



ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
JOINT INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH
Лаборатория теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова
Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics

Россия 141980 Дубна Московской области, Russia 141980 Dubna Moscow Region
Telefax: (7-49621) 65084, E-mail: bltp@theor.jinr.ru



УТВЕРЖДАЮ

Директор
Объединенного института
ядерных исследований
академик РАН
Трубников Г.В.

ОТЗЫВ

ведущей организации на диссертацию Иванова Александра Валентиновича
«Коэффициенты Сили-деВитта: диаграммная техника, нерекурсивная формула, интеграл по
путям и теорема Атьи-Зингера-Патоли для многообразия с доменными стенками»,
представленную на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.03-математическая физика

Диссертация А. В. Иванова развивает методы построения асимптотического разложения теплового ядра при малых значениях собственного времени. Несмотря на то, что существует обширная литература по этой тематике, А. В. Иванову удалось, используя новые подходы, получить ряд важных результатов, которые, несомненно, найдут свое применение в теоретической и математической физике.

В первой главе диссертации дано определение теплового ядра для оператора Лапласа с ковариантной производной и произвольным гладким потенциалом, а также коэффициентов асимптотического разложения теплового ядра при малых значениях собственного времени (коэффициентов Сили-Де Витта). Как известно, старшие коэффициенты теплового ядра выражаются через младшие с помощью рекуррентных соотношений, которые представляют собой систему дифференциальных уравнений. Эти соотношения можно найти, например, в классической монографии Б. Де Витта "Динамическая теория полей и групп" 1965 г. Для того, чтобы записать систему интегральных соотношений для коэффициентов Сили-Де Вита в диссертации введено понятие упорядоченной экспоненты, сформулированы и доказаны ее свойства.

Ковариантное дифференцирование и интегрирование упорядоченной экспоненты играют ключевую роль в диаграммной технике для нахождения коэффициентов Сили-Де Витта, разработанной в диссертации. Диаграммная техника позволяет вычислять коэффициенты Сили-Де Витта в общем виде и находить их следовые части. Несмотря на то, что процедура вычисления коэффициентов остается рекуррентной, с помощью диаграммной техники, предложенной А.В. Ивановым, можно компактно записывать громоздкие формулы, не теряя информации.

Алгебраический подход, также используемый в диссертации, является дополнением к диаграммной технике. Определив на множестве матриц операторы, являющиеся аналогом

ковариантной производной и интегрирования вдоль геодезической, автор диссертации вывел нерекурсивную формулу для следовой части коэффициента Сили—Де Витта оператора Лапласа с произвольным гладким полем Янга—Миллса и без потенциала.

Во второй главе диссертации при исследовании асимптотического разложения теплового ядра использована калибровка Фока—Швингера. В этой калибровке получены полезные коммутационные соотношения для упорядоченной экспоненты. Они позволили найти решение рекуррентной системы дифференциальных уравнений для коэффициентов Сили—Де Витта оператора Лапласа с произвольными гладкими калибровочным полем и потенциалом.

Также описан вывод нерекурсивной формулы для диагональных частей коэффициентов Сили—Де Витта и сделано обобщение на случай римановой метрики. Нерекурсивная формула для следовых частей коэффициентов теплового ядра получена А. В. Ивановым впервые. Кроме того, во второй главе диссертации представлен вывод континуального представления, коэффициенты при степенях собственного времени которого совпадают с коэффициентами Сили—Де Витта. Таким образом получено новое доказательство связи асимптотического разложения теплового ядра и интеграла по путям.

В третьей главе диссертации теорема Атьи—Зингера—Патоди об индексе, которая позволяет связать спектральные характеристики дифференциального оператора с топологическими характеристиками многообразия, расширена на случай многообразия с доменными стенками. Доменная стенка обычно определяется как подмногообразие, на котором компоненты связности Янга—Миллса имеют скачок, а метрический тензор остается непрерывным. Отметим, что в диссертации рассмотрено также обобщение граничных условий доменной стенки, на случай, когда компоненты римановой связности испытывают скачок.

Для доказательства теоремы об индексе ранее использовались явные вычисления с применением разложения теплового ядра для всех аномалий в четырехмерном пространстве с некоторыми ограничениями на геометрию вблизи доменных стенок. В настоящей диссертации рассмотрен наиболее общий случай без ограничений на размерность и геометрию многообразия. Получены и доказаны новые формулы для индекса оператора Дирака на многообразии с доменными стенками, дающие связь аномалий внутри многообразия и на его поверхности. Доказана инвариантность индекса оператора Дирака на римановом многообразии с доменными стенками относительно регуляризаций специального вида.

Результаты диссертации представляют бесспорную ценность для квантовой теории поля и квантовой гравитации, так как асимптотическое разложение теплового ядра непосредственно связано с петлевым разложением, и знание коэффициентов теплового ядра позволяет, в частности, находить новые вклады в квантовое эффективное действие и ренормгрупповой поток. Кроме того, новые коммутационные соотношения для упорядоченных экспонент, полученные в диссертации, могут быть полезны в теории интегрируемых моделей. Новые формулы для индекса оператора Дирака на многообразии с доменными стенками, возможно, найдут применение в теории конденсированных сред для материалов, допускающих квантовополевое описание. Устанавливая соотношение между аномалиями киральности и четности, теорема об индексе является источником важной информации для приложений в теоретической и математической физике.

Диссертация была рассмотрена на семинаре «Современная математическая физика» Лаборатории теоретической физики им. Н.Н. Боголюбова 16 марта 2021 года. Участники семинара отметили актуальность и высокий уровень исследования.

Перечислим немногочисленные замечания к диссертации. Если формула (2.22) названа второй нерекурсивной формулой, тогда утверждение теоремы 1.15 следовало бы назвать первой нерекурсивной формулой и пронумеровать. В разделе 2.7.4, где перед формулой (2.59) упоминается аналитическое продолжение дзета-функции, стоило привести выражение, связывающее интеграл по путям со значением производной дзета-функции соответствующего оператора. В качестве пожелания для дальнейшей работы отметим, что представляет интерес развитие методов, предложенных в главах 1 и 2, для многообразий с границами.

Диссертация А.В. Иванова – это самостоятельное законченное фундаментальное исследование. Выносимые на защиту результаты являются новыми и актуальными. О


зрелости А.В. Иванова как ученого свидетельствует то, что основные результаты получены им без соавторов.

Эффективность предложенных методов и их достоверность подтверждается вычислениями ранее известных коэффициентов теплового ядра. Справедливость формулы для индекса оператора Дирака проверяется путем рассмотрения частных случаев, которые совпадают с ранее полученными выражениями. Результаты работы докладывались на российских и международных конференциях и семинарах, опубликованы в реферируемых изданиях из списка ВАК. Автореферат верно отражает содержание диссертации.

Диссертация А.В. Иванова соответствует требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям «Положением о порядке присуждения ученых степеней» ВАК. Автор диссертации, Иванов Александр Валентинович, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.03-математическая физика.

Отзыв составила

Начальник сектора ЛТФ ОИЯИ
кандидат физико-математических наук,

 И. Г. Пироженко

Директор Лаборатории теоретической
физики им. Н.Н. Боголюбова ОИЯИ,
доктор физико-математических наук,
член-корреспондент РАН

 Д. И. Казаков