

УТВЕРЖДАЮ:

И.о. проректора по научной работе

СПбГЭТУ „ЛЭТИ“

Гайворонский Д.В.

25 августа 2017 года

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Алпеева Андрея Викторовича „Инварианты энтропийного типа для сохраняющих меру действий счетных групп“, представленной на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 „Вещественный, комплексный и функциональный анализ“

Актуальность темы диссертации

Энтропийная теория динамических систем возникла в конце пятидесятих годов прошлого века и обязана своим появлением фундаментальными работам А.Н. Колмогорова. В них был введен важный сохраняющийся при изоморфизмах инвариант для сохраняющих меру действий динамических систем – энтропия. В его терминах удалось получить значительные продвижения в задачу о классификации бернуллиевских действий группы \mathbb{Z} . Позже в работах Орнштейна эта задача была полностью решена. Важность этого инварианта, как для абстрактных вопросов эргодической теории, так и для ее приложений (например, гладкой эргодической теории), невозможно переоценить. К концу восьмидесятих годов основные результаты энтропийной теории, в частности, классификация бернуллиевских сдвигов, были обобщены на случай действий аменабельных групп. Естественно возник вопрос – стоит ли ожидать дальнейшего обобщения на случай неаменабельных групп. Такое обобщение – на широкий класс, так называемых софических групп, было получено Боуэном в 2008 году. Класс софических групп включает в себя многие другие ранее известные классы групп (аменабельные, конечно-аппроксимируемые) и замкнут относительно некоторых комбинаторных операций, например, прямого произведения. Группа называется софической, если ее можно снабдить особым рода комбинаторной структурой – софической аппроксимацией. Определение софической энтропии, вообще говоря, зависит от этой аппроксимации. До сих пор неизвестно, являются ли все группы софическими.

В своих недавних работах Сюард инициировал изучение другого инварианта – так называемой рохлинской энтропии, определяемой через порождающие разбиения. Название было выбрано в связи со знаменитой теоремой В.А. Рошлина, утверждающей, что энтропия апериодического эргодического автоморфизма равна инфимуму шенноновских энтропий его порождающих разбиений. В диссертации А.В. Алпеева поставлена задача исследования поведения этих инвариантов для действий, возникающих из гиббсовских мер, а также изучения возможности построения аналога пинскеровского фактора для рохлинской энтропии и изучения его свойств. Для гиббсовских мер над софическими группами, получающихся из потенциалов, удовлетворяющих условию единственности Р.Л. Добрушина, автором доказана явная формула, дающая одновременно значение софической и рохлинской энтропии.

Если потенциал таков, что после домножения его на любое число между нулем и единицей получившийся потенциал будет обладать единственной инвариантной гиббсовской мерой, то, как показал автор, для софической энтропии инвариантной гиббсовской меры исходного потенциала можно тоже можно получить явную формулу.

В обоих случаях показано, что софическая энтропия от софической аппроксимации не зависит. Это факт был ранее установленное для бернуллиевских действий в работе Боуэна и для алгебраических действий в работе Хэйса. Однако, как недавно установил Кардери, это неверно для произвольной софической группы.

Достоверность и новизна основных выводов диссертации

Все результаты, представляющие основное содержание диссертации Алпеева А.В., являются новыми, все они получены автором самостоятельно. Выносимые на защиту результаты ранее не были известны. Они приведены с полными доказательствами и снабжены необходимыми комментариями. Диссертация изложена на 62 страницах, содержит введение, три главы, заключение и список литературы.

Ценность диссертации для науки

Диссертация Алпеева А.В. углубляет знания об энтропийной теории действий неабелевых групп. Изучение энтропии для счетных групп интересно тем, что требует формирование нового нетривиального математического аппарата. Представленная к защите работа ценна не только тем, что в ней установлен ряд не известных ранее фактов, но и тем, что она демонстрирует возможности работы с малоисследованными, сложными для работы структурами.

Обзор содержания диссертации

В первой главе вводятся основные определения и обозначения, которые будут использованы в дальнейшей работе, что вполне оправдано, поскольку средства необходимые для дальнейшей работы такие, как софические группы, софическая энтропия и горизонтальная софическая энтропия, имеют громоздкую структуру. Доказывается равенство софической энтропии и горизонтальной софической энтропии для эргодических мер на сдвиговых пространствах. Горизонтальная софическая энтропия будет использована в третьей главе, так как именно с ее помощью удастся провести необходимые расчеты с гиббсовскими мерами.

