, Франция

E-mail: smirnov@lpthe.jussieu.fr

11 сентября 2017 года

Подпись руки Смирнова Ф.А.

УДОСТОВЕРЯЮ
Помощник директора
по кадрам ИОМИ РАН Т.А. Долженкова

11 сентября 2017 г.

