



**САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
SAMARA UNIVERSITY

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Самарский национальный исследовательский университет  
имени академика С.П. Королева»

ул. Московское шоссе, д. 34, г. Самара, 443086  
Тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36  
Сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru  
ОКПО 02068410, ОГРН 1026301168310,  
ИНН 6316000632, КПП 631601001

УТВЕРЖДАЮ

Первый проректор – проректор  
по научно-исследовательской работе,  
д.т.н., доцент

А.Б. Прокофьев  
«14» января 2022 г.

14 ЯНВ 2022

№ 104-98



## ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертационную работу Целищева Антона Сергеевича «Два сюжета из гармонического анализа: квадратичные функции и задача об изоморфизме», представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук (специальность 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ)

Гармонический анализ — современный бурно развивающийся раздел математики. Идеи и результаты гармонического анализа проникают в самые различные области математики, он служит языком многих разделов современной физики и техники. Несмотря на серьезные достижения, систематически описанные в целом ряде монографий (см., например, L. Grafakos, Classical Fourier Analysis (2014) и Modern Fourier Analysis (2014)), многие важные вопросы, относящиеся к этой проблематике, остаются неизученными или были исследованы лишь при дополнительных условиях. Это относится как к тригонометрическому (классическому), так и нетригонометрическому анализу Фурье, который в последнее время приобретает все большее значение.

Рецензируемая диссертация посвящена, в основном, исследованию различных вопросов, так или иначе относящихся к теории Литтлвуда-Пэли. Если говорить о вещественном варианте этой теории, то в качестве одного из наиболее простых ее проявлений можно назвать замечательный широко известный факт, состоящий в том, что лакунарный тригонометрический ряд Фурье имеет сравнимые  $L^p$ -нормы при всех  $p \in (1, \infty)$ .

Например,

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k e^{2\pi 2^k x} \right\|_{L^p[0,1]} \asymp \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2}$$

с константами, зависящими только от  $p$ . Таким образом,  $L^p$ -норму функции  $\sum_{k=1}^n a_k e^{2\pi 2^k x}$  можно вычислять (с точностью до мультипликативных констант) примерно так же, как ее  $L^2$ -норму. Подобный результат верен и для более общих блоков экспонент с показателями из двоичных отрезков  $\{2^k + 1, \dots, 2^{k+1} - 1\}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , так как экспоненты из каждого такого блока ведут себя в определенной степени "независимо" от экспонент из предыдущего. Отсюда вытекает тот факт, что при изменении знаков этих блоков у  $p$ -суммируемой функции мы опять получим  $p$ -суммируемую функцию с эквивалентной  $L^p$ -нормой.

В настоящее время под теорией Литтлвуда-Пэли понимают целую серию утверждений об эквивалентности  $L^p$ -нормы функции аналогичной норме некоторой ассоциированной с ней функции со значениями в подходящем гильбертовом пространстве. Данное диссертационное исследование содержит новые интересные результаты, относящиеся к этой тематике, и поэтому, несомненно, актуально.

Диссертация состоит из пяти глав, заключения и списка литературы. В первой из глав, Введении, соискатель приводит краткий обзор литературы, дает обоснование актуальности темы исследования, приводит основные определения и обозначения, а также формулирует и обстоятельно комментирует основные результаты диссертационной работы.

Центральный результат второй главы — описание пространства  $ВМО$  с помощью разложения типа Литтлвуда-Пэли — является обобщением известной теоремы С.В. Бочкарева об аналогичном описании, основанном на применении операторов свертки с тригонометрическими полиномами вида  $V_{2^n} - V_{2^{n-1}}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , где  $V_k$  — ядра Валле-Пуссена на окружности. Теорема, приведенная в диссертации, показывает, что последний результат сохранится, если эти конкретные полиномы заменить довольно-таки общей последовательностью функций, напоминающей своими свойствами так называемую "аппроксимативную единицу".

В 1985 г. Рубио де Франсиа доказал следующее неравенство, являющееся существенным вкладом в развитие теории Литтлвуда-Пэли: если  $\{I_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  — семейство непересекающихся интервалов в  $\mathbb{Z}$  и операторы  $P_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ , определяются соотношением  $(P_j f)^\wedge = \chi_{I_j} \hat{f}$ , где  $\hat{f}$  — последовательность коэффициентов функции  $f$ , заданной на окружности, то при

$p \geq 2$

$$\left\| \left( \sum_{j \in \mathbb{Z}} |P_j f|^2 \right)^{1/2} \right\|_{L^p[0,1]} \asymp \|f\|_{L^p[0,1]}. \quad (1)$$

В третьей главе диссертации аналогичное неравенство доказано для системы Виленкина. Заметим, что в важном частном случае системы Уолша оно было получено ранее в работе Н.Н. Осипова [44] (согласно нумерации списка литературы в диссертации), однако идея приведенного там доказательства не "работает" напрямую в более общей ситуации. Это потребовало от соискателя использования, наряду с применением обобщения комбинаторной конструкции из [44], также специфических методов, связанных со свойствами функций Виленкина.

