ОТЗЫВ
официального оппонента о диссертации Крюкова Николая Алексеевича
«Различные задачи случайного заполнения множеств», представленной на
соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Диссертация посвящена исследованию свойств распределений, возникающих при случайном заполнении множеств. Схема заполнения рассматривается следующая: на отрезок длины x помещается отрезок фиксированной целочисленной длины l. При этом начальная точка размещаемого отрезка выбирается на отрезке $[0, x-l]$ $(x > l)$ в соответствии с некоторым заданным распределением вероятностей P_x. (В диссертации рассматривается как равномерное распределение на отрезке $[0, x-l]$, равномерное распределение на множестве целых точек отрезка $[0, n-l]$, $n \geq l$ натуральное, так и неравномерные распределения, параметризованные длиной отрезка x, семейство $\mathcal{P} = \{P_x\}$)). Далее на образовавшихся двух свободных отрезках снова размещаются отрезки длины l. Процесс останавливается, если образовавшийся свободный отрезок имеет длину меньше l. Основной объект изучения - это распределение случайной величины ξ_x - числа размещенных отрезков. Эта задача восходит к работе А. Реньи 1958 года, рассмотревшего случай $l = 1$ и получившего асимптотическую формулу $\mathbf{E}\xi_x$.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и приложения. Во введении дан исторический обзор результатов, связанных с рассматриваемой проблемой, сформулирована цель диссертационной работы и выделены результаты, выносимые на защиту, формулировка и доказательство которых даны в главах с первой по четвертую (в нумерации текста диссертации - это разделы со второго по пятый).

В первой главе рассматривается обобщение задачи Реньи о случайном размещении отрезка единичной длины на случай неравномерного распределения выбора конца отрезка. Предполагается, что распределения на вновь образовавшихся "свободных"отрезках (после каждого размещения) имеют плотность и согласованы так, что плотность распределения выбора конца на "левом"отрезке, $p_{1,x}$, и "правом"отрезке, $p_{2,x}$, с носителем на отрезке $[0, x]$ удовлетворяют соотношению

$$p_{1,x}(u) + p_{2,x}(u) = \frac{2}{x}. \qquad (1)$$

Показано, что при таком условии распределение с.в. ξ_x не зависит от конкретного выбора распределений P_x (Теорема 2.1 и следствие 1).

Поскольку семейство равномерных распределений выбора конца размещаемого отрезка удовлетворяет условию (1), и для него доказана асимптотическая нормальность распределения с.в. $(\xi_x - \mathbf{E}\xi_x)/\sqrt{D(\xi_x)}$, как следствие получена асимптотическая нормальность указанных величин для любого семейства, удовлетворяющего условию (1).

Во второй главе рассматривается задача дискретной парковки, т.е. интервалы целочисленной длины $[0, n]$ и $[t, t + l]$ соответственно. Точка t равномерно распределена на множестве целых точек $\{0, 1, \ldots, n - l\}$. Существенное предположение, что размещение на "правом"и "левом"свободных отрезках осуществляется независимо. Величина $\xi_{n,l}$ - число интервалов длины l размещенных на интервале $[0, n]$ удовлетворяет некоторому рекуррентному соотношению (соотношение (10) на стр. 10), которое играет фундаментальную роль в доказательстве результатов. Во второй главе получена асимптотическая формула для $\mathbf{E}\,\xi_{n,l}$ и точная формула для $\mathbf{E}\xi_{n,2}$ (Теорема 3.1 и Теорема 3.2 соответственно). В теореме 3.3 получена асимптотическая формула для дисперсии $D(\xi_{n,l})$. Доказательства теорем 3.1- 3.3 основаны на методе производящих функций. Используя рекуррентное соотношение (10) выводится для производящих функций последовательности м.о. $\mathbf{E}\,\xi_{n.l}$ линейное дифференциальное уравнение вида

$$G'(z) + a(z)G(z) + b(z) = 0, \tag{2}$$

где $a(z)$ и $b(z)$ некоторые известные функции. Далее выписывается решение этого уравнения и анализируется разложение решения в степенной ряд. В теореме 3.4 вычисляется асимптотика центральных моментов произвольного порядка случайных величин $\xi_{n,l}$ и на основе этой асимптотики доказывается центральная предельная теорема для последовательности $\xi_{n,l}$ при произвольном фиксированном l. Доказательство теоремы 3.4 основано на применении метода производящих функций и метода математической индукции по порядку момента (база индукции $k = 1, 2$ - это теоремы 3.1 и 3.3).

