

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Болохова Тимура Анатольевича «Расширения квадратичных форм векторного оператора Лапласа и сингулярные возмущения оператора Шредингера», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 «Математическая физика»

Диссертация Т. А. Болохова посвящена исследованию квадратичных форм и соответствующих им самосопряженных операторов, порождаемых взаимодействием со сферически симметричным потенциалом для 3-мерного векторного соленоидального поля в 3-мерном пространстве.

Актуальность темы диссертации. Квадратичная форма оператора Лапласа играет роль функционала потенциальной энергии в различных моделях невзаимодействующих полей. Оператор Лапласа в трехмерном пространстве имеет сравнительно простое спектральное преобразование и удобные выражения для функции Грина и ядра резольвенты. Из теории самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах известно, что замкнутые полуограниченные квадратичные формы могут обладать нетривиальными расширениями, то есть, квадратичными формами, определенными на более широких пространствах, действие которых на начальной области совпадает с действием исходной квадратичной формы. С точки зрения теории поля такие расширенные квадратичные формы описывают уже не свободные, а взаимодействующие поля или частицы. При этом операторы, соответствующие расширенным квадратичным формам, являются возмущениями операторов исходной квадратичной формы, и во многих случаях допускают точное описание через спектральное преобразование, либо с помощью ядра резольвенты. Таким образом, модели, потенциальная энергия которых задается расширениями квадратичной формы оператора Лапласа представляют интерес, как точно решаемые модели теории поля. Одним из простейших примеров таких моделей является взаимодействие с точечными потенциалами.

Аналогичная рассмотренной в диссертации задача квантовой механики для оператора Шредингера скалярной частицы, взаимодействующей с точечным источником, была решена в 1961г. Ф. А. Березиным и Л. Д. Фаддеевым и положила начало развития теории взаимодействия с сингулярными потенциалами. Несмотря на то, что данная теория в настоящий момент уже хорошо развита, а описание векторных полей с использованием базиса векторных сферических гармоник проводилось в 1950-1970 гг., решаемая в диссертации задача представляет из себя новое исследование, объединяющее в себе технику из различных областей математической физики.

Структура диссертации. Диссертация состоит из трех глав, введения, заключения и библиографии. В первой части диссертационной работы рассмотрены новые радиальные функции и показано, что индуцированные скалярные произведения для новых радиальных функций отличаются от плоского скалярного произведения на полуоси. Это обстоятельство приводит к появлению нетривиальных индексов дефекта у симметрических радиальных

операторов для орбитального момента $l=1$, определенных на множестве гладких функций, быстро убывающих в начале координат.

Во второй части работы решаются уравнения для дефектных векторов в подпространствах с орбитальным моментом $l=1$, приводятся выражения для самосопряженных расширений симметрических операторов, исследуется их спектр и строятся спектральные разложения. С помощью формулы Крейна строится выражение для резольвенты самосопряженного расширения общего вида симметрического оператора в поперечном подпространстве, заданного на множестве гладких функций, быстро убывающих в начале координат.

В третьей части работы формулы для самосопряженных расширений радиальных операторов переносятся в трехмерное пространство, где с их помощью строятся выражения для сферически-симметричных замкнутых расширений квадратичной формы оператора Лапласа на поперечном и продольном подпространствах. Нетривиальным результатом третьей части являются коэффициенты $5/3$ в поперечном случае и 3 в продольном случае, которые отвечают за перенормировку в соответствующих задачах для взаимодействия с точечными потенциалами.

Основные результаты и научная новизна. Показано, что существует параметризация поперечного и продольного подпространств пространства векторных функций трех переменных, в которой индуцированные скалярные произведения и радиальные части оператора Лапласа задаются одними и теми же дифференциальными операциями. Доказано, что в подпространствах с орбитальным моментом $l=1$ радиальные части оператора Лапласа на множестве гладких функций, быстро убывающих в начале координат, в индуцированном скалярном произведении являются симметрическими операторами с индексами дефекта $(1,1)$. Построены самосопряженные расширения этих операторов и их спектральные разложения. Даны выражения для замкнутых сферически симметричных расширений квадратичной формы оператора Лапласа на поперечном и продольном подпространствах, определяемых соответствующими самосопряженными расширениями радиальных операторов. Диссертация имеет теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации могут быть использованы в электродинамике, физике твердого тела и в любой другой теории, содержащей взаимодействие поперечных волн с точечными сингулярностями среды распространения. Все результаты новые и получены лично автором диссертации и опубликованы без соавторов.

К диссертации имеются следующие замечания:

В работе вводятся соглашения, которые используются достаточно нерегулярно. В частности, в начале разделов 1.1 и 1.2.1 приводятся различные записи оператора Лапласа. В первом случае есть знак суммы, во втором – по умолчанию считается, что происходит суммирование по одному из индексов. Также непонятно зачем введено собственное обозначение $\bar{\Delta}$ для оператора ∇ . Это все затрудняет восприятие используемых формул и утверждений.

Также затрудняет чтение формул некоторая небрежность в обозначениях и опечатки. Например, использование знака штриха для дифференцирования и для обозначения новых переменных. Одним из примеров опечатки является

использование в формулах (1.11) и (1.19) разных выражений под знаками суммирования. В формуле (1.11) суммирование идет по $1 \leq m \leq l$, в (1.19) – по $1 \leq l, |m| \leq l$. Поскольку величина m может принимать нулевое значение, а формула (1.19) выводится из формулы (1.11), то область суммирования в формуле (1.11) должна совпадать с областью суммирования формулы (1.19) и последующих формул. В других главах также встречаются небольшие опечатки (например, в формуле (3.7)), не влияющие на результат исследования.

Характеризуя диссертацию в целом, отмечу, что, несмотря на указанные замечания, исследования соискателя находятся на очень хорошем уровне. Не вызывает сомнения высокая квалификация автора. Все заявленные результаты снабжены доказательствами.

На основании вышеизложенного можно сделать вывод, что представленная диссертация является законченным оригинальным исследованием на актуальную тему, выполненным на высоком научном уровне. Результаты работы своевременно и полно опубликованы в изданиях, входящих в список ВАК, а также докладывались на семинарах в различных организациях, занимающихся данной областью математической физики. Автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Диссертация Болохова Тимура Анатольевича «Расширения квадратичных форм векторного оператора Лапласа и сингулярные возмущения оператора Шредингера» полностью соответствует требованиям «Положения о присуждении научных степеней», предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03 «математическая физика».

Официальный оппонент:

заведующий кафедрой высшей математики и механики
Санкт-Петербургского государственного университета
аэрокосмического приборостроения,
доктор физико-математических наук

Смирнов Александр Олегович
23 апреля 2018