Вторая глава полностью посвящена исследованию пинскеровского фактора для рохлинской энтропии. Для эргодических действий произвольной счетной группы автор доказывает существование такого фактора (то есть, максимального фактора нулевой энтропии). Далее доказывается, что если пинскеровский фактор эргодической системы не является тривиальной системой, то исходная система будет слабо перемешивающим расширением этого фактора – аналог известного результата для классической энтропии. Общность полученных результатов и конструктивная сложность аппарата необходимого для реализации процедуры вычисления энтропии не оставляют надежд на конструктивное доказательство. В первом случае не обойтись без аксиомы выбора, а во втором приходится использовать дихотомию Фюрстенберга-Циммера, утверждающую что если эргодическое расширение действия не является слабо перемешивающим расширением, то существует промежуточный изометрический фактор.

Третья глава содержит доказательство главных результатов, полученных автором. Здесь исследуется энтропия для действий софических групп, возникающих из гиббсовских мер. Начало ее посвящено введению в теорию гиббсовских мер, доказаны некоторые технические леммы общего характера им посвященные. Доказывается общая формула софической энтропии для единственной инвариантной гиббсовской меры потенциала (теорема 3.18). Для потенциалов, удовлетворяющих условию единственности Р.Л. Добрушина доказывается (теорема 0.2), что софическая и рохлинская энтропия равны и оценка Сьюарда для них является точной – это один из основных результатов диссертации. Завершается глава доказательством теоремы 0.3, утверждающей, что если потенциалы, получающиеся из данного домножением его на числа от нуля до единицы, обладают единственной инвариантной гиббсовской мерой, то энтропия единственной инвариантной гиббсовской меры и в этом случае энтропию можно вычислить по формуле

$$h(\nu_\phi) = \log |A| + \int_{AG} \phi(x) d\nu_\phi - \int_0^1 d\beta \int_{AG} \phi(x) d\nu_{\beta\phi}(x).$$

В обоих случаях софическая энтропия оказывается независимой от софической аппроксимации.

Полученные в диссертации результаты опубликованы в трех статьях в журналах, рекомендуемых ВАК. Автореферат правильно и полно отражает основные результаты, представленные автором к защите.

Оценка содержания диссертации

Работа, представленная к защите, содержит ряд новых нетривиальных результатов важных для дальнейшего развития теории динамических систем. Помимо этого, работа интересна и ценна демонстрацией возможностей работы со сложными объектами, естественно возникающими при попытках расширения понятия энтропии, и исследования ее свойств.

Следует отметить, что подсчет рохлинской энтропии является сложной и нетривиальной задачей, до работ автора такие расчеты были сделаны (для действий неаменибельных групп) лишь для бернуллиевских действий и для некоторых действий нулевой энтропии. Примеров вычисления софической энтропии также не много: кроме бернуллиевских действий она была посчитана для алгебраических, гауссовских и для дистальных действий. Общего понимания того, для каких динамических систем софическая энтропия не зависит от софической аппроксимации, до сих пор нет. Таким образом, результаты Алпеева А.В. представляются существенным, нетривиальным вкладом в современную эргодическую теорию.

Результаты диссертации, безусловно, будут востребованы в исследованиях свойств динамических систем. Утверждения, полученные автором, могут быть интересны специалистам из МГУ, МИАН, СПбГУ, ЛЭТИ, ПОМИ.

К содержательной части диссертации нет никаких замечаний.

В тексте диссертации имеются опечатки (скорее, небрежности), затрудняющие понимание объективно сложных рассуждений и конструкций, например:

1. на с. 13 (15 строка сверху) напечатано $\mu|_x^\mu$, а должно быть $\mu|_x^A$.

2. в автореферате на с.6(8 строка сверху) появляется термин „вертикальная софическая энтропия“, который надо понимать как „горизонтальная софическая энтропия“.

Отмеченные недостатки не умаляют ценности полученных результатов и не снижает высокого уровня оценки, которого они заслуживают.

Заключение

Представленная диссертация является полноценной научно-квалификационной работой, посвященной изучению энергично развивающегося направления – исследованию динамических систем. Совокупность результатов, полученных в диссертации Алпеевым А.В. можно расценивать, как научно-исследовательскую работу, в которой получены новые существенные результаты связанные с возможностями вычисления инвариантов динамических систем. Диссертация отвечает всем требованиям „Положения о присуждении ученых степеней“, предъявляемым к кандидатской диссертации, а ее автор Алпеев Андрей Викторович заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 „Вещественный, комплексный и функциональный анализ“.

Отзыв на диссертацию и автореферат обсуждены на заседании кафедры Высшей математики-2 Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета 3 июля 2017 года.

Заведующий кафедрой Высшей математики-2
Санкт Петербургского государственного электротехнического университета
Доктор ф.-м. наук Коточигов А.М.

197022, г. Санкт-Петербург, ул.Професора Попова, д.5
т. 8(812)-234-6381, e-mail:amkotochigov@gmail.com

