

Министерство науки и высшего  
образования Российской Федерации  
Федеральное государственное  
бюджетное учреждение науки  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ  
И МЕХАНИКИ  
им. Н.Н. Красовского  
Уральского отделения  
Российской академии наук  
(ИММ УрО РАН)  
г. Екатеринбург,  
почтовый индекс 620108  
ул. Софьи Ковалевской, д.16  
тел.(343) 374-83-32, факс 374-25-81  
E-mail [dir-info@imm.uran.ru](mailto:dir-info@imm.uran.ru)

*20.01.2022 № 163431/01-2171*  
На № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_

УТВЕРЖДАЮ:

Директор Института математики и  
механики им. Н.Н. Красовского  
Уральского отделения РАН

член-корр. РАН, д. ф.-м. н.,

профессор  Н.Ю. Лукоянов

20 января 2022 года



Г

Г

## ОТЗЫВ ВЕДУЩЕЙ ОРГАНИЗАЦИИ

на диссертационную работу Андрианова Павла Андреевича

«Многомерные периодические системы всплесков»,

представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Диссертационная работа посвящена построению и исследованию многомерных периодических базисов всплесков и фреймов всплесков.

### Актуальность темы

Теория всплесков играет важную роль в теоретической и прикладной математике. Современная теория всплесков позволяет решать задачи, связанные с обработкой и анализом сигналов и изображений, хранением и передачей информации, приближением функций, и многие другие. Наряду с непрерывными всплесками используются дискретные системы всплесков, находящие широкое применение в развитии цифровых технологий. Так как круг применений всплесков к прикладным проблемам продолжает расширяться, развитие теории базисов всплесков, а также построение и исследование новых возможных систем всплесков, несомненно, остается важной и актуальной задачей.

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. **Первая глава** содержит необходимые обозначения и предварительные сведения, используемые далее в диссертации.

Во **второй главе** рассматривается метод построения многомерных периодических базисов и фреймов всплесков на базе кратномасштабного анализа. В §2.1 доказываются достаточные условия бесселевости системы всплесков, которые являются ключевыми для того, чтобы система всплесков являлась фреймом. В §2.2 и §2.3 приведены теоремы, с помощью которых легко строить биортогональные двойственные базисы и фреймы всплесков по любым последовательностям тригонометрических полиномов, удовлетворяющим условиям теорем.

В **третьей главе** строятся многомерные периодические дискретные всплески. В §3.1 дается определение кратномасштабного анализа в пространстве  $M^n$ -периодических комплекснозначных функций от  $d$  целочисленных переменных, определение соответствующей масштабирующей последовательности, а также доказываются необходимые и достаточные условия того, что заданное множество функций образует масштабирующую последовательность в этом пространстве. Следующий §3.2 описывает построение биортогональных базисов пространств всплесков, соответствующих данному кратномасштабному анализу. И в §3.3 приведены формулы для прямого и обратного дискретного всплеск-преобразования для периодических систем всплесков на целочисленной решетке. Таким образом, третья глава дает достаточно общую схему построения описанных выше систем всплесков.

В **четвертой главе** рассматривается многомерный сепарабельный базис Хаара на  $d$ -мерном торе и исследуются его аппроксимативные свойства. В этом случае пространства  $d$ -мерного кратномасштабного анализа строятся как тензорные произведения  $d$  пространств одномерных хааровских кратномасштабных анализов на себя, после чего производится периодизация базисов этих пространств. Для таких базисов в работе доказаны прямые и обратные аппроксимационные теоремы с точными константами. В случае, когда  $d=2$ , найдены точные оценки уклонения от функций их сумм Фурье через модули непрерывности функций.

Список литературы содержит 40 наименований. Результаты диссертации опубликованы в девяти статьях автора. Шесть работ выполнены без соавторов; из работ, выполненных в соавторстве с М.А. Скопиной или О.Л. Виноградовым, в диссертацию включены только результаты П.А. Андрианова.



## Значимость полученных результатов

Результаты, полученные в данной работе, вносят существенный вклад в развитие теории периодических базисов и фреймов всплесков в многомерном пространстве. Могут быть использованы в теоретическом и прикладном плане. В частности, описанные в главах 2 и 3 алгоритмы просты и удобны в использовании, и могут применяться в различных задачах, связанных с обработкой данных. Полученные результаты также можно использовать в обучающих курсах по теории всплесков для студентов и аспирантов.

### Замечания:

- I) В автореферате и введении отмечено, что алгоритмы построения двойственных биортогональных базисов и фреймов всплесков выписаны в доказательствах соответствующих теорем главы 2. Но хотелось бы, чтобы в тексте диссертации данные алгоритмы были более явно выделены, так как это важный конструктивный момент не только для доказательства теорем, но и для построения соответствующих двойственных систем.
- II) В работе замечены следующие опечатки:
  - 1) В некоторых местах не переведены короткие части фраз с английского языка, в частности, на с. 33, не переведено «or» в определении  $a_l^*$ ; с. 34, п. I, 1) «and hence»; с. 49, «if...then»; с. 50, перед п. 3.2, «since»; с. 50, первая строчка: «Let»;
  - 2) На с. 66 в первой строке опечатка в слове «зафиксируем»;
  - 3) На с. 48 в первой строке двойные круглые скобки.

Отмеченные недочеты никак не затрудняют понимание текста диссертации и не влияют на общую высокую оценку диссертации.

Автореферат адекватно и полно отражает содержание диссертации.

**Заключение.** Диссертация Андрианова Павла Андреевича «Многомерные периодические системы всплесков» является законченной научно-квалификационной работой, содержащей важные для развития теории многомерных периодических базисов всплесков результаты. Полученные результаты являются новыми.

Таким образом, диссертация удовлетворяет требованиям п. 9 «Положения о присуждении ученых степеней», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата наук, а ее автор, Андрианов Павел Андреевич, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «Вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Диссертация обсуждена на семинаре отдела теории приближения функций и отдела аппроксимации и приложений ИММ УрО РАН, протокол №109 от 20 января 2022 года. Принято решение: одобрить положительный отзыв.

Отзыв составили:

старший научный сотрудник отдела аппроксимации и приложений ИММ УрО РАН, кандидат физико-математических наук, Е.А. Плещева;

главный научный сотрудник отдела аппроксимации и приложений ИММ УрО РАН, доктор физико-математических наук, профессор Н.И. Черных.

Старший научный сотрудник,

к. ф.-м. н.

Плещева Е.А.

Главный научный сотрудник,

д. ф.- м. н., профессор



Черных Н.И.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского  
Уральского отделения Российской академии наук (ИММ УрО РАН)

620108, г. Екатеринбург,

ул. Софьи Ковалевской, 16

+7 (343) 374-83-32, dir-info@imm.uran.ru



Рябухина С.Б.