В четвертой главе вышеупомянутый результат работы [44] обобщается в другом направлении: в случае системы Уолша здесь получена некоторая естественная модификация неравенства (1) для функций  $f$ , принимающих значения в банаховой решетке  $X$  такой, что ее 2-вогнутизация  $X_{(2)}$  имеет свойство  $UMD$ . Кроме того, доказано, что если такое неравенство имеет место для некоторого  $p \geq 2$ , то оно выполнено также для произвольного  $q > p$ . Ключевым инструментом при этом по-прежнему является комбинаторная конструкция из [44], которая однако применяется соискателем иначе, чем в [44], без перехода к двойственным пространствам.

Несколько особняком в диссертации выглядит глава 5, в которой исследуются некоторые свойства банаховых пространств гладких функций на многомерном торе. Точнее, для произвольного набора дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами  $\mathcal{T} = (T_1, T_2, \dots, T_m)$  рассматривается пространство  $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$ , порождаемое полунормой

$$\|f\|_{\mathcal{T}} := \max_{j=1, \dots, m} \|T_j f\|_{C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)}.$$

Основной результат главы, один из наиболее глубоких в работе, говорит о том, что при определенных условиях на набор  $\mathcal{T}$  пространство  $C^{\mathcal{T}}(\mathbb{T}^n)$  не имеет локальной безусловной структуры и поэтому, в частности, не изоморфно ни одной банаховой решетке. При доказательстве этого результата соискателю пришлось преодолеть значительные технические трудности.

В Заключении соискатель перечисляет основные результаты работы. Здесь же приведен как список публикаций соискателя по теме диссертации, еал и общий список литературы, содержащий 56 наименований.

Диссертация представляет из себя в целом завершенное научное исследование; все утверждения приведены в ней с полными и подробными

доказательствами, выполненными на очень высоком техническом уровне и зачастую весьма изобретательными, что свидетельствует о высоком творческом потенциале соискателя. Полученные результаты, несомненно, являются серьезным вкладом в теорию Литтлвуда-Пэли, а также в изоморфную теорию классических функциональных пространств. Работа очень тщательно и аккуратно оформлена, даны все необходимые доказательства, приведены ссылки на используемые факты, все утверждения и выводы грамотно обоснованы.

Есть лишь одно замечание, связанное с определениями систем Уолша и Виленкина, играющих важную роль в работе. На наш взгляд, было бы более уместно и методически правильно изложить их в одном месте, причем начав с более простой системы Уолша. Есть также следующие мелкие замечания:

1. Стр. 4, -12: вместо "Литтлвуда-Пэли" должно быть "Литтлвуда-Пэли".

2. Стр. 37, -8: следовало бы точнее определить число  $M$ .

Разумеется, все это никак не влияет на значимость результатов, полученных соискателем.

По теме диссертации опубликовано 4 статьи в престижных рецензируемых научных журналах, входящих в перечень, рекомендованный ВАК Минобрнауки РФ. Результаты докладывались на ряде представительных конференций, в том числе и международных.

Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы при исследовании проблем функционального и гармонического анализа и их приложений к различным проблемам естествознания. Они будут интересны специалистам из Московского, Казанского, Новосибирского, Самарского, Санкт-Петербургского, Саратовского университетов. Возможно также использование результатов диссертационного исследования при чтении курсов по выбору в университетах для магистрантов и аспирантов физико-математических специальностей. Автореферат диссертации полностью и адекватно отражает содержание диссертации.

Суммируя вышесказанное, можно определенно констатировать, что диссертационная работа «Два сюжета из гармонического анализа: квадратичные функции и задача об изоморфизме» соответствует специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор, Целищев Антон Сергеевич заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 — вещественный, ком-

плексный и функциональный анализ.

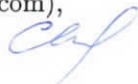
Отзыв обсужден на заседании кафедры функционального анализа и теории функций Самарского университета, протокол № 6 от 14 января 2022 г.

Заведующий кафедрой  
функционального анализа  
и теории функций Самарского  
университета (443086 г. Самара,  
ул. Московское шоссе, 34,  
тел. 8 (846) 3345437  
e-mail: astash@ssau.ru),  
доктор физ.-мат. н.,  
профессор



Асташкин Сергей Владимирович

Профессор кафедры  
безопасности информационных  
систем Самарского университета  
(443086 г. Самара, ул. Московское  
шоссе, 34, тел. 8 (846) 3379931  
e-mail: mostvil53@gmail.com),  
доктор физ.-мат. н.



Новиков Сергей Яковлевич