Идея весьма красивая, но требующая определенного мастерства и нетривиального счета. С чем, впрочем, автор успешно справился.

В третьей главе автор рассматривает дискретную задачу парковки, т.е. исходный отрезок целочисленной длины n, "размещаемый"отрезок длины 1, распределение конца размещаемого отрезка дискретно, сосредоточено в целых точках $\{0, \ldots, n-1\}$. Размещение прекращается, когда суммарная длина всех оставшихся отрезков меньше l. . Здесь получены точные формулы для математического ожидания и дисперсии (теоремы 4.1 и 4.2 асимптотическая формула для центральных моментов любого порядка (теорема 4.4) и на основе этой асимптотики доказана центральная предельная теорема для последовательности $\xi_{h,l}$.

В последней главе рассматривается задача размещения отрезка случайной длины. В частности в теореме 5.1 приведена формула для математического ожидания общей длины (меры) занятого места.

В приложении вынесены доказательства двух вспомогательных лемм.

Несколько замечаний редакционного характера, не умаляющих, однако, достоинств представленной диссертации.

1. Автор в доказательствах основных теорем оперирует с уравнением типа (1) и всякий раз (стр. 13, стр. 35, стр. 63) представляет решение уравнения в виде

$$G(z) = H(z)K(z),$$

где $H(z)$ - решение однородного уравнения, а $K(z)$ удовлетворяет уравнению

$$H(z)K'(z) = b(z).$$

Почему бы сразу не написать общее решение уравнения (2) в виде

$$G(z) = \exp\left\{-\int_0^z a(u)du\right\}\left(G(0) - \int_0^z b(y)\exp\left\{\int_0^y a(u)du\right\}dy\right).$$

2. На странице 8, 6 строка снизу. Неудачная фраза "следует утверждение изначально *поставленной* теоремы". По-моему, достаточно было написать "следует утверждение теоремы".

3. На странице 13, строки 5 и 7. В обозначении натурального логарифма используется символ ln вместо $\ln$. Дело в том, что символы l и n являются параметрами задачи и сочетание ln встречается в формулах как множитель. При наборе был пропущен командный символ у знака логарифма.

4. В формулировке теоремы 3.2 на странице 16 используются обозначения $\Gamma(a, b)$, смысл которых описан лишь на странице 18.

5. В Замечании 3 на странице 19, в выносной формуле, должно быть $\lim_{z\to 1}$, а не $\lim_{x\to 0}$.

6. Формулы на страницах 23 – 29 очень громоздки и трудно читаемые. Их вполне можно было записать более компактно, например, введя дополнительные обозначения.

7. В формулах на страницах 40-42 в представлении некоторых рядов опущен множитель z^n, что, вообще говоря, приводит к некорректным равенствам.

8. На стр 43 выражение: "*Обозначим* эту случайную величину *за* ξ_n". По-моему, лучше было бы "обозначим эту случайную величину символом ξ_n".

Приведенные в работе Крюкова Н.А. результаты представляют собой разностороннее и связное исследование единого объекта, при этом даны как асимптотические так и не асимптотические результаты.

Основные результаты диссертации Крюкова Н.А. опубликованы в математических журналах, входящих в список ВАК, и докладывались на Санкт-петербургском городском семинаре по теории вероятностей.

Все результаты строго математически доказаны. Автореферат точно и полно отражает содержание диссертации.

Диссертационная работа Крюкова Николая Алексеевича «Различные задачи случайного заполнения множеств» соответствует требованиям ВАК, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор заслуживает присуждения ему ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.05 — «Теория вероятностей и математическая статистика».

Доктор физико-математических наук, профессор А. Н. Тихомиров

Подпись А.Н. Тихомирова заверяю

Исполняющий обязанности
директора ФИЦ Коми НЦ УрО РАН А.Г. Шеломенцев

08.04.2022