Отзыв официального оппонента

на диссертацию Железняка Александра Владимировича «Степенные ряды с обобщенными условиями Харди-Калуца», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Диссертационная работа Железняка А. В. посвящена актуальной задаче комплексного анализа и инициирована классической интерполяционной задачей Неванлинны-Пика: *для данных точек* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{D} = \{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$ *и* $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{D}$ *требуется найти голоморфную в* $\mathbb{D}$ *функцию* $\varphi, \sup\limits_{x \in \mathbb{D}} |\varphi(x)| \leq 1$, *для которой* $\varphi(x_k) = w_k$, $k = 1, \ldots, n$. Критерий разрешимости этой задачи был получен в 1916 г. (G. Pick): матрица $\mathbb{A} = \left(\dfrac{1 - w_k \bar{w}_j}{1 - x_k \bar{x}_j}\right)_{1 \leq k,j \leq n}$ должна быть нестрого положительно определена.

Многие математики занимались различными обобщениями и уточнениями этой классической задачи. Исследование условий разрешимости обобщенной задачи Неванлинны-Пика приводит к следующему вопросу:

для каких рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *с положительными коэффициентами* a_n

$$\text{«обратный ряд»} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^{-1} = b_0 - \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \tag{1}$$

имеет все коэффициенты $(-b_n) \geq 0$ *для* $n \in \mathbb{N}$?

Последний вопрос был в поле внимания математиков: Харди, Калужа, др. При этом нужно отметить, что диссертанту удалось навести порядок в истории поставленного вопроса. Этот вопрос, его обобщения и модификации является центральным в диссертации. Решение его является важным для применения в интерполяционной задаче Неванлинны-Пика. Таким образом, данное диссертационное исследование является актуальным.

Результаты опубликованы в 4-х статьях без соавторов уровня Q3–Q4 по версии Scopus; докладывались на научных семинарах и на международной конференции. Уровень публикаций и апробации считаю достаточным.

Известная теорема Калужа дает достаточное условие на коэффициенты a_n, при котором ответ на поставленный вопрос (1) положителен. В Главе I автор диссертации обобщает теорему Калужа на ряды в конечномерных пространствах (теорема 1.1). Дело это не простое, возникает много нюансов, которые можно видеть уже в формулировке теоремы 1.1. Теорема 1.3 усиливает теорему Калужа, расширяя множество рядов, для которых положителен ответ на вопрос (1). В теореме 1.3 условие логарифмической выпуклости коэффициентов исходного ряда заменено новым «условием Харди-m», $m \in \mathbb{N}$. Причем, с ростом m расширяется множество рядов, к которым применима теорема 1.3; в теореме Калужа ($m = 1$) это множество рядов самое маленькое.

В Главе II автор решает следующий вопрос: если в теореме Калужа условие логарифмической выпуклости коэффициентов выполнено не для всех $n \geq 0$, а начиная с номера $K \in \mathbb{N}$, можно ли получить положительный ответ на так модифицированный вопрос (1), если позволить варьировать a_0. Ответ положительный (теорема 2.1). Доказательство этой теоремы сложное, составляет около 10 страниц. Теорема 2.2 является обобщением теоремы 2.1 на многомерный случай.

Теорема 3.1 из Главы III представляет достаточное условие отрицательности коэффициентов обратного ряда для свертки 2-х данных рядов. Теорема 3.2 является обобщением предыдущей теоремы на многомерный случай.

В диссертации приводятся примеры, показывающие работоспособность полученных автором утверждений.

Представленная работа вносит значительный вклад в комплексный анализ и будет способствовать его дальнейшему развитию. Все результаты новые, доказательства полные, своевременно опубликованы в указанных в диссертации работах автора. Отметим некоторые незначительные недостатки работы.

1) Стр. 6, 5-6 св.: вместо N надо писать n.

2) Стр. 8, Определение 1.1 B-выпуклости тройки мультииндексов: здесь хорошо было бы упомянуть, что определение «привязано» к фиксированному ряду с коэффициентами a_s. Ведь одна и та же тройка для коэффициентов одного ряда будет B-выпуклой, а для другого — нет.

3) Стр. 13: в формулировке Теоремы 3.1 коэффициентами ряда G автор называет числа l_n, надо $(-l_n)$; то же и на стр. 62.

4) Абзац с обозначениями для мультииндексов и их характеристик трижды появляется во Введении, затем еще 2 раза: на стр. 46 и 70 — многовато.

5) Во Введении автор пишет о параграфах 2, 6, ... из диссертации. Но в заголовках диссертации нет символа параграфа, но есть разделы 1.2, 1.6, и т. д.

6) Стр. 21, 4 св.: после «параграф 2» пропущено слово «результат».

7) Стр. 62, 10 св.: предложение заканчивается так: «(см.).» — не ясно, на что смотреть.

8) В диссертации часто поминается немецкий математик Kaluza Th.. Автор диссертации пишет его фамилию в кириллице Калуца. Думаю, что это не верно, поскольку слово kaluza — из польского языка и читается как ка-

лужа. На справедливость этого рассуждения косвенно может указывать информация из Википедии, где говорится, что математик Kaluza Th. родился в католической семье на территории Польши.

Однако, указанные недостатки относятся к оформлению диссертации и не влияют на общую положительную ее оценку. Все представленные в работе результаты являются строго обоснованными. Результаты работы могут быть использованы в научных исследованиях в области математического анализа и приложений в государственных университетах С.-Петербурга, Москвы, Казани, Новосибирска, Петрозаводска, Томска, Волгограда, при чтении спецкурсов.

Считаю, что диссертация удовлетворяет всем требованиям ВАК, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ.

20 марта 2022 г.

Официальный оппонент:
доктор физико-математических наук,
заведующий кафедрой
математического анализа ПетрГУ,
профессор ВСтар Старков Виктор Васильевич

Почтовый адрес: 185910, Россия,
Республика Карелия,
г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33.
Телефон: (814-2) 71-10-76.

ПОДПИСЬ Старкова В.В.
ЗАВЕРЯЮ
ЗАМ. НАЧАЛЬНИКА
ОТДЕЛА КАДРОВ Е.А.ГУДКОВА
«21» 03 2022г.

Петрозаводский государственный университет «ПетрГУ»
Отдел кадров